ISSN 2078-6115. Вісник Львівського університету. Серія економічна. 2015. Випуск 52. С. 32-40
Visnyk of the Lviv University. Series Economics. 2015. Issue 52. P. 32-40

УДК 311:336

ПОРІВНЯННЯ МІР РИЗИКУ ПРИ НЕВИКОНАННІ ПРИПУЩЕННЯ ПРО НОРМАЛЬНІСТЬ РОЗПОДІЛУ ДОХІДНОСТЕЙ АКТИВІВ

Микола Заболоцький, Тарас Заболоцький

Львівський національний університет імені Івана Франка
79000 м. Львів, вулиця Університетська 1
Львівський інститут банківської справи Університету банківської справи
Національного банку України
79000 м. Львів, проспект Шевченка 9
E-mail: m_zabol@franko.lviv.ua, zjabka@yahoo.com

В роботі проведено аналіз портфеля фінансових активів з найбільшим відношенням Шарпа за різних мір ризику при невиконанні припущення про нормальність розподілу дохідностей активів, з яких складено портфель. Показано, що в такому випадку портфелі мають різні структури та характеристики. На основі реальних даних та даних отриманих з GARCH-BEKK(1, 1) встановлено, що найбільш привабливим як з теоретичної, так і з практичної точок зору є портфель, де за міру ризику вибрано CVaR. Отже, використання міри ризику CVaR є не лише теоретично, але й практично обґрунтованим.
Ключові слова: *відношення Шарпа, портфель фінансових активів, середньоквадратичне відхилення, Value-at-Risk, умовне Value-at-Risk, очікувана дохідність, GARCH-BEKK процес.*

Вступ.Питання вибору міри ризику для побудови портфеля фінансових активів є актуальним як для практиків фондового ринку та банківської сфери, так і для науковців-теоретиків. До мір, що найчастіше використовуються на практиці, можна віднести дисперсію, *Value-at-Risk (VaR)* та умовне*Value-at-Risk (CVaR).* Ці міри ризику, як правило, застосовуються в банках, фінансових установах, страхових компаніях тощо. Проте поведінка та інформативність цих мір є неоднакова. Так, дисперсія є найкраще вивченою та найменш інформативною мірою, а *VaR* є простою в обчисленні та надає більше інформації про ризик, ніж дисперсія, проте не є субадитивною. *CVaR* надає набагато кращу інформацію про ризик, ніж дві інші згадані міри, задовольняє аксіому субадитивності, але є важкою в обчисленні. На практиці, вибір міри ризику регламентується певними документами у випадку фінансових, та певними особистими переконаннями у випадку приватних інвесторів.

При зміні міри ризику, суттєво змінюються властивості портфеля. В першу чергу це стосується очікуваної дохідності портфеля та його ризику. Також різними є і статистичні властивості портфеля, розподіл ваг, дохідності, ризику. Навіть у випадку нормально розподілених дохідностей фінансових активів, які входять у портфель, при використанні мінімізації ризику для обчислення структури портфеля поведінка портфелів є різною [1]. Виникає питання: Чи існує критерій раціонального вибору структури портфеля не залежний від вибору міри ризику? При нормально розподілених дохідностях фінансових активів таким критерієм є максимізація відношення Шарпа [2].

Метою роботи є порівняння портфелів фінансових активів з максимальним відношенням Шарпа (за різних мір ризику) при невиконанні припущення про нормальність розподілу дохідностей активів, з яких складено портфель. Порівняння проведемо на основі акцій п'яти компаній, що входять у перелік *DowJones*. На першому етапі ми не будемо робити жодного припущення про розподіл дохідностей активів. На основі даних за 2013 рік ми побудуємо три портфелі з максимальним відношенням Шарпа. На другому етапі ми на основі даних за 2014 рік про дохідності активів, з яких складено портфель оцінимо середню дохідність кожного з портфелів, а також відповідні ризики. На третьому етапі ми побудуємо розподіл дохідності кожного портфеля виходячи з припущення, що дохідності поводяться як GARCH(1, 1) процес, який часто використовують для моделювання поведінки дохідностей фінансових активів [3]. На основі отриманих результатів проаналізуємо поведінку портфелів.

Вибір раціональної структури портфеля фінансових активів. Гарі Марковіц у 1952 році запропонував новий метод побудови оптимального портфеля [4] . Використовуючи цей метод, ваги оптимального портфеля, тобто частки коштів інвестора, вкладені в певний фінансовий актив, обчислюються за допомогою мінімізації дисперсії портфеля за сталого значення дохідності. Тобто, за міру ризику Марковіц вибрав дисперсію портфеля. Під дохідністю фінансового активу в момент часу t ми розуміємо величину $X_t = 100 \ln \frac{P_t}{P_{t-1}}$, де P_t ціна певного активу в момент часу t. Завдяки свої простоті цей метод став дуже популярним серед теоретиків та практиків фінансового ринку. Залежно від обраного рівня дохідності, за допомогою метода Марковіца, отримують різні оптимальні портфелі, які належать так званій ефективній множині. Основною властивістю цієї множини є те, що очікувану дохідність портфеля, який належить цій множині, не можна збільшити, не збільшуючи його ризик або, еквівалентно, ризик портфеля не можна зменшити, не зменшуючи його очікувану дохідність.

Серйозним недоліком методу Марковіца вибору раціональної структури портфеля фінансових активів є вибір дисперсії як міри ризику. Дисперсія бере до уваги двосторонній ризик, тобто ймовірність високих прибутків збільшує ризик витрат, що має мало спільного з загальним поняттям ризику. Також дисперсія надає мало інформації про ризик.

В останні роки дослідження в теорії ризику показали, що для практичного застосування добре підходять міри ризику, що базуються на квантилях розподілів функції втрат [5]. Однією з найпростіших та найпоширеніших таких мір є *VaR*. Дана міра рекомендована для оцінки ризиків в банківській діяльності Базельським комітетом [6]. Зважаючи на це, в [7] запропонували використати *VaR* як основну міру в аналізі Марковіца, припускаючи, що дохідності акцій є незалежними та нормально розподіленими. Знайдено аналітичний розв'язок задачі мінімізації *VaR* і показано, що оптимальний портфель теж належить ефективній множині, проте має вищу дохідність, а отже, і більшу дисперсію, ніж портфель найменшої дисперсії.

Виявляється, що *VaR* є доброю мірою ризику лише в разі, коли дохідності активів є нормально розподіленими. Не важко показати, що дана міра не є субадитивною в загальному випадку [8]. Може трапитися, що загальний ризик двох портфелів є більший, аніж сума зважених ризиків цих портфелів. У кінці минулого століття науковцями були сформульовані чотири основні властивості когерентності, якими повинна володіти міра ризику [9]. Однією з властивостей когерентності є субадитивність. Ця властивість є найсуперечливішою з усіх властивостей, якими повинна володіти когерентна міра ризику. Проте ця властивість одночасно є важливою. Саме субадитивність робить необхідною диверсифікацію портфеля з метою зниження його ризику, а також забезпечує існування та єдиність розв'язку оптимізаційної задачі, оскільки субадитивність забезпечує випуклість поверхонь ризику. Також *VaR* є лише квантилю розподілу дохідності і тому не повністю відображає інформацію, яка стоїть за його значенням.

Аксіоми Арцнера не описують лише одну міру. Існує декілька когерентних мір ризику, проте однією з найвідоміших є так зване умовне *VaR (CVaR)*, яка є узагальненням *VaR*. У [8] доведено, що дана міра ризику задовольняє усі умови когерентності. На даний момент *CVaR* не є основною мірою для оцінювання ризиків у банківській справі, проте до 2019 року європейські банки мають перейти до рекомендаційної програми Basel III, в якій основною мірою для оцінювання ризиків є *CVaR*. У [10] розглянуто задачу побудови оптимального портфеля, використовуючи *CVaR* як міру ризику та припускаючи, що дохідності активів є незалежними та нормально розподіленими. Основним результатом даної роботи є той факт, що оптимальний портфель найменшого *CVaR* належить ефективній множині , а очікувана дохідність даного портфеля лежить між дохідностями портфеля найменшої дисперсії та портфеля найменшого *VaR*.

Зауважимо, що в [4], [9], [10] за основу побудови портфеля вибирали задачу мінімізації ризику портфеля незалежно від його очікуваної дохідності. Часто на практиці виникає необхідність прийняти до уваги також очікувану дохідність портфеля, а саме розглянути задачу подвійної оптимізації. В загальному випадку такі задачі не мають розв'язку, а тому у фінансовій літературі розглядають також інші методи вибору структури портфеля фінансових активів, наприклад, відношення Шарпа [11]. Відношення Шарпа описує премію за ризик на одиницю ризику. Ми припускаємо, що на ринку немає можливості безризикового розміщення коштів. Отже, чим більшим є відношення Шарпа тим кращим є портфель. Крім того, у випадку нормально розподілених дохідностей структура портфеля з максимальним відношенням Шарпа не залежить від вибору міри ризику [2], що є привабливою властивістю.

Запишемо задачу максимізації відношення Шарпа

$$R_{\mathbf{w}} / Y_{\mathbf{w}} \to \max \text{ за умови } \sum_{i=1}^{k} w_i = 1, \qquad (1)$$

де w_i частку i-го фінансового активу в портфелі, а вектор $\mathbf{w}=(w_1, w_2, \ldots, w_k)'$ – портфель фінансових активів, k – кількість фінансових активів з яких складено портфель, $R_{\mathbf{w}}$ – очікувана дохідність портфеля, $X_{\mathbf{w}}$ – ризик портфеля.

Очікувану дохідність портфеля ми можемо обчислити як математичне сподівання дохідності $R_{\mathbf{w}}=\mathrm{M}(X_{\mathbf{w}t})=\boldsymbol{\mu}'\mathbf{w}$, де $X_{\mathbf{w}t}$ – дохідність портфеля в момент часу t, $\boldsymbol{\mu}$ – вектор математичних сподівань дохідностей фінансових активів. Питання обчислення ризику не є таким однозначним. За ризик $Y_{\mathbf{w}}$ ми візьмемо середньо квадратичне відхилення, *VaR* та *CVaR* дохідності портфеля. Для мір ризику *VaR* та *CVaR* необхідно визначити також рівень довіри, ми візьмемо α=0.95. Середньоквадратичне відхилення дохідності портфеля обчислимо як корінь з дисперсії дохідності, тобто $V_w= D(X_{wt})=\sqrt{V_{\mathbf{w}}} = \sqrt{D(X_{\mathbf{w}t})} = \sqrt{\mathbf{w}'\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{w}}$, де $\boldsymbol{\Sigma}$ – коваріаційна матриця вектора дохідностей $\mathbf{X}_t=(X_{1t}, X_{2t}, \ldots, X_{kt})'$.

Всі розглянуті задачі оптимізації залежать від параметрів розподілу дохідностей $\boldsymbol{\mu}$ та $\boldsymbol{\Sigma}$. В загальному випадку ці параметри є невідомими на практиці та мають бути певним чином оцінені. Найвідомішим методом оцінки невідомих параметрів розподілу дохідностей є історичний метод. Цей метод полягає у побудові так званих вибіркових оцінок невідомих параметрів на основі вибірки попередніх значень векторів дохідностей фінансових активів $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \ldots, \mathbf{X}_n$

$$\hat{\boldsymbol{\mu}} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mathbf{X}_i\,,\ \hat{\boldsymbol{\Sigma}} = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(\mathbf{X}_i - \hat{\boldsymbol{\mu}})(\mathbf{X}_i - \hat{\boldsymbol{\mu}})'. \tag{2}$$

Зауважимо, що оцінки (2) є випадковими величинами. Отже і розв'язки оптимізаційних задач необхідно розглядати як реалізацію випадкової величини, а не як константу. Тому для аналізу портфеля фінансових активів та його характеристик необхідно використовувати статистичні та імовірнісні методи.

Аналіз портфеля фінансових активів з максимальним відношенням Шарпа без припущення про розподіл дохідностей активів. В цьому розділі проведемо аналіз трьох портфелів фінансових активів з максимальним відношенням Шарпа (в залежності від вибраної міри ризику) не роблячи жодного припущення стосовно розподілу дохідностей активів з яких складено ці портфелі. Ми використаємо історичний метод оцінки характеристик портфеля виходячи з даних про курси акцій п'яти компаній (Coca-Cola, McDonald's, Microsoft, JPMorgan Chase, Visa) з переліку DowJones за період часу з 01.01.2013 до 31.12.2013 та на основі даних про курси цих акцій в період часу з 01.01.2014 до 31.12.2014 проаналізуємо характеристики цих портфелів. Використовуючи дані за 2013 рік отримаємо оцінки

$$\hat{\boldsymbol{\mu}} = (0.05185,\ 0.03782,\ 0.13369,\ 0.11317,\ 0.15263)',$$

$$\hat{\boldsymbol{\Sigma}} = \begin{pmatrix} 0.987 & 0.343 & 0.315 & 0.441 & 0.494 \\ 0.343 & 0.588 & 0.181 & 0.233 & 0.303 \\ 0.315 & 0.181 & 2.502 & 0.509 & 0.435 \\ 0.441 & 0.233 & 0.509 & 1.439 & 0.654 \\ 0.494 & 0.303 & 0.435 & 0.654 & 1.808 \end{pmatrix}.$$

Використовуючи оцінки $\hat{\boldsymbol{\mu}}$ та $\hat{\boldsymbol{\Sigma}}$ розв'яжемо оптимізаційні задачі

$$\hat{\boldsymbol{\mu}}'\mathbf{w}/\sqrt{\mathbf{w}'\hat{\boldsymbol{\Sigma}}\mathbf{w}} \to \max \text{ за умови } \sum_{i=1}^{k} w_i = 1, \tag{3}$$

$$\hat{\boldsymbol{\mu}}'\mathbf{w}/\overline{VaR}_{\alpha}(\mathbf{w}) \to \max \text{ за умови } \sum_{i=1}^{k} w_i = 1, \tag{4}$$

$$\hat{\boldsymbol{\mu}}'\mathbf{w}/\overline{CVaR}_{\alpha}(\mathbf{w}) \to \max \text{ за умови } \sum_{i=1}^{k} w_i = 1. \tag{5}$$

У задачі (3) всі параметри є відомі, тому її можна розв'язати. Натомість в (4)-(5) невідомими є знаменники. Ми побудуємо історичні оцінки для вибраних мір ризику. На основі вибірки значень дохідностей фінансових активів $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \ldots, \mathbf{X}_n$ побудуємо вибірку значень дохідностей портфеля $\mathbf{w}'\mathbf{X}_1$, $\mathbf{w}'\mathbf{X}_2, \ldots \mathbf{w}'\mathbf{X}_n$. Далі з отриманої вибірки побудуємо вибірку $\mathbf{w}'\mathbf{X}_{(1)} \le \mathbf{w}'\mathbf{X}_{(2)} \le \ldots \le \mathbf{w}'\mathbf{X}_{(n)}$, тобто сортуємо вихідну вибірку за зростанням. Для обчислення оцінки $\overline{VaR}_\alpha(\mathbf{w})$ з рівнем довіри α вибиремо значення $-\mathbf{w}'\mathbf{X}_{[(1-\alpha)n]}$, де символ [.] означає цілу частину, а для $\overline{CVaR}_\alpha(\mathbf{w})$ середнє арифметичне значень менших за $-\mathbf{w}'\mathbf{X}_{[(1-\alpha)n]}$. Зауважимо, що в (3)-(5) ми не вимагаємо додатності ваг портфеля. Отримаємо

$\hat{\mathbf{w}}_{SRVar} = (-0.0879,\ 0.0914,\ 0.2547,\ 0.2845,\ 0.4568)'$ з очікуваної дохідністю $\hat{R}_{SRVar} = 0.1349$ та відношенням Шарпа 0.1363;

$\hat{\mathbf{w}}_{SRVaR} = (0.1521,\ -0.0450,\ 0.3409,\ 0.0007,\ 0.5513)'$ з очікуваної дохідністю $\hat{R}_{SRVaR} = 0.1360$ та відношенням Шарпа 0.1029;

$\hat{\mathbf{w}}_{SRCVaR} = (-0.0750, 0.1542, 0.2274, 0.2860, 0.4074)'$ з очікуваної дохідністю $\hat{R}_{SRCVaR} = 0.1269$ та відношенням Шарпа 0.063.

З попередніх результатів бачимо, що портфелі є різними. Найдохіднішим є портфель з максимальним відношенням Шарпа, де за міру ризику ми вибрали *VaR*, а найбільшим відношенням Шарпа характеризується портфель з мірою ризику дисперсія. Оцінимо на основі даних за 2014 рік середню дохідність портфеля та його ризики (використаємо всі три міри). Результати статистичного аналізу наведено в табл. 2.

Таблиця 1

Характеристики портфелів

	Дохідність	Дисперсія	$VaR_{0.95}$	$CVaR_{0.95}$
$\hat{\mathbf{w}}_{SRVar}$	0.0571	0.9277	1.6553	2.0971
$\hat{\mathbf{w}}_{SRVaR}$	0.0670	0.9227	1.7167	2.0852
$\hat{\mathbf{w}}_{SRCVaR}$	0.0508	0.8312	1.5756	1.9735

Порівнюючи дохідності отриманих портфелів робимо висновок, що найкращим є портфель де за міру ризику вибрано було *VaR*, проте найменш ризиковим є портфель, що ґрунтується на мірі ризику *CVaR*. Більше того, якщо для портфелів обчислити їх відношення Шарпа на основі однакової міри ризику, то виявиться, що у випадку мір *VaR* та *CVaR* найбільше відношення буде у портфеля, що ґрунтується на мірі *CVaR*, в іншому випадку – у портфеля, що ґрунтується на середньоквадратичному відхиленні. Отримані результати дають змогу зробити висновок, що при порушенні припущення про нормальність портфелі з максимальним відношенням Шарпа не є однаковими для розглянутих трьох мір ризику. Найбільш дохідним виявився портфель, де за міру ризику прийняли *VaR*, а найменшим ризиковим – *CVaR*.

Аналіз портфеля фінансових активів з максимальним відношенням Шарпа при дохідностях активів з важкими хвостами. Аналіз фінансових ринків показує, що розподіли дохідностей фінансових активів є близькими до нормального, лише у випадку частоти меншої за щомісячну (щоквартальна, річна). При частоті даних більших за щомісячну (щоденні) дохідностям притаманна властивість наявності важких хвостів. В таких випадках для моделювання дохідностей використовують узагальнені моделі умовної гетероскедастичності (надалі *GARCH*) [12]. Ми використаємо для аналізу портфелів фінансових активів з максимальним відношенням багатовимірний *GARCH-BEKK* модель порядку (1, 1) для моделювання вектора дохідностей $\mathbf{X}_t$. Порядок моделі вибираємо з тих міркувань, що раціонального підходу для визначення порядку моделі на сьогодні не існує, а на практиці найбільш поширеними є моделі порядку (1, 1). Використовуючи дані про дохідності фінансових активів за 2013 рік оцінимо параметри нашої моделі. Після цього згенеруємо вибірку з 250000 даних та на її основі побудуємо густину розподілу для дохідностей портфелів та отримаємо оцінки для очікуваної дохідності та ризику за різними мірами.

Нагадаємо, що *GARCH-BEKK*(1, 1) має вигляд

$\mathbf{X}_t=(\mathbf{H}_t)^{1/2}\boldsymbol{\varepsilon}_t$,

$\mathbf{H}_t=\mathbf{C}'\mathbf{C}+\mathbf{A}'\boldsymbol{\varepsilon}_{t-1}\boldsymbol{\varepsilon}'_{t-1}\mathbf{A}+\mathbf{B}'\mathbf{H}_{t-1}\mathbf{B}$,

де $\boldsymbol{\varepsilon}_t$ процес білого шуму з одиничною матрицею коваріації розмірності 5×5, $\mathbf{C}$ – верхньотрикутна матриця розмірності 5×5, $\mathbf{A}$ та $\mathbf{B}$ квадратні матриці розмірності 5×5. Оцінку та генерацію значень ми проведемо в програмі R за допомогою пакету mgarch.

Отримали наступні оцінки

$$\mathbf{C}=\begin{pmatrix} 0.6830144 & -0.0921178 & 0.1245412 & 0.09601725 & 0.3709508 \\ 0 & 0.1254137 & -0.9492569 & -0.65216840 & -0.3589958 \\ 0 & 0 & 0.8488832 & -0.51300270 & -0.3051613 \\ 0 & 0 & 0 & -0.31442706 & -0.1540875 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1.0100204 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix} -0.05430682 & -0.13781678 & 0.381368155 & 0.42364605 & 0.20926103 \\ -0.33325027 & -0.31876522 & 0.086498138 & -0.50050431 & -0.21034742 \\ -0.01224323 & 0.08526174 & 0.006550898 & -0.02143942 & -0.02827310 \\ 0.08677182 & -0.02658931 & -0.621190872 & 0.01352860 & -0.09495225 \\ 0.10260137 & 0.02633503 & -0.269992952 & 0.18553914 & -0.07042767 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{B}=\begin{pmatrix} 0.548801693 & 0.41307017 & 0.29804276 & 0.30902376 & 0.3911658 \\ 0.221395260 & 0.44633498 & 0.13520962 & 0.06978911 & 0.4472249 \\ -0.090683594 & 0.15716290 & 0.05169302 & 0.08872637 & 0.1796828 \\ 0.006588147 & -0.05286880 & 0.07609974 & 0.27006772 & -0.2186216 \\ 0.006829313 & -0.04811849 & 0.13098551 & 0.10554813 & -0.1801022 \end{pmatrix}$$

На рис. 1 зображено розподіли дохідності портфелів фінансових активів. Зауважимо, що розподілам притаманна властивість наявності важких хвостів, хоча і не яскраво виражена. Отриманий результат не суперечить результатам [13], що важкі хвости не мають істотного впливу на характеристики портфеля фінансових активів при достатній диверсифікації.

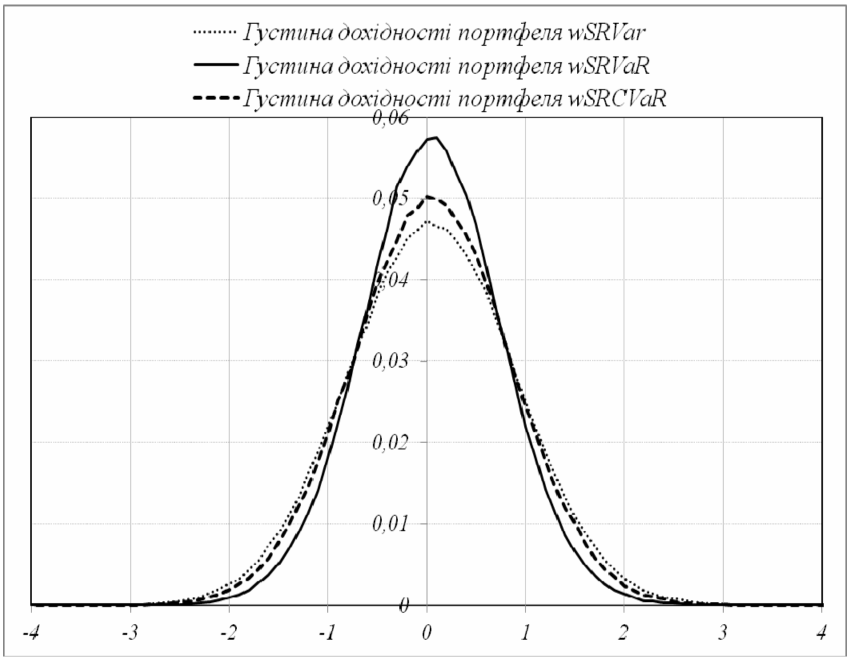

Рис. 1. Густини дохідності портфелів $\mathbf{w}_{SRVar}$, $\mathbf{w}_{SRVaR}$, $\mathbf{w}_{SRCVaR}$.

В табл. 2 наведено очікувану дохідність, 95% інтервали довіри та ризики портфелів, отримані за результатами *GARCH-BEKK*(1, 1) моделі. Результати наведені в таблиці підтверджують результати графічного аналізу. Крім того, можемо зробити висновок, що найменшим ризиком та найменшою дохідність володіє портфель $\mathbf{w}_{SRVaR}$, натомість портфель зі структурою $\mathbf{w}_{SRCVaR}$ має найвищу очікувану дохідність та ризик нижчий ніж ризик портфеля $\mathbf{w}_{SRVar}$.

Таблиця 2

Характеристики портфелів $\mathbf{w}_{SRVar}$, $\mathbf{w}_{SRVaR}$, $\mathbf{w}_{SRCVaR}$ за припущення, що дохідності активів поводяться як *GARCH-BEKK*(1, 1) модель

	Очікувана дохідність	Дисперсія	$VaR_{0.95}$	$CVaR_{0.95}$	Межі інтервалу довіри	
$\mathbf{w}_{SRVar}$	0.000545	0.7219	1.3973	1.7511	-1.6621	1.6604
$\mathbf{w}_{SRVaR}$	-0.001713	0.4984	1.1604	1.4735	-1.3938	1.3874
$\mathbf{w}_{SRCVaR}$	0.00074	0.6372	1.3153	1.6458	-1.5639	1.5605

Висновки. Робота присвячена порівнянню портфелів фінансових активів з максимальним відношенням Шарпа, при різних мірах ризику. Враховуючи результати роботи [2], структура та властивості цих портфелів не залежать від вибору міри ризику при нормально розподілених дохідностях активів, з яких складено портфель. Показано, що при невиконанні припущення про нормальність розподілу дохідностей активів, структури портфелів та їх характеристики є різними. При порівнянні характеристик портфелів на основі емпіричних даних, встановлено, що найбільшу очікувану дохідність має портфель, де за міру ризику вибрано *VaR*, а найменший ризик має портфель, що ґрунтується на мірі ризику *CVaR*. Більше того, якщо для портфелів обчислити їх відношення Шарпа на основі однакової міри ризику, то виявляється, що у випадку мір *VaR* та *CVaR* найбільше відношення буде у портфеля, що ґрунтується на мірі *CVaR*, в іншому випадку – у портфеля, що ґрунтується на середньоквадратичному відхиленні. За припущення, що дохідності активів поводяться як 5-вимірний *GARCH-BEKK*(1, 1), тобто володіють властивістю наявності важких хвостів, показано, дохідності портфелів також матимуть важкі хвости, але менш виражені, ніж дохідності активів. Цей результат повністю узгоджується з результатами роботи [13]. В цьому випадку найменшим ризиком та найменшою дохідність володіє портфель, де за міру ризику вибрано *VaR*; натомість портфель, де за міру ризику вибрано *CVaR* має найвищу очікувану дохідність та ризик нижчий ніж ризик портфеля $\mathbf{w}_{SRVar}$.

Таким чином при порушенні припущення про нормальність дохідностей активів, з яких складено портфель з максимальним відношенням Шарпа найбільш привабливим як з теоретичної, так і з практичної точок зору є портфель, де за міру ризику вибрано *CVaR*. Отже, використання міри ризику *CVaR* є не лише теоретично, але й практично обґрунтованим.

1. Заболоцький Т.М. Порівняння мір ризику портфеля акцій. // Вісник Університету банківської справи Національного банку України. – 2010. - №2(8). – с.229-235.
2. Боднар Т.Д. Максимізація відношення Шарпа портфеля фінансових активів у контексті мінімізації ризику /Т.Д. Боднар, Т.М. Заболоцький // Економічний часопис – XXI. – 2013. – No 11-12(1). – С. 110-113.
3. Nelson D. Conditional heteroscedasticity in stock returns: A new approach / D. Nelson // Econometrica. – 1991. – №59. – p. 347-370.
4. Markowitz H. Portfolio selection // Journal of finance. – 1952. - №7. – P.77-91.
5. Krokhmal P. Modeling and optimization of risk / P. Krokhmal, M. Zabarankin, S. Uryasev // Surveys in operations research and management science. – 2011. – № 16. – P. 49-66.
6. Basel Committee on Banking Supervision // Operational Risk Consultative Document, Supporting document to the New Basel Capital Accord. – January 2001. – 30 p.
7. Alexander G.J., Baptista M.A. Economic implication of using a mean-VaR model for portfolio selection: A comparison with mean-variance analysis // Journal of Economic Dynamic & Control. – 2002. -№ 26. - P.1159-1193.
8. Pflug G.Ch. Some remarks on the value-at-risk and conditional value-at-risk // In: Probabilistic Constrained Optimization: Methodology and Applications (ed. S.Uryasev). Netherlands. – Kluwer, 2000. - P.272-281.
9. Artzner P., Delbaen F., Eber J.M., Heath D. Coherent measures of risk // Mathematical Finance. -1999. - №9(3). – P.203-228.
10. Alexander G.J., Baptista M.A. A comparsion of VaR and CVaR constraints on portfolio selection with the mean-variance model // Management Silence. – 2004. – Vol.50.-№ 9. – P.1261-1273.
11. Sharpe W. F. The Sharpe ratio / W. F. Sharpe // Journal of portfolio management. – 1994. – P. 49-58.
12. Engle R. F. ARCH: Selected Readings / R. F. Engle. – Oxford, UK: Oxford University Press, 1995. – 422 p.
13. Duffie D. An overview of Value-at-Risk / D. Duffie, J. Pan // Journal of derivatives. – 1997. – Vol. 4. – No 3. – P. 7–49.

COMPARISON OF RISK MEASURES UNDER NON-NORMALLY DISTRIBUTED ASSET RETURNS

M. Zabolotskyy, T. Zabolotskyy

Ivan Franko National University of Lviv
1, Universytetska St., Lviv 79000
Lviv banking institute of University of Banking of the National Bank of Ukraine
9, Shevchenka St., Lviv 79009
E-mail: m_zabol@franko.lviv.ua, zjabka@yahoo.com

The paper analyzes the maximum Sharpe ratio portfolio of financial assets under various risk measures in the case of non-normally distributed asset returns. It is shown that in this case portfolios have different structures and characteristics. Based on real data and data obtained from GARCH-BEKK (1, 1) process it is shown that the maximum Sharpe ratio portfolio under CVaR as a risk measure is most attractive from both a theoretical and practical point of views. So the use of risk measure CVaR is not only theoretically but also practically justified.

Key words: Sharpe ratio, financial assets portfolio, standard deviation, Value-at-Risk, conditional Value-at-Risk, expected return, GARCH-BEKK process.

СОПОСТАВЛЕНИЕ МИР РИСКА ПРИ НЕВЫПОЛНЕНИИ ПРЕДПОЛОЖЕНИЯ О НОРМАЛЬНОСТИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ДОХОДНОСТЕЙ

М. Заболоцький, Т. Заболоцький

Львовский национальный университет имени Ивана Франко
79000 г. Львов, улица Университетская 1
Львовский институт банковского дела Университета банковского дела
Национального банка Украины
79000 г. Львов, проспект Шевченко 9
E-mail: m_zabol@franko.lviv.ua, zjabka@yahoo.com

В работе проведен анализ портфеля финансовых активов с наибольшим отношением Шарпа при различных мерах риска при невыполнении предположение о нормальности распределения доходностей активов, из которых составлен портфель. Показано, что в таком случае портфели имеют различные структуры и характеристики. На основе реальных данных и данных полученных с GARCH-BEKK (1, 1) установлено, что наиболее привлекательным как с теоретической, так и с практической точек зрения является портфель, где за меру риска выбрано CVaR. Таким образом, использование меры риска CVaR является не только теоретически, но и практически обоснованным.

Ключевые слова: отношение Шарпа, портфель финансовых активов, среднее отклонение, Value-at-Risk, условное Value-at-Risk, ожидаемая доходность, GARCH-BEKK процесс.