ISSN 2078-6115. Вісник Львівського університету. Серія економічна. 2012. Випуск 47. С. 250-257
Visnyk of the Lviv University. Series Economics. 2012. Issue 47. P. 250-257

УДК 330.47

ПРО РОЗВ'ЯЗАННЯ ПРОБЛЕМИ АВТОКОРЕЛЯЦІЇ ЗА ДОПОМОГОЮ ТЕПЛІЦЕВИХ МАТРИЦЬ

О. Ковальчук, М. Бубняк

Тернопільський національний економічний університет
46020, м. Тернопіль, вул. Львівська, 11

Для знаходження параметрів множинної лінійної регресії з автокореляцією запропоновано використати узагальнений метод найменших квадратів з точним обчисленням оберненої матриці. Такий підхід дає можливість одержати точні оцінки параметрів регресії у випадку автокореляції.
Ключові слова: Лінійна множинна регресія, автокореляція, тепліцева матриця, алгоритм Тиртишнікова.

Економічна теорія дає якісні характеристики економічних процесів, а економетрія – кількісні. Можна сказати, що економетрія займається емпіричною перевіркою положень економічної теорії і використовує при цьому математичну економіку та статистичні методи. Розглянемо етапи розв'язання економетричної задачі:

1) економічна теорія (припущення, гіпотеза);
2) математична економіка (побудова економетричної моделі, яка описує явище чи процес);
3) регресійний аналіз (обчислення параметрів побудованої економетричної моделі);
4) перевірка моделі (перевірка статистичних гіпотез);
5) прогнозування (розрахунок майбутніх показників з використанням обчислених параметрів моделі);
6) багаторазове використання моделі.

Розглянемо ці етапи побудови економетричної моделі на прикладі множинної лінійної регресії з автокореляцією.

Відомо, що будь-який економічний процес залежить від впливу не одного, а декількох факторів. Тому необхідно на основі якісного аналізу вибрати лише такі фактори, які істотно впливають на результат.

Багатофакторні зв'язки між явищами (зокрема й економічні) найчастіше моделюють за допомогою лінійного рівняння. В таке рівняння входить результуюча змінна x_0 і декілька факторів $x_1, x_2, ..., x_p$. У більшості випадків лінійна множинна регресія достатньо точно описує явище, яке досліджують. Складніші зв'язки однофакторного аналізу були розглянуті в [4]. Вибір факторів рівняння регресії потрібно обгрунтувати перед початком розрахунків. Для дослідження економічних явищ достатньо обрати 3–4 фактори, максимально – 8. З метою підвищення точності моделі потрібно збільшити кількість даних у статистичній лінійці. Вважають, що кількість статистичних даних повинна бути в 10 разів більшою від кількості факторів. Однак, якщо факторні змінні корелюють між собою (а саме цю проблему ми будемо розглядати далі), то жодне збільшення статистичної лінійки не покращить точності моделі. Припустимо, що таких факторів є p.

Лінійне рівняння регресії для p факторів має вигляд [2, ст. 58]:

$$x_0 = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \cdots + \beta_p x_p + \varepsilon, \quad (1)$$

де x_0 - результуюча змінна, $x_1, x_2, ..., x_p$ - факторні змінні, $\beta_0, \beta_1, ..., \beta_p$ - параметри рівняння регресії, ε – залишки моделі (випадкові величини). Отже, одержимо наступне теоретичне рівняння множинної регресії:

$$\tilde{x}_0 = b_0 + b_1 x_1 + b_2 x_2 + \cdots + b_p x_p,$$

яке дає $\tilde{x}_0$ – теоретичне значення результуючої змінної при заданих факторах $x_1, x_2, ..., x_p$; коефіцієнти регресії $b_1, b_2, ..., b_p$ та b_0 – вільний член рівняння регресії. Всі дані економетричної моделі задамо у вигляді наступної таблиці:

x_0	x_1	x_2	$\dots$	x_p	ε_0
x_{01}	x_{11}	x_{21}	$\dots$	x_{p1}	ε_1
x_{02}	x_{12}	x_{22}	$\dots$	x_{p2}	ε_2
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
x_{0n}	x_{1n}	x_{2n}	$\dots$	x_{pn}	ε_n

де x_{ji} - фактичне значення i-го спостереження j-ї факторної змінної ($i = \overline{1, n}$; $j = \overline{1, p}$), ε_i – i-ий залишок.

Для обчислення коефіцієнтів регресії $b_0, b_1, ..., b_p$ b_p використовують метод найменших квадратів, який вимагає перевірки наступних гіпотез [2, ст. 66]:

1. Існує лінійний зв'язок між результуючою змінною x_0 і факторами $x_1, x_2, ..., x_p$, який описує рівняння (1).

2. Факторні змінні $x_1, x_2, ..., x_p$ не є випадковими.

3. Математичне сподівання вектора залишків ε рівне нулю ($E\varepsilon_i$=0) і дисперсія ε задовольняє умові: $D\varepsilon_i = \sigma^2$ ($i = \overline{1, n}$).

4. Компоненти вектора ε не є корельованими величинами, тобто $cov(\varepsilon_i, \varepsilon_j)=0$, $i \neq j$ ($i, j = \overline{1, n}$).

5. Випадкова величина ε має нормальний розподіл з математичним сподіванням рівним 0 і постійною невеликою дисперсією.

6. Фактори $x_1, x_2, ..., x_p$ не є лінійно залежними (відсутність мультиколінеарності).

Розглянемо економетричну модель, у якій порушена гіпотеза 4. Тобто $cov(\varepsilon_i, \varepsilon_j) \neq 0$, $i \neq j$ $(i, j = \overline{1, n})$, яку можна записати у вигляді $E(\varepsilon_i, \varepsilon_j) \neq 0$, або у матричному вигляді:

$E(\varepsilon\varepsilon^T) = V$,

де $V = \sigma^2\Omega$,

$$\Omega = \begin{pmatrix} 1 & \rho & \rho^2 & \cdots & \rho^{n-1} \\ \rho & 1 & \rho & \cdots & \rho^{n-2} \\ \rho^2 & \rho & 1 & \cdots & \rho^{n-3} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \rho^{n-1} & \rho^{n-2} & \rho^{n-3} & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

і ρ описує коваріацію залишків. Зазначимо, що матриця Ω є тепліцевою.

Для знаходження параметрів $b_0, b_1, ..., b_p$ ми не можемо використати звичайний метод найменших квадратів, тому застосуємо метод Ейкена [2, ст. 161].

Отже, невідомі параметри регресійної моделі шукаємо за формулою:

$$b = \left(X^T \Omega^{-1} X\right)^{-1} \left(X^T \Omega^{-1} x_0\right),$$

де Ω^{-1} – обернена до тепліцевої матриці Ω і

$$X = \begin{pmatrix} 1 & x_{11} & x_{21} & \cdots & x_{p1} \\ 1 & x_{12} & x_{22} & \cdots & x_{p1} \\ 1 & x_{13} & x_{23} & \cdots & x_{p1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & x_{1n} & x_{2n} & \cdots & x_{pn} \end{pmatrix}.$$

Для спрощення обчислення матриці Ω^{-1} використовували припущення, що $\rho^n \to 0$ $(n>2)$, тобто матриця Ω близька до трьохдіагональної.

У даній роботі для обчислення точного значення Ω^{-1} запропоновано застосувати швидкий алгоритм Тиртишнікова знаходження оберненої до тепліцевої матриці [6], ідея якого полягає у використання специфічних властивостей тепліцевих матриць.

У загальному випадку матрицю, обернену до тепліцевої, можна записати за розв'язками двох систем лінійних алгебраїчних рівнянь, в яких матрицею коефіцієнтів є початкова тепліцева матриця, а праві частини вибирають, враховуючи її специфіку.

Для отримання оберненої матриці використаємо алгоритм, за яким початковій тепліцевій матриці та оберненій до неї (як і будь-якій квадратній матриці) ставлять у відповідність деяку квадратну матрицю такого ж порядку. Для матриці, що відповідає початковій тепліцевій матриці, знайдемо скелетний розклад і від нього перейдемо до скелетного розкладу матриці, що відповідає оберненій. За цим розкладом побудуємо представлення оберненої матриці [3].

Розглянемо матрицю перестановок вигляду

$$Q_n = \left(\begin{array}{ccc:cc} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hdashline 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

і тепліцевій матриці вигляду

$$A = \left(\begin{array}{cc:c} a_0 & a_{-1} & a_{-n+1} \\ a_1 & a_0 & a_{-n+2} \\ \hdashline a_{n-1} & a_{n-2} & a_0 \end{array}\right)$$

поставимо у відповідність матрицю

$$AQ_n - QA_n = \left(\begin{array}{cc:cc} a_{-1} - a_{n-1} & a_{-2} - a_{n-2} & a_{-n+1} - a_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\left(a_{-n+1} - a_1\right) \\ \hdashline 0 & 0 & 0 & -\left(a_{-1} - a_{n-1}\right) \end{array}\right),$$

ранг якої дорівнює 0 або 2. Визначимо її скелетний розклад. Для цього введемо два вектор-стовпці і матрицю перестановок J_n порядку *n* такого вигляду:

$$g = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \; e = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \; J_n = \left(\begin{array}{c:cc} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ \hdashline 1 & 0 & 0 \end{array}\right). \tag{1}$$

Тоді отримаємо $AQ_n - Q_n A = g\left(J_n e\right)^T - e\left(J_n g\right)^T$, якщо A – невироджена матриця. Помноживши обидві частини рівності зліва і справа на A^{-1} і змінивши знаки на протилежні, отримаємо

$$A^{-1}Q_n - Q_n A^{-1} = A^{-1}e\left(J_n g\right)^T A^{-1} - A^{-1}g\left(J_n e\right)^T A^{-1}. \tag{2}$$

Для спрощення даного виразу використаємо одну з властивостей тепліцевої матриці [3]: $A^T = J_n A J_n$.

Для будь-якої тепліцевої матриці A і будь-яких вектор–стовпців x, *y* порядку *n* рівність $Ax = y$ виконується тоді і тільки тоді, коли м $A^T J_n x = J_n y$.

У випадку дійсних або комплексних матриць має місце рівність $\left(A^{-1}\right)^T = \left(A^T\right)^{-1}$, тому невироджена матриця персиметрична тоді і тільки тоді, коли обернена до неї є персиметричною. Отже, (2) можна записати у вигляді

$$A^{-1}Q_n - Q_n A^{-1} = A^{-1}e\left(J_n A^{-1} g\right)^T - A^{-1}g\left(J_n A^{-1}e\right)^T. \quad (3)$$

Відтворимо A^{-1} за координатами векторів, що входять у скелетний розклад (3).

Теорема 1. Дійсна або комплексна тепліцева матриця A порядку n є невиродженою тоді і тільки тоді, коли існують розв'язки $x = \left[x_0 x_1 \dots x_{n-1}\right]^T$ і $v = \left[v_0 v_1 \dots v_{n-1}\right]^T$ двох систем $Ax = e$, $Av = g$, де вектор-стовпці *e, g*, визначені в (1). Для оберненої матриці запишемо [3]:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} x_0 & 0 & \vdots & 0 \\ x_1 & x_0 & \vdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_{n-1} & x_{n-2} & \vdots & x_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & v_{n-1} & \vdots & v_2 & v_1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \vdots & 1 & v_{n-1} \\ 0 & 0 & \vdots & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} v_0 - 1 & 0 & \vdots & 0 \\ v_1 & v_0 - 1 & \vdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ v_{n-1} & v_{n-2} & \vdots & v_0 - 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & x_{n-1} & \vdots & x_1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \vdots & x_{n-1} \\ 0 & 0 & \vdots & 0 \end{pmatrix} . \quad (4)$$

З точки зору існуючих обчислювальних алгоритмів найефективнішим є представлення оберненої до тепліцевої матриці через елементи її першого та останнього стовпців.

Нехай A – невироджена комплексна або дійсна тепліцева матриця з елементами $a_{i,j}^{-1} - a_{i-j}^{-1}$ і $x = \left[x_0 x_1 \dots x_{n-1}\right]^T$, $y = \left[y_0 y_1 \dots y_{n-1}\right]^T$ – відповідно перший і останній стовпці матриці, тобто $a_{i,1}^{-1} = x_{i-1}, \dots, a_{i,1}^{-1} = y_{i-1}$ для будь-яких i, j. Матриця A^{-1} персиметрична, тому $a_{1,1}^{-1} = a_{n,n}^{-1} = x_0 = y_{n-1}$. Щоб отримати формулу для A^{-1}, припустимо додатково, що $x_0 \neq 0$.

Згідно з теоремою 1 та, враховуючи (1) і персиметричність матриці A^{-1}, запишемо [3]: $a_{1,j}^{-1} = a_{j,n}^{-1} = x_0 v_{n+1-j} - \left(v_0 - 1\right)x_{n+1-j} = y_{n-j}$ при $2 \leq j \leq n$, звідки, покладаючи $l = n + 1 - j$ і враховуючи, що $x_0 \neq 0$, знаходимо $v_l = x_0^{-1} y_{l-1} + x_0 \left(v_0 - 1\right)x_i$ при $1 \leq l \leq n - 1$.

У (4) величини v_l замінимо даними виразами. Всі члени, що містять v_l, взаємно знищуються. Враховуючи, що $x_0 = y_{n-1}$, отримаємо

$$A^{-1}=x_0^{-1}\left\{\begin{pmatrix} x_0 & 0 & \cdots & 0\\ x_1 & x_0 & \cdots & 0\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ x_{n-1} & x_{n-2} & \cdots & x_0\end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_{n-1} & y_{n-2} & \cdots & y_0\\ 0 & y_{n-1} & \cdots & y_1\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 0 & 0 & \cdots & y_{n-1}\end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0\\ y_0 & 0 & \cdots & 0\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ y_{n-2} & y_{n-3} & \cdots & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & x_{n-1} & \cdots & x_1\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 0 & 0 & \cdots & x_{n-1}\\ 0 & 0 & \cdots & 0\end{pmatrix}\right\}. \quad (5)$$

Використовуючи наведені вище результати, застосуємо швидкий алгоритм [5, 6] знаходження оберненої матриці, ідея якого полягає в обчисленні першого та останнього стовпців оберненої матриці без відшукання інших її елементів. Позначимо через вектори $\alpha^{(k)}$ та $\beta^{(k)}$, $k=1,\dots,n-1$ відповідно перший та останній стовпці оберненої матриці для кожної з відсічених систем A_k, $k=1,\dots,n-1$.

Запишемо формули для знаходження першого та останнього стовпців оберненої матриці [6]:

для $k=0$: $\alpha_0{}^{(0)}=\beta_0{}^{(0)}=\dfrac{1}{A_0}$,

для $k=1,\dots,n-1$: $\quad F_k=A_k\alpha_0{}^{(k-1)}+A_{k-1}\alpha_1{}^{(k-1)}+\dots+A_1\alpha_{k-1}{}^{(k-1)}$,

$$R_k=A_{-1}\beta_0{}^{(k-1)}+A_{-2}\beta_1{}^{(k-1)}+\dots+A_{-k}\beta_{k-1}{}^{(k-1)},$$

$$U_k=\frac{1}{1-F_kR_k},\ S_k=-U_kF_k,\ V_k=-U_kR_k,$$

$$\begin{bmatrix}\alpha_0{}^{(k)}\\ \alpha_1{}^{(k)}\\ \cdots\\ \alpha_{k-1}{}^{(k)}\\ \alpha_k{}^{(k)}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\alpha_0{}^{(k-1)}\\ \alpha_1{}^{(k-1)}\\ \cdots\\ \alpha_{k-1}{}^{(k-1)}\\ 0\end{bmatrix}U_k+\begin{bmatrix}0\\ \beta_0{}^{(k-1)}\\ \cdots\\ \beta_{k-2}{}^{(k-1)}\\ \beta_{k-1}{}^{(k-1)}\end{bmatrix}S_k\ ,$$

$$\begin{bmatrix}\beta_0{}^{(k)}\\ \beta_1{}^{(k)}\\ \cdots\\ \beta_{k-1}{}^{(k)}\\ \beta_k{}^{(k)}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\alpha_0{}^{(k-1)}\\ \alpha_1{}^{(k-1)}\\ \cdots\\ \alpha_{k-1}{}^{(k-1)}\\ 0\end{bmatrix}V_k+\begin{bmatrix}0\\ \beta_0{}^{(k-1)}\\ \cdots\\ \beta_{k-2}{}^{(k-1)}\\ \beta_{k-1}{}^{(k-1)}\end{bmatrix}U_k\,.$$

Теоретично є лише одне місце алгоритму, яке може призвести до похибки (ділення на нуль). Це операція ділення, яка визначає величину U_k. Але помилка (теоретично) неможлива, якщо в матриці A будуть відмінними від нуля всі ведучі мінори [5]. При цьому гарантується, що $1 - F_k R_k \neq 0$ для будь-якого k.

Після того, як знайдено перший та останній стовпці оберненої матриці, можна повністю відтворити A^{-1} за такою схемою [4]:

$$A^{-1} = \alpha_0^{-1} \left\{ \begin{pmatrix} \alpha_0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \alpha_1 & \alpha_0 & 0 & \dots & 0 \\ \hdotsfor{5} \\ \alpha_{n-1} & \alpha_{n-2} & \alpha_{n-3} & \dots & \alpha_0 \end{pmatrix} \times \right.$$

$$\times \begin{pmatrix} \beta_{n-1} & \beta_{n-2} & \beta_{n-3} & \dots & \beta_0 \\ 0 & \beta_{n-1} & \beta_{n-2} & \dots & \beta_1 \\ \hdotsfor{5} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \beta_{n-1} \end{pmatrix} -$$

$$\left. - \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \beta_0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \hdotsfor{5} \\ \beta_{n-2} & \beta_{n-3} & \dots & \beta_0 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & \alpha_{n-1} & \dots & \alpha_2 & \alpha_1 \\ \hdotsfor{5} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \alpha_{n-1} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

Якщо ж використати економетричну модель з автокореляцією, то неефективні оцінки параметрів b_0, b_1, …, b_p призведуть до неточних прогнозів, а також до неможливості використання критеріїв t-статистики Стьюдента і F-статистики Фішера.

---

1. Єлейко В. Основи економетрії. Ч. 1. – Львів: ТзОв "Марка Лтд", 1995. – 191 с.
2. Єлейко В.І., Боднар Р.Д., Демчишин М.Я. Економетричний аналіз діяльності підприємств. – Тернопіль: Навчальна книга Богдан, 2011. – 365 с.
3. Иохвидов И.С. Ганкелевы и теплицевы матрицы и формы. – М.: Наука, 1974. – 257 с.
4. Ковальчук О.Я., Бубняк М.М. Математичне моделювання економічних процесів методом екстраполяції // Зб. наук. праць "Фінансова система України". – Острог: "Острозька академія". – 2010. – Вип. 15. – С. 482–488.
5. Недашковський М.О., Ковальчук О.Я. Обчислення з –матрицями. – К.: Наукова думка, 2007. – 294 с.
6. Тыртышников Е.Е. Теплицевы матрицы, некоторые их аналоги и приложения. – М.: ОВМ АН СССР, 1989. – 184 с.

ABOUT SOLVING OF THE PROBLEM OF AUTOCORRELATION BY TEPLITS MATRICES

O. Kovalchuk, M. Bubnyak

Ternopil National Economic University
L'vivs'ka st., 11. UA-46020 Ternopil, Ukraine

For finding the parameters of multiple linear regression with autocorrelation we propose to use a generalized method of least squares with the exact calculation of the inverse matrix. This approach makes it possible to obtain accurate estimates of regression parameters in the case of autocorrelation.

Key words: linear multiple regression, autocorrelation, the method of Toeplitz matrix, Tyrtyshnikov’s algorithm.