ISSN 2078-6115. Вісник Львівського університету. Серія економічна. 2013. Випуск 50. С. 58-65
Visnyk of the Lviv University. Series Economics. 2013. Issue 50. P. 58-65

УДК 339.1

МОДЕЛЮВАННЯ РИНКОВИХ ВІДНОСИН З НЕЧІТКИМИ ПАРАМЕТРАМИ

Р. Вовк

Львівський національний університет імені Івана Франка
79000, м. Львів, вул. Січових Стрільців, 19

У статті розглядається модель ринку, побудована за допомогою теорії нечітких коаліційних ігор. Описано методи обчислення характеристичної функції нечіткої ринкової гри з врахуванням нечітких цін та нечіткої функції корисності. Запропоновано методи знаходження стану рівноваги ринку в нечітких умовах.
Ключові слова: нечітка ринкова гра, функція корисності, ринкова рівновага.

До ключових чинників, що впливають на сучасну економіку та є центральними в процесах ціноутворення, належать конкуренція та кооперація серед учасників ринкових відносин. Конкурентні стосунки є визначальними насамперед в ринках з досконалою конкуренцією. До таких ринків відносять ті, на яких зосереджено достатньо багато продавців, що функціонують незалежно один від одного, і кожний з них не може самостійно впливати на ціну та суттєво змінювати об’єм пропозиції. На досконало конкурентному ринку товари однаково типу та ціни мають рівні якісні показники, а виробники можуть без жодних перешкод змінювати вид продукції, що тут реалізовуватиметься. Водночас такий ринок допускає існування тільки цінової конкуренції.

Недосконало конкурентний ринок передбачає можливість як конкуренції, так і кооперативної взаємодії, існування монополії на певні види товарів чи олігопольних зв’язків між окремими фірмами. Учасники такого ринку можуть впливати на ціну товарів, утворювати публічні чи таємні об’єднання, які здатні змінювати пропозицію та регулювати попит, розділяти ринок на частини, на яких вони не будуть конкурувати між собою. Суттєво впливають на відносини також процеси ліцензування та патентування техніки або технологій, що можуть утруднювати окремим учасникам вихід на ринок [1]. Нерідко вагомим чинником виступає можливість доступу до сировини стратегічного характеру чи обмежених ресурсів.

Вагомий вплив на прийняття рішень у ринкових відносинах має доступ до достатніх об’ємів достовірної інформацій про товари та послуги на ринку, його учасників, їх стратегії та вподобання, вплив зовнішнього середовища.

Реальні соціально-економічні процеси як в локальному так і глобальному вимірі нечасто задовольняють вимогам досконалого ринку. Інформація, яку використовують його учасники у своїй діяльності, здебільшого носить розмитий характер і часто не може застосовуватися класичними методами аналізу та прогнозування.

З огляду на це, для дослідження ринкових відносин видається доцільним використовувати методи коаліційних ігор, що дають змогу моделювати як одноосібну діяльність гравців так і в кооперації з іншими відповідно до їх потреб та завдань. З метою наближення побудованих моделей до реальних ситуацій пропонується використовувати інструментарій нечітких множин та відношень.

Наведемо основні поняття з теорії нечітких чисел, які використовуватимемо в статті. Нечітким числом називають будь-яку нечітку підмножину дійсних чисел $a \subset R$, $a \in \mathcal{F}(R)$ з характеристичною функцією $\mu_a(R) \to [0,1]$, для якої виконуються умови:

— існує число $r_0 \in R$ таке що $\mu_a(r_0) = 1$, яке називають модальним значенням нечіткого числа a;

— носій характеристичної функції μ_a є обмеженим.

Для будь-яких нечітких чисел $a, b \in \mathcal{F}(R)$ з відповідними характеристичними функціями μ_a, μ_b їх сума $a \oplus b$ є нечітким числом з характеристичною функцією $\mu_{a\oplus b} : R \to [0,1]$, що задається правилом

$$\mu_{a\oplus b}(r) = \sup_{s\in \mathbb{R}}\left(\min\left(\mu_a(s), \mu_b(r-s)\right)\right)$$

для будь-якого $r \in R$.

Якщо $r \in R$ і $a \in \mathcal{F}(R)$, то добуток $r \cdot a \in \mathcal{F}(R)$, а характеристична функція $\mu_{r\cdot a} : R \to [0,1]$ така, що для будь-якого $s \in R$ справджується

$\mu_{r\cdot a}(s) = \mu_a(s/r)$, якщо $r \neq 0$;

$\mu_{0\cdot a}(s) = 0$, якщо $s \neq 0$;

$\mu_{0\cdot a}(0) = 1$.

З властивостями та прикладами застосування визначених так суми та добутку можна ознайомитися в працях [2, 4]. Для представлення оптимізаційних моделей, що описують ринкову рівновагу в умовах неповної інформації, доцільно використовувати також нечітке відношення порядку $\succeq$, визначене на множині $\mathcal{F}(R)\times\mathcal{F}(R)$ з характеристичною функцією $v_{\succeq}$, яка задається для кожної пари нечітких чисел a та b з характеристичними функціями μ_a і μ_b відповідно за формулою

$$v_{\succeq}(a,b) = \sup\left(\min\left(\mu_a(r), \mu_b(s)\right) \mid r, s \in R, r \geq s\right).$$

Дане значення описує міру впевненості в тому, що $a \succeq b$.

Кооперативні ігри не дають змоги повністю описати структуру ринку, однак достатньо ефективно можуть використовуватися для моделювання деякий ринкових процесів чи компонентів ринку.

Розглянемо множину гравців $I = \{1, 2, ..., n\}$. Будь-яка підмножина $S \subset I$ утворює коаліцію. Множину всіх коаліцій позначимо $\mathbf{K}$. Відображення $v : \mathbf{K} \to R$, при якому $v(\varnothing) = 0$, називають характеристичною функцією коаліційної гри. Для кожної коаліції $K \in \mathbf{K}$ величина $v(K)$ дорівнює виграшу, який ця коаліція отримує в результаті гри. Пара (I, v) описує кооперативну гру з трансферабельною корисністю [5].

Вважатимемо, що гра (I, v) є суперадитивною, тобто для будь-яких коаліцій $K, L \subset I$ справджується нерівність

$$v(K \cup L) \geq v(K) + v(L) .$$

Кооперативна гра передбачає розділення виграшу кожної коаліції поміж усіма її учасниками, що відображається у вигляді вектора $r_K = (r_i)_{i\in K}$. Як результат гри слід вважати вектор $r = (r_i)_{i\in I}$, який називають розподілом. Будь-який розподіл називають допустимим, якщо $\sum_{i\in I} r_i \le v(I)$.

Множину *C* всіх допустимих розподілів, де

$$C = \left\{ r \in R^n \middle| \sum_{i\in I} r_i \le v(I), \forall K \in \mathbf{K}, \sum_{i\in \mathrm{K}} r_i \ge v(K) \right\},$$

називають ядром гри (I, v) [4].

Розглянемо ринкову ситуацію, учасниками якої є гравці з множини *I*, де існує *m* видів товарів, які певним чином розподілені між гравцями. Позначимо x_j^i – кількість товарів *j*-го виду, що перебуває у власності *i*-го гравця (*j*=1,…,*m*). Вважатимемо, що $x_j^i \ge 0$ для будь-яких *i* та *j*. Значення x_j^i утворюють матрицю розподілу, стовпці якої $x^i = (x_j^i)$ відображають структуру товарних запасів *i*-го гравця. Початковий розподіл запасів товарів серед гравців задано матрицею *A*, з елементами a_j^i, що відповідають кількості товарів *j*-го виду, що належить *i*-му гравцеві у початковий момент часу. Будь-яку матрицю *X*, яка задовольняє умові $\sum_{i\in I} x_j^i \le \sum_{i\in I} a_j^i$, називають матрицею розподілу початкових запасів *A*. Множину всіх таких матриць позначимо $\mathbf{X}$,

$$\mathbf{X} = \left\{ X = (x_j^i) \mid i \in I, j = 1,...,m \,, \sum_{i\in I} x_j^i \le \sum_{i\in I} a_j^i \right\}.$$

Усі можливі перерозподіли товарних запасів в середині коаліції $K \subset I$ утворюють множину

$$\mathbf{X}^K = \left\{ X \in \mathbf{X} \mid \sum_{i\in K} x_j^i \le \sum_{i\in I} a_j^i, j = 1,...,m \right\}.$$

Вважатимемо, що $\mathbf{X}^{\varnothing} = \mathbf{X}$. Очевидно, що $\mathbf{X}^I = \mathbf{X}$, тоді як для одноелементної коаліції $\{i\}$ отримаємо

$$\mathbf{X}^{\{i\}} = \left\{ X \in \mathbf{X} \,\middle|\, x_j^i \le a_j^i, j = 1,...,m \right\}.$$

Для кожного гравця $i \in I$ визначена функція корисності $u_i : \mathbf{X} \to R$, яка залежить від вектора x^i так, що для будь-яких $X, Y \in \mathbf{X}$ рівність $u_i(X) = u_i(Y)$ виконується тоді, коли $x^i = y^i$. Ця функція корисності повинна бути неспадною та ввігнутою. Вимагатимемо також, що коли $x_j^i = 0$ для будь-яких $j = 1,...,m$, то $u_i(X) = 0$.

Використовуючи наведені позначення, вільним ринком назвемо сукупність $\mathbf{M} = \left\{ I, m, A, (u_i)_{i\in I} \right\}$.

Торгівля товарами на ринку безпосередньо залежить від їх ціни, попиту та пропозиції, відносин між учасниками ринку. Ціну на товари позначимо у вигляді вектора $p = (p_1, p_2, ..., p_m)$, де кожний елемент $p_j \ge 0$ відповідає ціні на *j*-й товар.

Множину всіх допустимих цін позначимо P. Загальна вартість усіх товарів, якими володіє i-й гравець дорівнює скалярному добутку $p \cdot x^i$.

Для кожного гравця i та будь-якого вектора цін $p \in P$ визначимо множину $B^i(p)$ матриць розподілу

$$B^i(p) = \left\{ X \in \mathbf{X} \mid p \cdot x^i \le p \cdot a^i \right\},$$

яку називають бюджетною множиною i-го гравця.

У певний момент часу на ринку буде встановлена деяка ситуація, що відповідає розподілу усіх товарів поміж учасниками за визначеними цінами. Ця ситуація визначається парою (X, p) і відповідає конкретному стану ринку. Особливої уваги серед усіх ситуацій на ринку заслуговує така, що відповідає стану рівноваги, коли попит і пропозиція збалансовані.

Стан ринку $(X, p) \in \mathbf{X} \times P$ називають станом рівноваги, якщо для кожного його учасника $i \in I$ виконуються умови:

$X \in B^i(p)$;

$u_i(X) \ge u_i(Y)$ для кожної матриці розподілу $Y \in B^i(p)$.

Кожний ринок $\mathbf{M}$ описується кооперативною грою з трансферабельною корисністю (I, v), з функцією корисності, що задається формулою

$$v(K) = \max \left\{ \sum_{i \in K} u_i(X) \;\middle|\; X \in \mathbf{X}^K \right\},$$

де K – будь-яка коаліція учасників ринку. Гру (I, v) з визначеною таким чином функцією називають ринковою. Однією з основних задач ринкової гри є пошук ринкової рівноваги.

Зазвичай умови ринкової конкуренції спонукають гравців керуватися виключно особистими інтересами та максимізувати власну корисність. Водночас є немало прикладів скоординованої діяльності учасників ринку для досягнення спільних інтересів. Узгоджувати свої стратегії можуть компанії зі спільними інвесторами, близькими родинними зв'язками, географічною належністю до одного регіону тощо. Розглянемо модель ринку, що передбачає можливість кооперації його учасників.

Для будь-якої коаліції гравців $K \subset I$ функція колективної корисності $u_K : \mathbf{X} \to R$ обчислюється за формулою:

$$u_K(X) = \sum_{i \in K} u_i(X), \text{ де } X \in \mathbf{X}.$$

Відповідно до заданого вектора цін $p \in P$ визначається коаліційний бюджет

$$B_p^K = \left\{ X \in \mathbf{X} \;\middle|\; \sum_{i \in K} p \cdot x^i \le \sum_{i \in K} p \cdot a^i \right\}.$$

Якщо всіх гравців розділити на коаліції, то отримаємо розбиття $\mathcal{K} \subset 2^I$, так що $\bigcup_{K \in \mathcal{K}} K = I$. Стан $(X, p) \in \mathbf{X} \times P$ ринку $\mathbf{M}$ називають $\mathcal{K}$-рівновагою, якщо для всіх $K \in \mathcal{K}$ виконується

$$X \in B^K(p) \text{ і}$$

$$u_K(X) \ge u_K(Y) \text{ для будь-яких } Y \in B^K(p).$$

Відповідно до цього така ринкова гра визначатиметься характеристичною функцією

$$v(K) = \max\left\{u_K(X) \mid X \in \mathbf{X}^K\right\}, \text{ де } K \subset I .$$

Множина $C^{\mathcal{K}}$ розподілів ринкової гри з коаліційною структурою $\mathcal{K}$, визначена формулою

$$C^{\mathcal{K}} = \left\{c = (c_i)_{i \in I} \mid \sum_{i \in I} c_i \le v(I),\ \forall K \in \mathcal{K}\ \sum_{i \in K} c_i \ge v(K)\right\},$$

утворює $\mathcal{K}$-ядро ринкової гри (I, v).

Розглянемо тепер модель ринку з врахуванням нечіткої інформації про корисність товарів та ціни на них. Припустимо, що кожен гравець володіє достатньою інформацією про якість товарів і може оцінити їх привабливість для себе відповідно до деякої шкали, що дозволить відобразити це за допомогою нечітких чисел. Ціну на товари також представимо у вигляді нечітких значень для забезпечення врахування певних відхилень при її прогнозуванні. Водночас формування коаліцій серед усіх гравців не є строго детермінованим процесом і достатньо непередбачуваним. Тому коаліції також розглядатимемо як нечіткі підмножини множини *I*.

Визначимо нечітку функцію корисності $u_i^F : \mathbf{X} \to \mathcal{F}(R)$ для будь-якого $i \in I$, так що кожному $X \in \mathbf{X}$ відповідатиме нечітке число $u_i^F(X)$ з характеристичною функцією $\mu_{i,X} : R \to [0,1]$. Покладемо $\mu_{i,X}(u_i(X)) = 1$ для будь-яких $i \in I$ та $X \in \mathbf{X}$. За аналогією до детермінованої ситуації отримаємо, що $\mu_{i,X}(r) = \mu_{i,Y}(r)$ для будь-яких $r \in R$ якщо $x^i = y^i$. Якщо ж $x_j^i = 0$ для кожного $j = 1, 2, \ldots, m$, то $\mu_{i,X}(0) = 1$, а $\mu_{i,x}(r) = 0$ для довільного $r \in R$, $r \ne 0$. Значення нечіткої функції корисності $u_i^F(X)$ називають нечіткою корисністю. Визначена так нечітка функція корисності є розширенням класичної (чіткої) функції корисності [7].

Нечітка ціна на ринку визначається вектором нечітких чисел $q = (q_j)_{j-1,\ldots,m}$ з характеристичною функцією $\pi_j : R \to [0,1]$ для кожного елемента q_j. При цьому $\pi_j(p_j) = 1$ для деякого вектора цін $(p_j)_{j=1,\ldots,m} \in P$ і $\pi_j(r) = 0$ для всіх $r \le 0$. Множину векторів нечітких цін позначимо P^F.

З урахуванням наведених позначень нечітким ринком називають множину

$$\mathbf{M}^F = \left(I, m, A, (u_i^F)_{i \in I}\right).$$

Відповідно пару $(X, q) \in \mathbf{X} \times P^F$ називатимемо станом нечіткого ринку.

У таких умовах вартість усіх товарів кожного гравця $i \in I$ обчислимо як скалярний добуток векторів з нечіткими компонентами

$$q \cdot x^i = q_1 \cdot x_1^i \oplus q_2 \cdot x_2^i \oplus \ldots \oplus q_m \cdot x_m^i .$$

Очевидно, що така вартість задається нечітким числом і з врахуванням нечіткого відношення порядку можна порівняти різні такі величини.

Беручи до уваги наведені позначення, можемо визначити нечітку бюджетну множину $B^{Fi}(q)$ як нечітку підмножину множини $\mathbf{X}$ з характеристичною функцією $\beta_{i,q} : \mathbf{X} \to [0,1]$, яка визначається формулою $\beta_{i,q}(x) = \nu_{\succeq}(q \cdot a^i, q \cdot x^i)$ для кожного гравця $i \in I$ та будь-якої нечіткої ціни q. Бачимо, що визначена так нечітка бюджетна множина є нечітким розширенням звичайної бюджетної множини $B^i(p)$.

Дослідимо тепер можливість досягнення рівноваги нечіткого ринку $\mathbf{M}^F$. Зрозуміло, що таку рівновагу слід шукати в нечіткій формі, як нечітку підмножину добутку $\mathbf{X} \times P^F$. Для цього визначимо характеристичну функцію $\rho : \mathbf{X} \times P^F \to [0,1]$, значення якої означатимуть міру того, наскільки ринок перебуває в стані рівноваги, у такому вигляді:

$$\rho(X,q) = \min\left(\beta(X,q), \delta(X,q)\right),$$

$$\text{де } \beta(X,q) = \min_{i \in I}\left(\beta_{i,q}(X)\right)$$

вказує на вірогідність того, що X належить до всіх нечітких бюджетних множин $B^{Fi}(q)$, а функція

$$\delta(X,q) = \min_{Y \in \mathbf{X}}\left(\beta(Y,q), \min_{i \in I}\left(v_{\succeq}(u_i^F(X), u_i^F(Y)\right)\right)$$

визначає ймовірність того, що нечітка корисність матриці розподілу X є більшою від нечіткої корисності будь-якої матриці розподілу Y, що належить до нечіткої бюджетної множини $B^{Fi}(q)$ для всіх гравців $i \in I$. Нечітку підмножину множини $\mathbf{X} \times P^F$ з визначеною вище характеристичною функцією ρ називають нечіткою рівновагою ринку $\mathbf{M}^F$. Нечітка рівновага у такій формі є розширенням рівноваги в класичному розумінні.

Для побудови моделі нечіткого ринку у вигляді нечіткої коаліційної гри необхідно визначити характеристичну функцію, яка володітиме всіма потрібними властивостями. Спочатку визначимо нечітку корисність будь-якої коаліції $K \subset I$, $K \neq \varnothing$ та довільної матриці розподілу $X \in \mathbf{X}$:

$$u_K^F(X) = \oplus \sum_{i \in K} u_i^F(X),$$

де сумування виконується за правилом нечіткої суми. Функція належності $\mu_{K,X} : R \to [0,1]$ визначається за допомогою коаліційної функції корисності $u_K^F(X)$, зазначеної вище.

Обчислення значення характеристичної функції $w(K)$ нечіткої коаліційної гри здійснюється з врахуванням максимальної корисності коаліції $K \subset I$. З цією метою для кожного $X \in \mathbf{X}^K$ знаходимо

$$\min_{Y \in \mathbf{X}^K}\left(v_{\succeq}(u_K^F(X), u_K^F(Y)\right)$$

як вірогідність переваги $u_K^F(X)$ над $u_K^F(Y)$ для будь-якої матриці розподілу $Y \in \mathbf{X}^K$. В якості значення $w(K)$ беремо максимальне серед можливих значень $u_K^F(X)$ для будь-яких $X \in \mathbf{X}^K$. Узагальнюючи:

$$w(K) = \max_{X \in \mathbf{X}^K}\left(\min_{Y \in \mathbf{X}^K}\left(v_{\succeq}(u_K^F(X), u_K^F(Y))\right)\right).$$

Функція належності ω_K для характеристичної функції $w(K)$ є такою, що $\omega_{\varnothing}(0) = 1$ та для будь-яких $r \in R$, $r \neq 0$ виконується $\omega_{\varnothing}(r) = 0$. Водночас $\omega_K(v(K)) = 1$.

Підсумовуючи наведені міркування, отримуємо нечітку коаліційну гру (I, w), яка адекватно моделює нечіткий ринок. Застосовуючи інструментарій теорії ігор можна достатньо ефективно досліджувати ринкові процеси з врахуванням неповної інформації, здійснювати прогнозування ціноутворення в умовах змін вартості енергоносіїв, коливання валютних курсів чи непередбачуваного попиту на певні види товарів. Водночас теоретико-ігровий підхід дозволяє оцінити корисність від кооперації учасників ринку, причому таку взаємодію можна трактувати достатньо вільно – від часткової узгодженості стосовно цінової політики або виробничої активності до повної взаємодії з виробництва продукції чи її реалізації у формі консорціумів, альянсів або злиття та обрати оптимальну стратегію співробітництва.

---

1. Машунин Ю.К. Теория и моделирование рынка на основе векторной оптимизации М.: Университетская книга, 2010. – 352 с.
2. Aubin P.J. Cooperative fuzzy games // Math. Oper. Res. 6, 1981. P. 1-13.
3. Azrieli Y., Lehrer E. Market games in large economies with a finite number of types // Economic Theory, 31. – 2007. P. 327-342.
4. Bojadziev G., Bojadziev M. Fuzzy Logic for Business, Finance and Management. – World Sci. Pub. 2007. 232 P.
5. Branzei R., Dimitrov D., Tijs S. Models in Cooperative Game Theory. Springer, 2005. 135 p.
6. Mares M. On cooperative games connected with market // Kybernetika, 12. – 1976. P. 451-461.
7. Yu X., Zhang Q. An extension of cooperative fuzzy games // Fuzzy Sets and Systems, 161. – 2010. P. 1614-1634.

MODELING OF THE MARKET RELATIONS WITH FUZZY PARAMETERS

R. Vovk

Ivan Franko National University of Lviv
19, Sichovykh Striltsiv Str., Lviv, 79000

The market model created by the fuzzy coalition games theory is discussed in this article. The methods for computing of the characteristic function of fuzzy market game with the fuzzy price and the fuzzy utility functions are considered. Some methods are proposed for calculation of the market equilibrium in a fuzzy environment.

Key words: Fuzzy Market Game, Utility Function, the Market Equilibrium.

МОДЕЛИРОВАНИЕ РЫНОЧНЫХ ОТНОШЕНИЙ С НЕЧЕТКИМИ ПАРАМЕТРАМИ

Р. Вовк

Львовский национальный университет имени Ивана Франко
79000, г. Львов, ул. Сечевых Стрельцов, 19

В статье рассматривается модель рынка, построена при помощи теории нечетких коалиционных игр. Описаны методы вычисления характеристической функции нечеткой рыночной игры с учетом нечетких цен и нечетких функций полезности. Предложены методы нахождения состояния равновесия рынка в нечетких условиях.

Ключевые слова: нечеткая рыночная игра, функция полезности, рыночное равновесие.

Стаття надійшла до редколегії 28.10.2013,
прийнята до друку 04.11.2013