ISSN 2078-6115. Вісник Львівського університету. Серія економічна. 2013. Випуск 49. С. 46-53
Visnyk of the Lviv University. Series Economics. 2013. Issue 49. P. 46-53

УДК 330.42

ЕКОНОМІКО-МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ ПОВЕДІНКИ ВИРОБНИКА З УРАХУВАННЯМ РИНКОВИХ МЕХАНІЗМІВ САМООРГАНІЗАЦІЇ

Л. Зомчак, І.Мацура

Львівський національний університет імені Івана Франка
79008, м. Львів, проспект Свободи, 18

У статті запропоновано економіко-математичну подель поведінки виробника, яка складається із системи диференціальних рівнянь, що описують динаміку обігових коштів виробника продукції та динаміку ринкової ціни цієї продукції. Модель реалізовано на практичних даних та досліджено результати на стійкість.
Ключові слова: стійкість системи, самоорганізація системи, фазовий портрет.

Поведінка виробника значною мірою визначається ринковою структурою, на якій він пропонує свій товар. Однією з характерних ознак ринкової економіки вважають наявність конкуренції, тому дослідження конкурентних процесів та встановлення рівноважної ціни на ринку є однією із ключових проблем економічної теорії та практики. Попри значне зацікавлення науковців, все ж залишаються актуальними дослідження механізмів встановлення рівноважної ціни на ринках, зокрема, під впливом самоорганізаційних процесів.

Розглянемо конкурентний ринок як сильно нерівноважну відкриту систему. Складність такої системи та обмеженість у застосуванні аналітичних методів при її дослідженні дозволяє перейти до числових моделей. Як результат конкуренції можна розглядати процес самоорганізації складних систем, який полягає у спонтанному утворенні впорядкованих структур.

Нині накопичено чималий досвід вивчення економічних систем з позиції теорії нерівноважних систем. Фундаментальними є праці відомих зарубіжних учених, зокрема в економіці: Г. Хакена, І.Р. Пригожина, С.П. Курдюмова, Г.Г. Малинецького, О.П. Руденко, Є.Г.Пугачова, К.Н. Солов'єнко, а також вітчизняних учених, зокрема В.М. Соловйова [1], Л.Н. Сєргєєвої [2], Г.С. Ліхоносової [3, 4], та А.В. Бакурової [5] та інші.

Розглянемо математичну модель поведінки виробника з урахуванням ринкових механізмів самоорганізації економічними методами. За основу візьмемо модель запропоновану у працях Д.С. Чернавского зі співавторами [6, 7]. Нехай фірма виготовляє однорідну продукцію, ціна якої встановлюється як рівноважна на основі балансу попиту та пропозиції. Нехай N - кількість споживачів продукції, S - доходи споживачів, τ - тривалість виробничого циклу, $\widetilde{p}$ - собівартість продукту, δ - частка оборотних засобів, яка йде на покриття змінних витрат, κ – постійні витрати, які не залежать від кількості виготовленої продукції, $Q\left(\frac{S}{p}\right)$ - функція попиту, що залежить від відношення доходу S до ціни p.

Тоді рівняння динаміки оборотних коштів підприємства M можна записати в вигляді:

$$\frac{dM}{dt} = -\frac{M\delta}{\tau} + NQ\left(\frac{S}{p}\right)\cdot p - \kappa = -\frac{M\delta}{\tau} + Nq\left(1 - \frac{p}{p_{cr}}\right)\cdot p - \kappa \qquad (1)$$

А рівняння зміни ринкової ціни p у часі представлене формулою (2), як різниця попиту та пропозиції на товар, тобто динаміка ціни залежить від надлишкового попиту чи пропозиції:

$$\frac{dp}{dt} = \gamma\left\{-\frac{M\delta}{\tau\widetilde{p}} + Nq\left(1 - \frac{p}{p_{cr}}\right)\right\} \qquad (2)$$

Реалізуємо модель (1)-(2) на реальних даних, отриманих із фінансової звітності кондитерської фабрики «Світоч».

У результаті модель має вигляд:

$$\begin{cases} \dfrac{dM}{dt} = -3M + 12\left(1 - \dfrac{p}{6}\right)p - 4 \\ \dfrac{dp}{dt} = 3{,}5\left(-M + 12\left(1 - \dfrac{p}{6}\right)\right) \end{cases} \qquad (3)$$

Дослідимо систему (3) на стійкість [8, 9]. Прирівнявши праву частину системи до нуля, знайдемо її стаціонарні точки:

$$\begin{cases} -3M + 12\left(1 - \dfrac{p}{6}\right)p - 4 = 0 \\ 3{,}5\left(-M + 12\left(1 - \dfrac{p}{6}\right)\right) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -3M + 12p - 2p^2 - 4 = 0 \\ -M + 12 - 2p = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} -3M + 12p - 2p^2 - 4 = 0 \\ M + 2p = 12 \end{cases}$$

З другого рівняння системи визначимо M.

$$M = 12 - 2p$$

Підставимо в перше рівняння системи.

$$-3(12 - 2p) + 12p - 2p^2 - 4 = 0$$

$$-36 + 6p + 12p - 2p^2 - 4 = 0$$

У результаті отримаємо квадратне рівняння, яке розв'яжемо шляхом знаходження дискримінанту.

$$-2p^2 + 18p - 40 = 0$$

$$D = 324 - 4\cdot(-2)\cdot(-40) = 324 - 320 = 4$$

$$p_1 = \frac{-18 + 2}{2\cdot(-2)} = \frac{-16}{-4} = 4 \qquad p_2 = \frac{-18 - 2}{2\cdot(-2)} = \frac{-20}{-4} = 5$$

$$M_1 = 12 - 8 = 4 \qquad M_2 = 12 - 10 = 2$$

Розв'язком системи є дві стаціонарні точки з координатами т. А (4;4) і т. Б(2;5).

Для того, щоб дослідити поведінку системи в околі стаціонарних точок, необхідно вивчити її поведінку при малих зміщеннях в околі цих точок. Це реалізовують через лінеаризацію системи в околі особливих точок. Знайдемо часткові похідні $f'_M = -3;\ f'_p = 12 - 4p;\ g'_M = -3{,}5;\ g'_p = -7.$

Побудуємо фазовий портрет для стаціонарної точки А (4;4) . Оскільки $f'_p = 12 - 4p;$ залежить від p, то для двох точок воно буде різне. Для першої точки $f'_p = -4.$

Характеристичне рівняння має вигляд:

$$\begin{vmatrix} -3-\lambda & -4 \\ -3{,}5 & -7-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$(-3-\lambda)\cdot(-7-\lambda) - (-3{,}5)\cdot(-4) = 0$$

$$\lambda^2 + 10\lambda + 21 - 14 = 0$$

$$\lambda^2 + 10\lambda + 7 = 0$$

$$D = 100 - 28 = 72 \qquad \sqrt{D} = 6\sqrt{2}$$

Корені характеристичного рівняння такі:

$$\lambda_1 = \frac{-10 + 6\sqrt{2}}{2} = -5 + 3\sqrt{2} \quad \lambda_2 = \frac{-10 - 6\sqrt{2}}{2} = -5 - 3\sqrt{2}$$

Класифікація особливих точок системи залежить від того, яких значень набувають корені характеристичного рівняння. Оскільки, $\lambda_1, \lambda_2 < 0$ для точки А (4;4), то це стійкий вузол.

Знайдемо власний вектор, що відповідає $\lambda_1 = -5 + 3\sqrt{2}$. Підставивши в систему

$$\begin{cases} (-3-\lambda)a_1 - 4b_1 = 0 \\ -3{,}5a_1 + (-7-\lambda)b_1 = 0 \end{cases} \text{одержимо} \begin{cases} (2 - 3\sqrt{2})a_1 - 4b_1 = 0 \\ -3{,}5a_1 + (-2 - 3\sqrt{2})b_1 = 0 \end{cases}$$

$$b_1 = \frac{2 - 3\sqrt{2}}{4} a_1$$

Нехай $a_1 = 4$, то $b_1 = 2 - 3\sqrt{2}$.

Знайдемо власний вектор, що відповідає $\lambda_2 = -5 - 3\sqrt{2}$. Підставивши в систему, одержимо

$$\begin{cases} (2 + 3\sqrt{2})a_1 - 4b_1 = 0 \\ -3{,}5a_1 + (-2 + 3\sqrt{2})b_1 = 0 \end{cases}$$

$$b_2 = \frac{2 + 3\sqrt{2}}{4} a_2$$

Нехай $a_2 = 4$, то $b_2 = 2 + 3\sqrt{2}$.

Таким чином, одержимо розв’язок системи у вигляді:

$$\begin{pmatrix} M \\ p \end{pmatrix} = c_1 e^{\left(-5+3\sqrt{2}\right)t} \begin{pmatrix} 4 \\ 2 - 3\sqrt{2} \end{pmatrix} + c_2 e^{\left(-5-3\sqrt{2}\right)t} \begin{pmatrix} 4 \\ 2 + 3\sqrt{2} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 4e^{\left(-5+3\sqrt{2}\right)t} & 4e^{\left(-5-3\sqrt{2}\right)t} \\ \left(2 - 3\sqrt{2}\right)e^{\left(-5+3\sqrt{2}\right)t} & \left(2 + 3\sqrt{2}\right)e^{\left(-5-3\sqrt{2}\right)t} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} M = 4c_1 e^{\left(-5+3\sqrt{2}\right)t} + 4c_2 e^{\left(-5-3\sqrt{2}\right)t} \\ p = \left(2-3\sqrt{2}\right)c_1 e^{\left(-5+3\sqrt{2}\right)t} + \left(2+3\sqrt{2}\right)c_2 e^{\left(-5-3\sqrt{2}\right)t} \end{cases}$$

Оберемо для побудови траєкторії чотири різних набори констант (c_1, c_2), наприклад,

$(c_1 = 3, c_2 = 3)$, $(c_1 = -3, c_2 = -3)$, $(c_1 = -3, c_2 = 3)$, $(c_1 = 3, c_2 = -3)$.

Кожен з наборів (c_1, c_2) визначає траєкторію. Для побудови характеру фазового портрету досить чотирьох наборів. Для кожного з наборів (c_1, c_2) будемо змінювати час і розраховувати знаення *M* і *p*. Дані точки нанесемо на графік (рис. 1).

Координати точок відповідних фазових траєкторій подано у табл. 1.

Таблиця 1

Координати точок фазових траєкторій

T	*M(t,3,3)*	*p(t,3,3)*	*M(t,-3,-3)*	*p(t,-3,-3)*	*M(t,3,-3)*	*p(t,3,-3)*	*M(t,-3,3)*	*p(t,-3,3)*
0	24	12	-24	-12	0	-25,45	0	25,45
0,05	19,11	5,31	-19,11	-5,31	3,99	-18,27	-3,99	18,27
0,1	15,89	1,19	-15,88	-1,19	6,36	-13,66	-6,36	13,66
0,15	13,71	-1,32	-13,71	1,32	7,71	-10,68	-7,71	10,68
0,2	12,20	-2,83	-12,20	2,83	8,42	-8,73	-8,42	8,73
0,25	11,12	-3,70	-11,12	3,70	8,73	-7,42	-8,73	7,42
0,3	10,31	-4,19	-10,31	4,19	8,81	-6,53	-8,81	6,53
0,35	9,67	-4,42	-9,67	4,42	8,73	-5,89	-8,73	5,89
0,4	9,16	-4,50	-9,16	4,50	8,56	-5,43	-8,56	5,43
0,45	8,72	-4,49	-8,72	4,49	8,34	-5,07	-8,34	5,07
0,5	8,33	-4,42	-8,33	4,42	8,09	-4,79	-8,09	4,79
1	5,62	-3,15	-5,62	3,15	5,62	-3,15	-5,6	3,15
2	2,63	-1,47	-2,63	1,47	2,63	-1,47	-2,63	1,47
3	1,23	-0,69	-1,23	0,69	1,23	-0,69	-1,23	0,69

Побудуємо фазовий портрет для стаціонарної точки. Б(2;5), для якої $f'_p = -8$.

Характеристичне рівняння має вигляд:

$$\begin{vmatrix} -3-\lambda & -8 \\ -3{,}5 & -7-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$(-3-\lambda)\cdot(-7-\lambda) - (-3{,}5)\cdot(-8) = 0$$

$$\lambda^2 + 10\lambda + 21 - 28 = 0$$

$$\lambda^2 + 10\lambda - 7 = 0$$

$$D = 100 + 28 = 128 \qquad \sqrt{D} = 8\sqrt{2}$$

Корені характеристичного рівняння такі:

$$\lambda_1 = \frac{-10+8\sqrt{2}}{2} = -5+4\sqrt{2} \qquad \lambda_1 = \frac{-10-8\sqrt{2}}{2} = -5-4\sqrt{2}$$

Оскільки, $\lambda_1 > 0, \lambda_2 < 0$ - сідло.

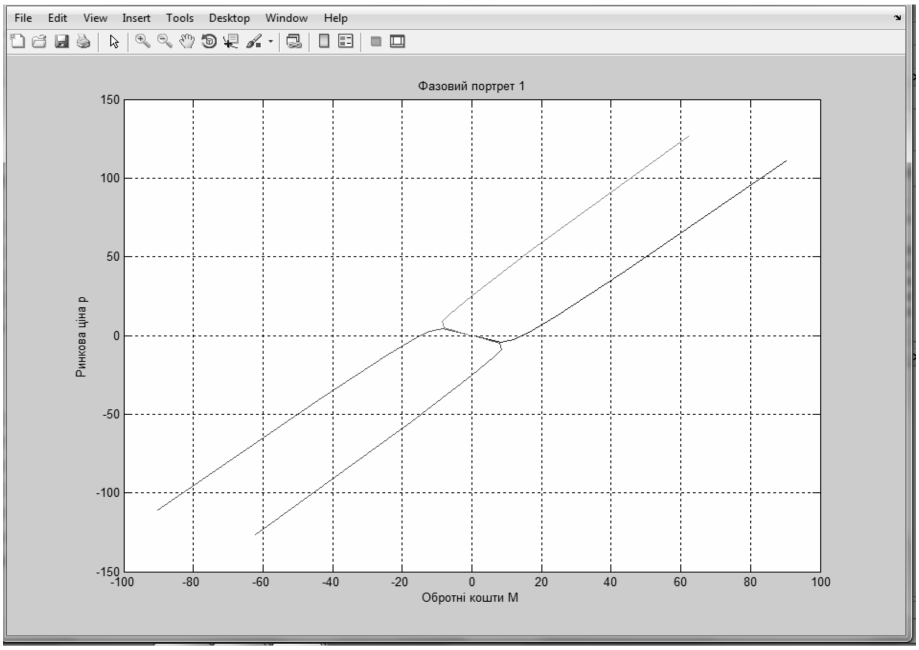

Рис. 1. Фазовий портрет 1 – стійкий вузол

Знайдемо власний вектор, що відповідає $\lambda_1 = -5 + 4\sqrt{2}$. Підставивши в систему $\begin{cases}(-3-\lambda)a_1 - 8b_1 = 0\\ -3{,}5a_1 + (-7-\lambda)b_1 = 0\end{cases}$ одержимо $\begin{cases}(2-4\sqrt{2})a_1 - 8b_1 = 0\\ -3{,}5a_1 + (-2-4\sqrt{2})b_1 = 0\end{cases}$

$$b_1 = \frac{1-2\sqrt{2}}{4}a_1$$

Нехай $a_1 = 4$, то $b_1 = 1 - 2\sqrt{2}$.

Знайдемо власний вектор, що відповідає $\lambda_2 = -5 - 3 = 4\sqrt{2}$. Підставивши в систему , одержимо

$$\begin{cases}(2+4\sqrt{2})a_1 - 8b_1 = 0\\ -3{,}5a_1 + (-2+4\sqrt{2})b_1 = 0\end{cases} \qquad b_2 = \frac{1+3\sqrt{2}}{4}a_2$$

Нехай $a_2 = 4$, то $b_2 = 1 + 2\sqrt{2}$.

Таким чином, одержимо розв'язок системи у вигляді:

$$\begin{pmatrix} M \\ p \end{pmatrix} = c_1 e^{\left(-5+4\sqrt{2}\right)t}\begin{pmatrix} 4 \\ 1-2\sqrt{2} \end{pmatrix} + c_2 e^{\left(-5-4\sqrt{2}\right)t}\begin{pmatrix} 4 \\ 1+2\sqrt{2} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 4e^{\left(-5+4\sqrt{2}\right)t} & 4e^{\left(-5-4\sqrt{2}\right)t} \\ \left(1-2\sqrt{2}\right)e^{\left(-5+4\sqrt{2}\right)t} & \left(1+4\sqrt{2}\right)e^{\left(-5-4\sqrt{2}\right)t} \end{bmatrix}\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} M = 4c_1 e^{\left(-5+4\sqrt{2}\right)t} + 4c_2 e^{\left(-5-4\sqrt{2}\right)t} \\ p = \left(1-4\sqrt{2}\right)c_1 e^{\left(-5+4\sqrt{2}\right)t} + \left(1+4\sqrt{2}\right)c_2 e^{\left(-5-4\sqrt{2}\right)t} \end{cases}$$

Оберемо для побудови траєкторії чотири різних набори констант $(c_1 = 3, c_2 = 3)$, $(c_1 = -3, c_2 = -3)$, $(c_1 = -3, c_2 = 3)$, $(c_1 = 3, c_2 = -3)$. Для кожного з наборів (c_1, c_2) будемо змінювати час і розраховувати знаення M і p. Дані точки нанесемо на графік (рис. 2).

Координати точок відповідних фазових траєкторій подано у табл.2.

Таблиця 2

Координати точок фазових траєкторій

T	M(t,3,3)	p(t,3,3)	M(t,-3,-3)	p(t,-3,-3)	M(t,3,-3)	p(t,3,-3)	M(t,-3,3)	p(t,-3,3)
0	24	6	-24	-6	0	-33,94	0	33,94
0,05	19,44	-2,71	-19,44	2,71	5,35	-26,15	-5,35	26,15
0,1	16,94	-8,03	-16,94	8,03	8,68	-21,79	-8,68	21,79
0,15	15,66	-11,37	-15,66	11,37	10,81	-19,45	-10,81	19,45
0,2	15,10	-13,56	-15,10	13,56	12,260	-18,30	-12,26	18,30
0,25	14,97	-15,07	-14,97	15,07	13,30	-17,85	-13,30	17,85
0,3	15,10	-16,19	-15,10	16,19	14,12	-17,82	-14,12	17,82
0,5	16,72	-19,30	-16,72	19,30	16,60	-19,49	-16,60	19,49
0,6	17,81	-20,68	-17,81	20,68	17,77	-20,75	-17,77	20,75
0,8	20,29	-23,62	-20,29	23,62	20,29	-23,63	-20,29	23,63
1	23,14	-26,94	-23,14	26,94	23,14	-26,94	-23,14	26,94
2	44,63	-51,96	-44,63	51,96	44,63	-51,96	-44,63	51,96
3	86,09	-100,23	-86,09	100,23	86,09	-100,23	-86,09	100,23

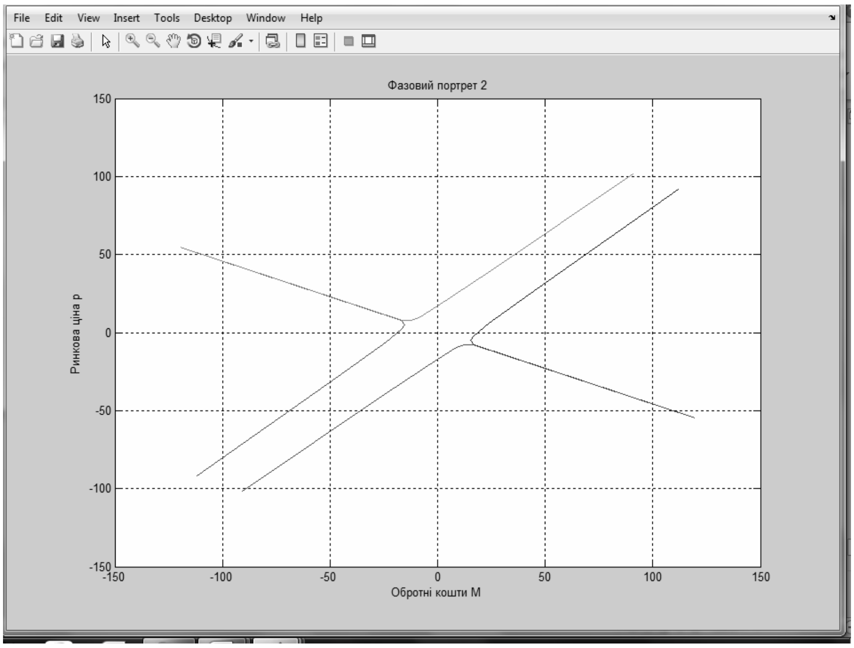

Рис. 2. Фазовий портрет 2 - сідло

Згідно отриманих даних, обчислених за допомогою пакету прикладних програм MatLAB, можна зробити висновки: точка А (4;4) означає, що при ринковій ціні 4 грн фірма отримає зростання оборотних коштів у розмірі 4 тис. грн. Тип поведінки підприємства в околі цієї точки стійкий вузол, що означає що всі фазової траєкторії сходяться в тій точці; точка Б (2;5) означає, що при ринковій ціні 5 грн фірма отримає зростання оборотних коштів у розмірі 2 тис. грн, що є меншим, ніж у попередньому випадку.

---

1. Соловйов В.М. Моделювання складних економічних систем: навчальний посібник / В.М. Соловйов, В.В. Соловйова, Н.А.Хараджян. – Кривий Ріг: Видавничий відділ НМетАУ, 2010. – 119 с.
2. Сергєєва Л.Н. Моделювання структури життєздатних соціально-економічних систем: монографія / [Л.Н. Сергєєва, А.В. Бакурова, В.В. Воронцов, С.О. Зульфугарова]. – Запоріжжя: Вид-во КПУ, 2009. – 256 с. – (Серія : Життєздатні системи в економіці).
3. Ліхоносова Г.С. Організаційно-економічні складові самоорганізації підприємства / Г.С. Ліхоносова // Економіка: проблеми теорії та практики. Зб. наук. праць Дніпропетровського національного університету. Вип. 260. Т. IV. – Дніпропетровськ: ДНУ, 2010. – С. 97-102.
4. Калінеску Т.В. Самоорганізація підприємства: тенденції соціальної економіки: монографія / Т.В. Калінеску, Г.С. Ліхоносова, Г.О. Надьон, С.П. Кілінкаров. – Луганськ: вид-во СНУ ім. В. Даля, 2012. – 396 с.
5. Бакурова А.В. Концепція моделювання самоорганізації соціально-економічних систем / А.В. Бакурова // Держава та регіони. Серія: Економіка та підприємництво, 2010. – № 2. – С. 21-28.
6. Чернавский Д.С. Модель конкуренции /Д.С. Чернавский, А.В. Щербаков, М.-Г. М. Зульпукаров. – М.: Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша , 2006. – 22 с. – (Препринт № 64/ Российская академия наук, Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша).
7. Чернавский Д.С. Математическая модель деятельности малого инновационного предприятия. Случай одного продукта. Феномен «скрытого банкротства» [Електронний ресурс]/ Д.С. Чернавский, А.В. Щербаков, С.А. Соловьев, С.В. Зайцев// Электронный журнал «Исследовано в России». – 2002.– С. 87-95. – Режим доступу до журн.: http://zhurnal.ape.relarn.ru/articles/2002/006.pdf
8. Ali H. Applied Nonlinear Dynamics: Analytical, Computational, and Experimental Methods (Wiley Series in Nonlinear Science) /Ali H. Nayfeh, Balakumar Balachandran. – NY, Wiley-Interscience. - 2008. - 700 p.
9. Bischi, G.I. Nonlinear Oligopolies: Stability and Bifurcations / Bischi, G.I.; Chiarella, C.; Kopel, M.; Szidarovszky, F.. – Berlin: Springer, 2009. – 334 p.

THE ECONOMIC-MATHEMATICAL MODEL OF PRODUCERS BEHAVIOR AT MARKET WITH SELF-ORGANIZATION MECHANISMS

L. Zomchak, I.Matsura

Ivan Franko National University of L'viv, Svoboda Av., 18 UA – 79008 L'viv, Ukraine

The economic-mathematical model of producers behavior, which consists of a system of differential equations, describing the dynamics of working capital and dynamics of the market price of the product is proposed in the article. The model is implemented on practical data and the results are analyzed for the stability.

Keywords: system stability, system self-organization, phase portrait.

ЕКОНОМІКО-МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ ПОВЕДІНКИ ВИРОБНИКА З УРАХУВАННЯМ РИНКОВИХ МЕХАНІЗМІВ САМООРГАНІЗАЦІЇ

Л. Зомчак, І.Мацура

Львівський національний університет імені Івана Франка
79008, м. Львів, проспект Свободи, 18

У статті запропоновано економіко-математичну подель поведінки виробника, яка складається із системи диференціальних рівнянь, що описують динаміку обігових коштів виробника продукції та динаміку ринкової ціни цієї продукції. Модель реалізовано на практичних даних та досліджено результати на стійкість.

Ключові слова: стійкість системи, самоорганізація системи, фазовий портрет.