ISSN 2078-6115. Вісник Львівського університету. Серія економічна. 2012. Випуск 47. С. 25-34
Visnyk of the Lviv University. Series Economics. 2012. Issue 47. P. 25-34

УДК 311:336

ПЛАНУВАННЯ ДОХІДНОСТІ ПОРТФЕЛЯ ЦІННИХ ПАПЕРІВ З НАЙМЕНШИМ РІВНЕМ VAR

Т. Заболоцький

Львівський інститут банківської справи Університету банківської справи Національного банку України
79000 м. Львів, проспект Шевченка 9
E-mail: zjabka@yahoo.com

В роботі досліджено властивості умовної очікуваної дохідності портфеля цінних паперів з найменшим рівнем VaR на прикладі портфеля сформованого з акцій трьох українських підприємств. Показано, що умовна густина оцінки дохідності є несиметричною, а умовна оцінка дохідності істотно відрізняється від безумовної.
Ключові слова: дохідність, портфель з найменшим рівнем VaR, умовна очікувана дохідність.

1. Вступ.

На даний момент фондовий ринок України знаходиться на ранній стадії свого формування. Ринкові правила ще не є остаточно сформованими, та й інвесторів, які б проявляли інтерес до нашого ринку є небагато. Тому на фондовій українській біржі спостерігаються досить великі коливання курсів, що з одного боку є добре для інвесторів, оскільки їх прибуток може бути порівняно великий по відношенню до інших ринків. Однак, з іншого боку, існує серйозний ризик втратити значну частину своїх заощаджень. Тому при інвестуванні коштів в українські цінні папери варто звертати більше уваги можливим ризикам, ніж очікуваній дохідності, оскільки при такій варіації курсів очікувана дохідність є досить ненадійною оцінкою доходу.

Обчислення фінансових ризиків портфеля цінних паперів є складним питанням. Основна складність тут полягає у виборі міри ризику, або, простіше кажучи, у відповіді на питання, як чисельно оцінити ризик портфеля цінних паперів? Зауважимо, що дати однозначну відповідь на поставлене питання неможливо. Це перш за все зумовлено тим, що означення фінансового ризику не є єдиним. Так, для когось в якості фінансового ризику може слугувати імовірність отримати прибуток вищий за певний заданий рівень. Іншого інвестора може цікавити імовірність втрат більше певного рівня. Також, можемо означити ризик як втрати чи дохід з певною імовірністю. Вищенаведені означення не є повним переліком всіх можливих означень ризиків. Для уніфікації розрахунків зв'язаних з фінансовими ризиками, як правило, використовують банківські рекомендаційні програми (*Basel II*, *RiskMetrics*, *CAD II*). Ці програми рекомендують використовувати для чисельного опису фінансових ризиків міру ризику *Value-at-Risk* (див., напр., [1]). Ця міра ризику є квантильною мірою, тобто вона дорівнює певній квантилі розподілу функції витрат. Використання *Value-at-Risk* (надалі *VaR*) розглядалося також і в наукових працях вчених, що працюють в області фінансової математики. Наприклад, в роботі [2], широко розглянуто практичні аспекти використання цієї міри ризику для опису властивостей фінансових показників. Робота [3] присвячена огляду статистичних властивостей оцінок даної міри. В цих працях розглядалося питання оцінки *VaR* вже існуючого портфеля цінних паперів. З іншого боку до питання ризику підходять автори в роботі [4], основною метою якої є побудова портфеля з найменшим рівнем ризику. Питання мінімізації ризику було вперше сформульовано Марковіцем в [5], у якій він використав за міру ризику дисперсію. Подальші дослідження в області фінансових ризиків показали, що на практиці дисперсія гірше описує ризик ніж *VaR*. Тому питання розглянуте в [4] доволі актуальне. Автори цієї праці в своєму дослідженні, використовуючи припущення про нормальність розподілу дохідностей цінних паперів, отримали ваги оптимального портфеля з найменшим рівнем *VaR*, які є залежними від параметрів розподілу, математичного сподівання та дисперсії. На практиці ці параметри є невідомими, тому необхідно використовувати їх оцінки, які є випадковими величинами. Отже, випадковими величинами будуть також ваги оптимального портфеля. Тому для опису властивостей характеристик портфеля (очікуваної дохідності та ризику) добре б було знати розподіл їх оцінок. Це питання розглянуто в роботах [6]-[7], в яких було знайдено умовні розподіли цих показників. Зауважимо, що в цих працях також використовується припущення про нормальність розподілу дохідностей. Дане припущення зазнає критики протягом останніх десятиліть. Так, наприклад, в роботах [8]-[10] показано, що денні дохідності та дохідності з вищою частотою (наприклад, щогодинні, щохвилинні) не є нормально розподіленими, а мають так звані важкі хвости, тобто значення цих дохідностей є більш розсіяні по числовій прямій, ніж значення нормально розподіленої випадкової величини. Але дохідності з більшою частотою (щомісячні, щорічні) мають розподіли близькі до нормального (див., напр., [8]). В роботі [3] показано, що якщо портфель добре диверсифікований, то важкі хвости не мають істотного впливу на його характеристики. Тому припущення про нормальний розподіл дохідностей на сьогоднішній день доволі часто використовують не лише у фінансовій літературі, але й на практиці фондового ринку.

Враховуючи вищенаведене, **метою цієї роботи** є дослідження оптимального портфеля акцій з найменшим рівнем *VaR* та порівняння властивостей його безумовної та умовної очікуваної дохідності. З результатів отриманих в роботах [6]-[7] випливає, що використання задачі мінімізації *VaR* для побудови портфеля призводить до того, що безумовні характеристики втрачають свою інформативність. Тому в цьому випадку доречніше використовувати умовні значення характеристик. Зауважимо, що точкові оцінки характеристик не містять в собі достовірної інформації, оскільки імовірність прийняття випадкової величиною значення точкової оцінки дорівнює нулю. Тому при плануванні своєї діяльності на основі портфеля цінних паперів інвестору краще використовувати не лише точкові, але й інтервальні оцінки параметрів, що його цікавлять. Побудова таких умовних інтервальних оцінок також є метою даної роботи.

2. Статистичні властивості характеристик портфеля цінних паперів з найменшим рівнем *VaR*.

Статистичні властивості цін цінних паперів є доволі непривабливими. Розглядаючи поведінку ціни акції на протязі певного часу, не важко зауважити, що вона має тренд, причому цей тренд може змінювати свій напрямок. Крім цього, ціновий процес не є навіть наближено стаціонарним та симетричним. Тому частіше за характеристику цінного паперу розглядають не його ціну, а дохідність. Зауважимо, що існує декілька загалом різних означень дохідності. Найчастіше вживаною у фінансовій літературі є логарифмічна дохідність (надалі дохідність). Якщо через P_t позначити ціну цінного паперу в момент часу t, то дохідність визначаємо за формулою

$$X_t = 100 \ln \frac{P_t}{P_{t-1}}.$$

На відміну від ціни, дохідність може приймати як додатні, так і від'ємні значення, що є досить істотною перевагою дохідності над ціною.

Очевидно, що цінні папери з більшою дохідністю є привабливішими для інвестора ніж цінні папери, дохідність яких є меншою. Використовувати при побудові портфеля цінних паперів лише оцінки дохідності буде помилковим, оскільки поведінка дохідностей подібна на поведінку випадкової величини. В цьому випадку необхідно взяти до уваги й інші характеристики, такі як, наприклад, дисперсія чи, більш загально, ризик. Вперше питання побудови портфеля цінних паперів з найменшим рівнем *VaR* було розглянуто в роботі [4]. Автори цієї праці, припускаючи, що дохідності цінних паперів поводяться як нормально розподілені величини, сформулювали та розв'язали задачу мінімізації ризику портфеля. Для опису результатів отриманих в роботі [4], припустимо, що ми формуємо портфель з k акцій. Позначимо через $\mathbf{X}_t=(X_{1t}, X_{2t}, \ldots, X_{kt})'$ k-вимірний вектор дохідностей. Частку i-ого цінного паперу в портфелі позначимо через w_i, а портфель – вектор часток $\mathbf{w}=(w_1, w_2, \ldots, w_k)'$. Припустимо, що вектор $\mathbf{X}_t$ є k-вимірною нормально розподіленою випадковою величиною з параметрами $\boldsymbol{\mu}$ та $\boldsymbol{\Sigma}$. Тоді дохідність портфелю X_{wt} з вектором ваг $\mathbf{w}$ обчислюємо за формулою $X_{wt}=\sum_{i=1}^{t} \mathrm{X}_{it} w_i = \mathbf{X}_t'\mathbf{w}$, математичне сподівання R_w дохідності портфелю або очікувану дохідність – $R_w=\mathrm{E}(\mathrm{X}_{wt})=\boldsymbol{\mu}'\mathbf{w}$, а дисперсію $V_w=D(\mathrm{X}_{wt})=\mathbf{w}'\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{w}$. Якщо припустити, що дохідності є нормально розподіленими, то *VaR* портфеля з рівним довіри α можемо обчислити наступним чином $VaR_\alpha(w) = z_\alpha V_w - R_w$. В [4] розглянуто наступну задачу мінімізації

$$\begin{cases} VaR_\alpha(w) \to \min \\ \sum_{i=1}^{k} w_i = 1. \end{cases} \qquad (1)$$

Розв'язком (1) є ваги оптимального портфелю з найменшим рівнем *VaR*

$$\mathbf{w}_{VaR} = \mathbf{w}_{GMV} + \frac{\sqrt{V_{GMV}}}{\sqrt{z_\alpha^2 - s}} \mathbf{R}\boldsymbol{\mu}, \qquad (2)$$

де $\mathbf{w}_{GMV} = \dfrac{\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\mathbf{i}}{\mathbf{i}'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\mathbf{i}}$ – ваги оптимального портфеля з найменшою дисперсією, $V_{GMV} = \dfrac{1}{\mathbf{i}'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\mathbf{i}}$ – дисперсія портфеля $\mathbf{w}_{GMV}$, $\mathbf{i}$ – k вимірний вектор, елементами якого є одиниці, $\mathbf{R}=\mathbf{\Sigma}^{-1}-\dfrac{\mathbf{\Sigma}^{-1}\mathbf{i}\mathbf{i}'\mathbf{\Sigma}^{-1}}{\mathbf{i}'\mathbf{\Sigma}^{-1}\mathbf{i}}$, $s=\boldsymbol{\mu}'\mathbf{R}\boldsymbol{\mu}$, та $z_\alpha=-\Phi^{-1}(1-\alpha)$ є α-квантилю стандартного нормального розподілу. Безумовні характеристики даного портфеля мають наступний вигляд

$$R_{VaR}=\mathbf{w}'_{VaR}\,\boldsymbol{\mu}=R_{GMV}+\frac{s}{\sqrt{z_\alpha^2-s}}\sqrt{V_{GMV}}\,, \tag{3}$$

$$V_{VaR}=\mathbf{w}'_{VaR}\,\mathbf{\Sigma}\mathbf{w}_{VaR}=\frac{z_\alpha^2}{z_\alpha^2-s}V_{GMV}\,, \tag{4}$$

$$M_{VaR}=\sqrt{z_\alpha^2-s}\sqrt{V_{GMV}}-R_{GMV}\,, \tag{5}$$

де $R_{GMV}=\dfrac{\boldsymbol{\mu}'\mathbf{\Sigma}^{-1}\mathbf{i}}{\mathbf{i}'\mathbf{\Sigma}^{-1}\mathbf{i}}$ – очікувана дохідність портфеля $\mathbf{w}_{GMV}$, R_{VaR} – очікувана дохідність портфеля $\mathbf{w}_{VaR}$, V_{VaR} – його дисперсія, а M_{VaR} – *VaR* цього портфеля при рівні довіри α.

Зауважимо, що і ваги портфеля (2), і його характеристики (3)-(5) залежать від параметрів розподілу дохідностей цінних паперів $\boldsymbol{\mu}$ та $\mathbf{\Sigma}$, які на практиці є невідомими. Тому для обчислення ваг та характеристик портфеля потрібно використовувати оцінки цих параметрів. Найчастіше на практиці використовуються історичні оцінки параметрів розподілу

$$\hat{\boldsymbol{\mu}}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mathbf{X}_i\,,\ \hat{\mathbf{\Sigma}}=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(\mathbf{X}_i-\hat{\boldsymbol{\mu}})(\mathbf{X}_i-\hat{\boldsymbol{\mu}})', \tag{6}$$

де $\boldsymbol{X_1}$, $\boldsymbol{X_2}$, …, $\boldsymbol{X_n}$ – історичні значення дохідностей. Підставивши оцінки (6) у вирази (2)-(5), отримаємо оцінки ваг та характеристик портфеля з найменшим рівнем *VaR*. Виникає питання, наскільки достовірними є такі оцінки? Зауважимо спочатку, що оцінки параметрів розподілу, а також і оцінки ваг та характеристик портфеля, є випадковими величинами. Тому точкові оцінки в цьому випадку не є достовірними. Кращими очевидно є інтервальні оцінки. Перед тим як перейти до побудови інтервальних оцінок, зазначимо, що для цього необхідно знати розподіл характеристики, яка оцінюється. Звернемо увагу на знаменник другого доданку у (2). Параметр s є невідомим і ми змушені використовувати його оцінку, яка має вигляд $\hat{s}=\hat{\boldsymbol{\mu}}'\hat{\mathbf{R}}\hat{\boldsymbol{\mu}}$. В залежності від властивостей цієї оцінки вираз під коренем може бути від’ємним. В роботі [6] досліджено властивості цієї величини та обчислено інтервал довіри для імовірності того, що $z_\alpha^2<\hat{s}$. Виявляється, що така подія є можливою. Тому для побудови інтервальних оцінок дохідності портфеля правильніше використовувати умовний розподіл очікуваної дохідності, тобто розподіл величини $\hat{R}_{VaR}\mid\hat{s}<z_\alpha^2$. Розподіл цієї величини знайдено в роботі [7]. Її густина розподілу має вигляд

$$f_{\hat{R}_{VaR}|\hat{s}<z_\alpha^2}(x) = K(z_\alpha^2)\int_0^{z_\alpha^2} f_{k-1,n-k+1;ns}\left(\frac{n(n-k+1)}{(n-1)(k-1)}s^*\right) f_{\hat{R}^*_{VaR}}(x \mid s^*)ds^*$$

(7),

де $K(x) = \frac{n(n-k+1)}{(n-1)(k-1)} \frac{1}{F_{k-1,n-k+1;ns}\left(\frac{n(n-k+1)}{(n-1)(k-1)}x\right)}$, $F_{d_1,d_2;\lambda}(x)$ та $f_{d_1,d_2;\lambda}(x)$ відповідно функція розподілу та густина нецентрального розподілу Фішера з d_1 і d_2 ступенями свободи та нецентральним параметром λ (див., напр., [11]). Функція

$$f_{\hat{R}^*_{VaR}}(x) = \frac{1}{2^{\frac{n-k-2}{2}} a(s^*)^{n-k}\Gamma((n-k)/2)} \exp\left\{-\frac{(x-R_{GMV})^2}{2(a(s^*)^2+\tilde{s}^*)}\right\} \times$$
$$\times M(x; n-k, R_{GMV}, \sqrt{\tilde{s}^*}, a(s^*))$$

є функцією густини очікуваної дохідності портфеля з найменшим рівнем *VaR* за умови, що значення параметра *s* наперед відоме та становить s^*. Тут

$$M(x;m,a,b_1,b_2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}|b_1|}\int_0^\infty t^{m-1}\exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{b_1^2}+\frac{1}{b_2^2}\right)\left(t-(x-a)\frac{b_2^2}{b_2^2+b_1^2}\right)^2\right\}dt,$$

$$a(s^*) = \frac{s^*}{\sqrt{z_\alpha^2 - s^*}}\sqrt{\frac{V_{GMV}}{n-1}} \text{ та } \tilde{s}^* = \frac{1+n/(n-1)s^*}{n}V_{GMV}.$$

Отже, за умовну точкову оцінку дохідності портфеля цінних паперів з найменшим рівнем *VaR*, беремо умовне математичне сподівання випадкової величини $\hat{R}_{VaR} \mid \hat{s} < z_\alpha^2$, тобто

$$\hat{R}_{VaR,cond} = M(\hat{R}_{VaR} \mid \hat{s} < z_\alpha^2) = \int_{-\infty}^{\infty} x f_{\hat{R}_{VaR}|\hat{s}<z_\alpha^2}(x)dx = R_{GMV} + \sqrt{\frac{2V_{GMV}}{n-1}}\frac{\Gamma\left(\frac{n-k+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n-k}{2}\right)}Q_1(z_\alpha^2)$$

, (8)

де $Q_1(x) = K(x)\int_0^x \frac{s^*}{\sqrt{x-s^*}} f_{k-1,n-k+1;ns}\left(\frac{n(n-k+1)}{(n-1)(k-1)}s^*\right)ds^*$. Зрозуміло, що безумовна оцінка дохідності портфеля буде відрізнятися від умовної оцінки (8). До цього питання повернемося в наступному розділі.

Використовуючи густину розподілу дохідності можемо обчислити оцінку *VaR* очікуваної дохідності портфеля за виконання умови $\hat{s} < z_\alpha^2$ та побудувати умовний інтервал довіри для очікуваної дохідності. Для обчислення оцінки *VaR* очікуваної дохідності при рівні довіри α нам необхідно розв'язати інтегральне рівняння

$$\int_{-\infty}^{-y} f_{\hat{R}_{VaR}|\hat{s}<z_\alpha^2}(x)dx = 1-\alpha . \tag{9}$$

Розв'язок y^* рівняння (9) буде значенням оцінки *VaR* очікуваної дохідності. Аналітичними методами розв'язати рівняння (9) неможливо. Неважко знайти чисельний розв'язок у кожному окремому випадку за допомогою спеціальних комп'ютерних програм. Для побудови умовного інтервалу довіри з рівнем довіри β також потрібно розв'язати інтегральне рівняння

$$\int_{y_1}^{y_2} f_{\hat{R}_{VaR}|\hat{s}<z_\alpha^2}(x)dx = \beta , \tag{10}$$

де інтервал $[y_1, y_2]$ буде шуканим інтервалом довіри. Добре відомо, що рівняння (10) має, взагалі кажучи, безліч розв'язків. Тому для побудови інтервалу необхідно накласти додаткові умови на y_1, y_2, які можуть бути, наприклад, такими

$$\int_{-\infty}^{y_1} f_{\hat{R}_{VaR}|\hat{s}<z_\alpha^2}(x)dx = \frac{1-\beta}{2}, \qquad \int_{y_2}^{\infty} f_{\hat{R}_{VaR}|\hat{s}<z_\alpha^2}(x)dx = \frac{1-\beta}{2} . \tag{11}$$

Задача (10)-(11) має єдиний розв'язок, який, як і у випадку оцінки *VaR* аналітичними методами знайти неможливо. Тут також в кожному окремому випадку потрібно використовувати спеціальні комп'ютерні програми.

3. Емпіричні результати.

Для емпіричного аналізу попередніх результатів виберемо акції трьох ($k=3$) українських підприємств: Райфайзен банк Аваль, Мотор Січ та Центренерго і розглянемо їхню поведінку за період часу з 01.12.2009 по 01.12.2011 (дані взято з сайту www.ufc-capital.com). На основі цих акцій побудуємо оптимальний портфель з найменшим рівнем *VaR* при рівні довіри 0.05, та порівняємо умовні та безумовні його характеристики.

Припустимо, що дохідності поводяться як нормально розподілені випадкові величини і розглянемо лише щомісячні дохідності, тобто обсяг вибірки історичних значень дохідності становить $n=24$ елементи. Використовуючи критерії Колмогорова та χ^2 Пірсона, перевіримо гіпотезу про нормальність розподілу. Результати тестів наведено в таблиці 1.

Таблиця 1.

p-значення критеріїв Колмогорова та χ^2 Пірсона для щомісячних дохідностей акцій трьох вибраних підприємств.

	p-значення Колмогорова	p-значення χ^2 Пірсона
Райфайзен банк Аваль	0.9668	0.3062
Центренерго	0.9439	0.3062
Мотор Січ	0.9297	0.3062

З таблиці 1 бачимо, що відхилити нульову гіпотезу при рівнях значущості, які використовують на практиці ми не можемо. Отже, вибрані нами дохідності мають поведінку близьку до нормальної. Оцінки параметрів розподілу мають вигляд

$$\hat{\boldsymbol{\mu}} = (-2.4441, 1.7806, -0.5518)' \text{ та } \hat{\boldsymbol{\Sigma}} = \begin{pmatrix} 216.8840 & 145.4734 & 171.1811 \\ 145.4734 & 228.3245 & 166.8481 \\ 171.1811 & 166.8481 & 195.6813 \end{pmatrix}.$$

Як зазначено вище, українському фондовому ринку притаманна висока волатильність. Це підтверджується оцінкою матриці коваріацій, а тому використовувати в даному випадку точкові оцінки дохідності для планування фінансової діяльності некоректно.

Підставляючи отримані оцінки у (2)-(5), отримаємо оцінки ваг портфеля з найменшим рівнем *VaR* складеного з цих акцій та його безумовні характеристики

$$\hat{\mathbf{w}}_{VaR} = (0.1008171, 0.530917, 0.3682659)',$$

$$\hat{R}_{VaR} = 0.4957083, \hat{V}_{VaR} = 186.6291, \hat{M}_{VaR} = 21.9087.$$

Бачимо, що такий портфель має високу дисперсію. Оцінка *VaR* цього портфеля при рівні довіри 0.05 також є досить великою. Але, як зазначалося вище, використовувати безумовні оцінки у випадку портфеля з найменшим рівнем *VaR* неправильно. Тому наступним кроком нашого дослідження є оцінка умовних характеристик портфеля.

Використовуючи отримані раніше оцінки параметрів розподілу дохідностей $\hat{\boldsymbol{\mu}}$ та $\hat{\boldsymbol{\Sigma}}$, обчислимо спочатку невідомі параметри, що входять в (7). Маємо

$\hat{R}_{GMV} = -0.468704$, $\hat{V}_{GMV} = 178.5955$, $\hat{s} = 0.1157756$, $z_{\alpha} = 1.64$ (при $\alpha = 0.05$).

На рис.1 зображено графік функції густини з оціненими параметрами. З цього рисунку бачимо, що густина не є симетричною. Тільки з вигляду графіку одержуємо, що оцінка умовної очікуваної дохідності портфеля є додатною, на відміну від безумовною.

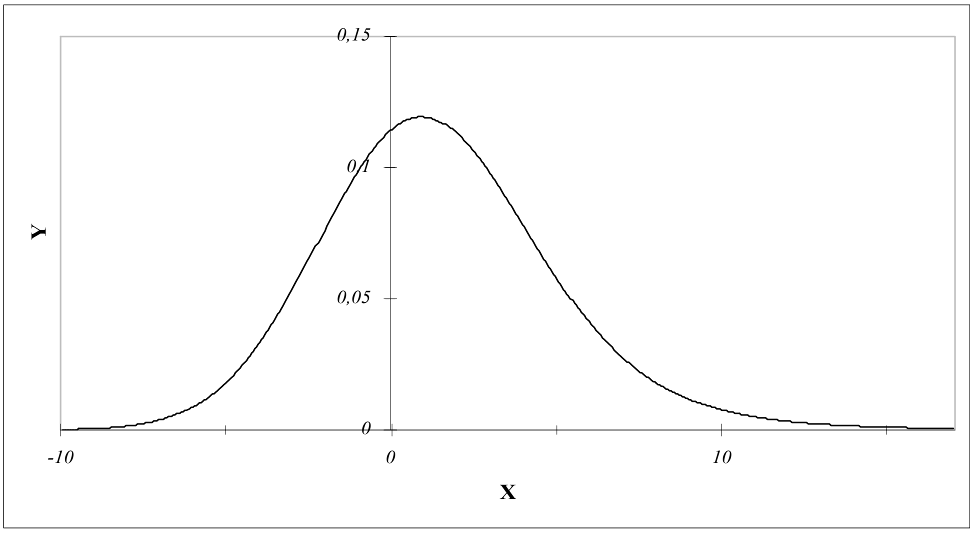

Рис. 1. Графік густини випадкової величини $\hat{R}_{VaR} \mid \hat{s} < z_{\alpha}^{2}$

Для підтвердження цього, обчислимо математичне сподівання $M(\hat{R}_{VaR} \mid \hat{s} < z_{\alpha}^{2})$, яке, приймемо за оцінку умовної дохідності. Використовуючи (8), отримаємо

$$\hat{R}_{VaR,cond} = M(\hat{R}_{VaR} \mid \hat{s} < z_{\alpha}^{2}) = 1.468962 .$$

Цей результат є підтвердженням того, що планувати поведінку портфеля лише на основі оцінки безумовної дохідності неправильно.

Знайдемо точку, в якій густина досягає свого максимального значення та порівняємо це значення з $M(\hat{R}_{VaR} \mid \hat{s} < z_{\alpha}^{2})$. Максимального значення густина досягає в точці 0.89195, яка лежить лівіше від математичного сподівання. Оскільки $\int_{-\infty}^{0.89195} f_{\hat{R}_{VaR}|\hat{s}<z_{\alpha}^{2}}(x)dx = 0.459073$, $\int_{-\infty}^{1.468962} f_{\hat{R}_{VaR}|\hat{s}<z_{\alpha}^{2}}(x)dx = 0.527545$ то імовірність, що очікувана дохідність портфеля набуде значення більшого від значення математичного сподівання становить 0.472455, а меншого за 0.89195 – становить 0.459073.

Для обчислення оцінки *VaR* очікуваної дохідності портфеля за виконання умови $\hat{s} < z_{\alpha}^{2}$ розв'яжемо інтегральне рівняння (9) методом золотого перетину. Точність обчислень задамо похибкою 0.000001. За такої точності отримаємо оцінку

$VaR_{\alpha}(\hat{R}_{VaR} \mid \hat{s} < z_{\alpha}^{2})$=3.886963.

Бачимо, що *VaR* умовної очікуваної дохідності портфеля істотно відрізняється від безумовної оцінки *VaR* портфеля. Хоча два цих показники є оцінками загалом різних параметрів, але настільки велика різниця між ними є досить неочікуваною. При плануванні лише дохідності портфеля, незважаючи на ризик, правильніше застосовувати оцінку $VaR_{\alpha}(\hat{R}_{VaR} \mid \hat{s} < z_{\alpha}^{2})$, оскільки вона точніше описує поведінку умовної очікуваної дохідності.

Завершити аналіз умовних властивостей портфеля бажано було б порівнянням умовної та безумовної дисперсій. В [7] показано, що дисперсія умовної очікуваної дохідності портфеля не існує. Але дисперсія є недосконалою характеристикою випадкової величини, якщо розподіл цієї величини є несиметричним. Така ситуація є і в нашому випадку. Тому порівнювати дисперсії немає жодного сенсу.

Для отримання цілісної картини про умовну дохідність портфеля з найменшим рівнем *VaR*, побудуємо 95% інтервал довіри для дохідності, розв'язавши задачу (10)-(11), яку перепишемо у вигляді

$$\int_{-\infty}^{y_1} f_{\hat{R}_{VaR}|\hat{s}<z_{\alpha}^{2}}(x)dx = 0.025 , \qquad \int_{y_2}^{\infty} f_{\hat{R}_{VaR}|\hat{s}<z_{\alpha}^{2}}(x)dx = 0.025 .$$

Ми знову використаємо метод золотого перерізу та задамо точність на рівні 0.000001. Отримаємо

y_1=*-4.847363* та y_2=*9.379395.*

Отже, з імовірністю 0.95, умовна очікувана дохідність для нашого портфеля попадатиме в інтервал [*-4.847363;9.379395*], який не є симетричним відносно точкової оцінки умовної очікуваної дохідності. Цей результат повністю відповідає попереднім спостереженням відносно несиметричності густини розподілу очікуваної дохідності.

4. Висновки.

Проведене дослідження стосується порівнянню безумовних та умовних характеристик портфеля цінних паперів з найменшим рівнем *VaR*. Як показано в [6], використовувати безумовні оцінки при плануванні фінансової діяльності інвестора є неправильно, оскільки ваги портфеля є коректно визначеними лише за виконання умови $\hat{s} < z_{\alpha}^{2}$. Отже, планування діяльності інвестора, який використовує критерій найменшого *VaR* при побудові портфеля, повинно опиратися на його умовні характеристики.

На основі емпіричного дослідження характеристик портфеля з найменшим рівнем *VaR* складеного з акцій трьох українських компаній показано, що умовні характеристики портфеля істотно відрізняються від безумовних. Для вибраного нами портфеля спостерігалося істотне покращення характеристик при переході від безумовних до умовних. Це призводить, у випадку планування діяльності на основі безумовних характеристик, до сильної переоцінки ризиків. З допомогою емпіричних даних показано, що розподіл очікуваної дохідності портфеля є несиметричним. З цього результату випливає, що точка x_0, в якій густина приймає максимальне значення не співпадає з математичним сподівання, а лежить лівіше. Отже, імовірність отримати дохідність портфеля більшою від x_0 становить 0.540927, а більшою за нуль – становить 0.64595.

Таким чином, нехтування умовою $\hat{s} < z_{\alpha}^{2}$ при аналізі портфеля цінних паперів з найменшим рівнем *VaR* призводить до істотної втрати точності отриманих результатів.

---

1. Basel Committee on Banking Supervision // Operational Risk Consultative Document, Supporting document to the New Basel Capital Accord. – January 2001. – 30 p.
2. Jorion P. Value at Risk: the new benchmark for managing financial risk – New York: McGraw-Hill Professional, 2002. – 544 p.
3. Duffie D., Pan J. An overview of Value-at-Risk // Journal of Derivatives. – 1997. – p. 7-49.
4. Alexander G. J., Baptista M. A. Economic implication of using a mean-VaR model for portfolio selection: A comparison with mean-variance analysis. – Journal of Economic Dynamics & Control. – 2002. – №26. – p. 1159-1193.
5. Markowitz H. Portfolio selection // Journal of Finance. – 1952. №7. – p. 77-91.
6. Заболоцький Т.М. Оцінка ваг валютного портфелю з найменшим рівнем VaR // Вісник НБУ. – 2011. – №8. – С. 31-33.
7. Заболоцький Т.М. Розподіл характеристик портфелю акцій з найменшим рівнем VaR // Моделювання та інформаційні системи в економіці. – 2011. – №???. – С. ??-??.
8. Fama E.F. Foundations of finance // New York: Basic Books. – 1976.
9. Markowitz H. Foundations of portfolio theory // The Journal of Finance. – 1991. №7. – p. 469-477.
10. Mittnik S., Rachev S.T. Modelling asset returns with alternative stable distributions // Econometric Reviews. – 1993. №12. – p. 261-330.
11. Джонсон Н., Лион Ф.Статистика и планирование эксперимента в науке и технике.-М.: Мир, 1980.

PLANNING OF MINIMUM VAR ASSETS PORTFOLIO RETURNS

T. Zabolotskyy

Lviv banking institute of University of Banking of the National Bank of Ukraine
9, Shevchenka St., Lviv 79009
E-mail: zjabka@yahoo.com

In the paper the properties of conditional expected return of minimum VaR assets portfolio are investigated for the portfolio constructed with assets of three Ukrainian companies. It is shown that conditional density of return estimate is asymmetric and conditional return estimate differ significantly from unconditional estimate.

Key words: asset returns, minimum VaR portfolio, conditional expected return.

ПЛАНИРОВАНИЕ ДОХОДНОСТИ ПОРТФЕЛЯ ЦЕННЫХ БУМАГ С НАИМЕНЬШИМ УРОВНЕМ VAR

Т. Заболоцький

Львовский институт банковского дела Университета банковского дела
Национального банка Украины
79000 г. Львов, проспект Шевченко 9
E-mail: zjabka@yahoo.com

В роботе исследовано свойства условной ожидаемой доходности портфеля ценных бумаг с наименьшим уровнем VaR на примере портфеля сформированного из акций трёх украинских предприятий. Показано что условная плотность оценки доходности несимметрическая, а условная оценка доходности существенно отличается от безусловной.

Ключевые слова: доходность акции, портфель с наименьшим уровнем VaR, условная ожидаемая доходность.