ISSN 2078-6115. Вісник Львівського університету. Серія економічна. 2021. Випуск 60. С. 66–76
Visnyk of the Lviv University. Series Economics. 2021. Issue 60. P. 66–76

КІЛЬКІСНІ МЕТОДИ В ЕКОНОМІЦІ. ЦИФРОВА ЕКОНОМІКА

DOI: http://dx.doi.org/10.30970/ves.2021.60.0.6006

УДК 336.76:311.15
JEL G32, C63, C83

МОДЕЛЮВАННЯ ВИБІРКОВОЇ ОЦІНКИ БЕТА-КОЕФІЦІЄНТА ПОРТФЕЛЯ ЗІ СТАЛИМИ ВАГАМИ ЗА НАЯВНОСТІ АВТОКОРЕЛЯЦІЇ ДОХІДНОСТЕЙ АКТИВІВ

Микола Заболоцький, Тарас Заболоцький, Максим Петришин

Львівський національний університет імені Івана Франка,
79000, м. Львів, вул. Університетська, 1
e-mail: mykola.zabolotskyy@lnu.edu.ua;
taras.zabolotskyy@lnu.edu.ua;
maksym.petryshyn.pmo@lnu.edu.ua

Анотація. *Стаття присвячена дослідженню властивостей вибіркової оцінки бета-коефіцієнта у випадку, коли еталонний портфель та портфель інвестора складені з однакових активів та їх ваги є константами. За припущення, що вектор дохідностей активів портфелів має багатовимірний нормальний розподіл, реалізації якого є автокорельовані, у роботі знайдено асимптотичний розподіл вибіркової оцінки бета-коефіцієнта. Для імітаційного моделювання зі 100000 повторень використовуємо векторну авторегресійну модель порядку p з нормально розподіленими залишками. За параметри моделі вибираємо відповідні оцінки отримані на підставі даних про щоденні дохідності акцій включених до переліку Dow Jones за період часу з 01.01.2017 до 14.04.2021, а за еталонний портфель – портфель DJIA станом на 14.04.2021. З'ясовано, що за нашого припущення асимптотична густина може бути використана для моделювання поведінки вибіркової оцінки бета-коефіцієнта на практиці за наявності вибірки історичних значень обсягу більшого за 120 спостережень.*

Ключові слова: *бета-коефіцієнт, портфель фінансових активів, вибіркова оцінка, асимптотичний розподіл, імітаційне моделювання.*

Вступ. Диверсифікація відіграє важливу роль у фінансах. Одним зі способів реалізації диверсифікації є побудова портфеля фінансових активів. Теорія портфеля запропонована Марковіцем описує простий та зрозумілий метод побудови портфеля фінансових активів на основі задачі оптимізації певної характеристики портфеля.

ISSN 2078-6115. Вісник Львівського університету. Серія економічна. 2021. Випуск 60

З одного боку, портфель може бути побудований на основі мінімізації його ризику за фіксованої сподіваної дохідності, а з іншого – на основі максимізації сподіваної дохідності за фіксованого ризику. Множина портфелів отримана таким способом носить назву ефективної множини. До ефективної множини належать, зокрема, портфель з найменшою дисперсією, портфель з максимальним відношенням Шарпа, портфель з найменшим рівнем VaR (CVaR), портфель з максимальною сподіваною корисністю. Безпосереднє використання результатів теорії портфеля на практиці неможливе, оскільки ваги портфелів отриманих із задачі оптимізації певної характеристики портфеля залежать від оцінок параметрів вектора дохідностей активів, які є випадковими величинами. Історичний метод є одним з найпопулярніших для знаходження оцінок ваг портфеля, які в цьому випадку називаються вибірковими.

Моделюванню поведінки вибіркових оцінок характеристик портфелів, що належать ефективній множині присвячено ряд наукових праць. Так, наприклад, вибіркові оцінки характеристик портфеля з найменшою дисперсією досліджуються в [1]–[2], з найменшим рівнем VaR [3]–[4], з максимальним відношенням Шарпа [5]–[6]. Зауважимо, що диверсифікація дозволяє зменшити лише несистематичний ризик, натомість систематичний ризик зменшити неможливо. Для вимірювання систематичного ризику часто використовують бета-коефіцієнт (β), показник ризику портфеля у порівнянні з певним еталонним портфелем. У моделі CAPM за еталонний портфель приймають ринковий портфель, який містить усі активи і є добре диверсифікованим. Використовуючи поняття бета-коефіцієнта, порівнюють довільні два портфелі за добре відомою схемою: якщо $\beta = 1$, то ризик еталонного портфеля і портфеля інвестора однаковий; якщо $\beta > 1$, то ризик портфеля інвестора є вищим за ризик еталонного портфеля; якщо $\beta < 1$, то ризик портфеля інвестора є нижчий за ризик еталонного портфеля. З іншого боку, на основі значень β можна зробити висновок про сподівану дохідність портфеля. Оскільки значення бета-коефіцієнта залежить від невідомої матриці коваріацій вектора дохідностей активів портфелів, то на практиці ми змушені використовувати оцінку β, яка є випадковою величиною. Моделювання поведінки вибіркової оцінки бета-коефіцієнта за умови, що ваги портфеля інвестора та еталонного є сталими і вектор дохідностей активів яких поводиться як багатовимірний нормально розподілений вектор незалежний в часі, досліджено в роботі [7]. В [8] розглянута аналогічна задача для портфеля інвестора з найменшою дисперсією.

Мета нашого дослідження – моделювання поведінки вибіркової оцінки бета-коефіцієнта за умов сталості ваг еталонного портфеля і портфеля інвестора, за припущення про нормальність розподілу вектора дохідностей активів та його залежність в часі. Зазначимо, що на практиці припущення про незалежність реалізацій вектора дохідностей активів в часі часто не виконуються. Наприклад, у [9] вказано на можливість наявності автокореляцій для дохідностей фінансових активів. Зважаючи на це, в даній роботі досліджується поведінка вибіркової оцінки бета-коефіцієнта портфеля зі сталими вагами за припущення, що вектор дохідностей активів портфелів поводиться як слабко стаціонарний процес Гауса, тобто є нормально розподіленим та його реалізації є автокорельованими.

За цього припущення знайдено асимптотичний розподіли вибіркової оцінки бета-коефіцієнта (розділ 2) та на основі імітаційного моделювання досліджено збіжність емпіричних розподілів вибіркової оцінки бета-коефіцієнта до відповідного асимптотичного (розділ 3).

Основні означення та позначення. У фінансовій математиці часто використовують, як основну характеристику фінансового активу, не його ціну, а (логарифмічну) дохідність, оскільки її статистичні властивості є кращими [10, с. 7-15]. Визначимо дохідність фінансового активу в момент часу t як $X_t=100\ln(P_t/P_{t-1})$, де P_t ціна фінансового активу в момент часу t. Нехай $\mathbf{w}=(w_1, w_2, \ldots, w_k)'$ – портфель інвестора (w_i – частка коштів вкладена в актив i), а $\mathbf{w}_b=(w_{1b}, w_{2b}, \ldots, w_{kb})'$ – еталонний портфель. Припустимо, що обидва портфелі складені з однакових активів. Позначимо $\mathbf{X}_t=(X_{1t}, X_{2t}, \ldots, X_{kt})'$ вектор дохідностей активів портфелів та припустимо, що він поводиться як слабко стаціонарний процес, $\mathrm{Var}(\mathbf{X}_t)=\boldsymbol{\Gamma}(0)$ його коваріаційна матриця, β – бета-коефіцієнт портфеля інвестора з вагами $\mathbf{w}$. Аналогічно до [7], припускаємо, що ваги портфеля інвестора та еталонного є сталими. Використовуючи наші позначення, з [7] отримуємо

$$\beta=\frac{\mathrm{Cov}(\mathbf{w}_b'\mathbf{X}_t,\mathbf{w}'\mathbf{X}_t)}{\mathrm{Var}(\mathbf{w}_b'\mathbf{X}_t)}=\frac{\mathbf{w}_b'\boldsymbol{\Gamma}(0)\mathbf{w}}{\mathbf{w}_b'\boldsymbol{\Gamma}(0)\mathbf{w}_b}. \tag{1}$$

Зауважимо, що матриця $\boldsymbol{\Gamma}(0)$ є невідома на практиці, тому ми змушені в своїх обчисленнях використовувати її оцінку. Найвідомішим способом оцінки невідомих параметрів розподілу випадкового вектора є історичний метод. На основі n історичних значень вектора дохідностей активів $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \ldots, \mathbf{X}_n$ знаходимо $\hat{\boldsymbol{\mu}}$ та $\hat{\boldsymbol{\Gamma}}(0)$ відповідно вибіркові оцінки метаматичного сподівання $\boldsymbol{\mu}$ та коваріаційної матриці $\boldsymbol{\Gamma}(0)$

$$\hat{\boldsymbol{\mu}}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mathbf{X}_i,\quad \hat{\boldsymbol{\Gamma}}(0)=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(\mathbf{X}_i-\hat{\boldsymbol{\mu}})(\mathbf{X}_i-\hat{\boldsymbol{\mu}})'.$$

Далі будуємо вибіркову оцінку $\hat{\beta}$ бета-коефіцієнта β

$$\hat{\beta}=\frac{\mathbf{w}_b'\hat{\boldsymbol{\Gamma}}(0)\mathbf{w}}{\mathbf{w}_b'\hat{\boldsymbol{\Gamma}}(0)\mathbf{w}_b}. \tag{2}$$

Зауважимо, що властивості вибіркової оцінки $\hat{\beta}$ залежать від властивостей вектора дохідностей активів портфелів $\mathbf{X}_t$. Часто дослідження властивостей $\hat{\beta}$ проводяться за припущення, що $\mathbf{X}_t$ має багатовимірний нормальний розподіл з параметрами $\boldsymbol{\mu}$ та $\boldsymbol{\Gamma}(0)$. Таке припущення зазнає критики серед практиків фінансового ринку, але його використання для отримання теоретичних результатів цілком виправдане. Наприклад, у [7], за припущення нормальності та неавтокорельованості реалізацій вектора дохідностей $\mathbf{X}_t$ знайдено точний розподіл $\hat{\beta}$.

ISSN 2078-6115. Вісник Львівського університету. Серія економічна. 2021. Випуск 60

У даній роботі вивчаються властивості $\hat{\beta}$ за наступного припущення: вектор $\mathbf{X}_t$ поводиться як слабко стаціонарний процес Гауса, тобто $\mathbf{X}_t$ нормально розподілений з автокорельованими реалізаціями.

Це припущення дає змогу змоделювати поводження вибіркової оцінки бета-коефіцієнта за наявності автокореляцій $\mathbf{X}_t$.

Виклад основного матеріалу дослідження

Теоретичні результати. В даному розділі знайдено асимптотичний розподіл випадкової величини $\sqrt{n}\left(\hat{\beta}-\beta\right)$ за вищесформульованого припущення.

Теорема 1. Нехай еталонний портфель та портфель інвестора сформовані з однакових k активів, вектори їх ваг w_b w є сталими, а вектор дохідностей активів портфелів X_t поводиться як стаціонарний процес Гауса з середнім $\boldsymbol{\mu}$ та матрицею автоковаріацій зі зміщення h $\boldsymbol{\Gamma}(h)$. Якщо матриця $\boldsymbol{\Gamma}(0)$ додатньо визначена, то

$$\sqrt{n}\left(\hat{\beta}-\beta\right)\xrightarrow{d} N\left(0;\sigma_{cor}^2\right),\ n\to\infty$$

де

$$\sigma_{cor}^2=\frac{1}{\sigma_b^4}\sum_{h=-\infty}^{+\infty}\left(q_h(\mathbf{w};\mathbf{w})q_h(\mathbf{w}_b;\mathbf{w}_b)+q_h(\mathbf{w};\mathbf{w}_b)^2\right)+2\frac{\beta^2}{\sigma_b^4}\sum_{h=-\infty}^{+\infty}q(\mathbf{w}_b;\mathbf{w}_b)^2-4\frac{\beta}{\sigma_b^4}\sum_{h=-\infty}^{+\infty}q_n(\mathbf{w}_b;\mathbf{w}_b)q_n(\mathbf{w};\mathbf{w}_b),$$

$\sigma_b^2=\mathbf{w}_b'\boldsymbol{\Gamma}(0)\mathbf{w}_b$ і $q_h(\mathbf{a},\mathbf{b})=\mathbf{a}'\boldsymbol{\Gamma}(h)\mathbf{b}$ для довільних k-вимірних векторів $\mathbf{a}$ і $\mathbf{b}$.

Доведення. Нехай $\boldsymbol{\mu}$, $\boldsymbol{\Gamma}(0)$ та β відповідно математичне сподівання, матриця коваріацій вектора $\mathbf{X}_t$, бета-коефіцієнт портфеля інвестора, $\boldsymbol{\theta}=(\boldsymbol{\mu}', (\mathrm{vech}(\boldsymbol{\Gamma}(0)))')'$,

$$\boldsymbol{\Theta}=\left(\left(\frac{\partial\beta}{\partial\boldsymbol{\mu}}\right)';\left(\frac{\partial\beta}{\partial\,\mathrm{vech}\,\boldsymbol{\Gamma}(\mathbf{0})}\right)'\right)',$$

$\boldsymbol{\Omega}$ – асимптотична коваріаційна матриця випадкового вектора $\sqrt{n}\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}-\boldsymbol{\theta}\right)$, яка має вигляд [11, с. 218–225]

$$\boldsymbol{\Omega}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{\Gamma}(0) & \mathbf{0}_{k\times k(k+1)/2}\\ \mathbf{0}_{k(k+1)/2\times k} & \mathbf{D}_k^{+}\left(\mathbf{I}_{k^2}+\mathbf{K}_k\right)\sum_{h=-\infty}^{+\infty}\left(\boldsymbol{\Gamma}(h)\otimes\boldsymbol{\Gamma}(h)\right)\mathbf{D}_k^{+\prime}\end{pmatrix}.$$

Завдяки твердженню 6.4.2 з [11, с. 211] отримуємо, що випадкова величина $\sqrt{n}\left(\hat{\beta}-\beta\right)$ асимптотично нормально розподілена з середнім 0 та дисперсією

$\sigma^2_{cor}=\boldsymbol{\Theta}'\boldsymbol{\Omega}\boldsymbol{\Theta}$.

Оскільки ([12, с. 369-371]) для довільних k-вимірних векторів $\mathbf{a}$ і $\mathbf{b}$ і довільної симетричної матриці $\mathbf{A}$ порядку k виконується $\frac{\partial\mathbf{a}'\mathbf{A}\mathbf{b}}{\partial\,\mathrm{vech}\,\mathbf{A}}=\mathbf{D}_k'(\mathbf{b}\otimes\mathbf{a})$ та $\frac{\partial\beta}{\partial\boldsymbol{\mu}}=\mathbf{0}$, то

ISSN 2078-6115. Вісник Львівського університету. Серія економічна. 2021. Випуск 60

маємо
$$\frac{\partial \hat{a}}{\partial\, \mathrm{vech}\, \tilde{\mathbf{A}}(0)} = \frac{\mathbf{D}_k'(\mathbf{w}\otimes\mathbf{w}_b)(\mathbf{w}_b'\tilde{\mathbf{A}}(0)\mathbf{w}_b) - \mathbf{D}_k'(\mathbf{w}_b\otimes\mathbf{w}_b)\mathbf{w}_b'\tilde{\mathbf{A}}(0)\mathbf{w}}{(\mathbf{w}_b'\tilde{\mathbf{A}}(0)\mathbf{w}_b)^2},$$

де $\otimes$ – добуток Кронекера двох матриць. Отже,

$$\acute{o}_{cor}^2 = \left(\frac{\partial \hat{a}}{\partial\, \mathrm{vech}\, \tilde{\mathbf{A}}(0)}\right)' \mathbf{D}_k^+(\mathbf{I}_{k^2} + \mathbf{K}_k)\sum_{h=\infty}^{+\infty}(\tilde{\mathbf{A}}(h)\otimes\tilde{\mathbf{A}}(h))\mathbf{D}_k^{+\prime}\left(\frac{\partial \hat{a}}{\partial\, \mathrm{vech}\, \tilde{\mathbf{A}}(0)}\right) =$$
$$\frac{1}{(\mathbf{w}_b'\tilde{\mathbf{A}}(0)\mathbf{w}_b)^4}\left((\mathbf{w}\otimes\mathbf{w}_b)(\mathbf{w}_b'\tilde{\mathbf{A}}(0)\mathbf{w}_b) - (\mathbf{w}_b\otimes\mathbf{w}_b)(\mathbf{w}_b'\tilde{\mathbf{A}}(0)\mathbf{w})\right)' \times$$
$$\times \mathbf{D}_k\mathbf{D}_k^+(\mathbf{I}_{K^2} + \mathbf{K}_k)\left(\sum_{h=\infty}^{\infty}(\tilde{\mathbf{A}}(h)\otimes\tilde{\mathbf{A}}(h))\right)\mathbf{D}_k^+\mathbf{D}_k' \times \left((\mathbf{w}\otimes\mathbf{w}_b)(\mathbf{w}_b'\tilde{\mathbf{A}}(0)\mathbf{w}_b) - (\mathbf{w}_b\otimes\mathbf{w}_b)(\mathbf{w}_b'\tilde{\mathbf{A}}(0)\mathbf{w})\right)$$

Врахувавши, що для довільної матриці **A** порядку k виконується [13, с. 48-49] $\mathbf{D}_k\mathbf{D}_k^+ = \frac{1}{2}(\mathbf{I}_{k^2} + \mathbf{K}_k) = \mathbf{N}_k$, $\mathbf{N}_k(\mathbf{A}\otimes\mathbf{A}) = (\mathbf{A}\otimes\mathbf{A})\mathbf{N}_k$, $\mathbf{N}_k = \mathbf{N}_k^2 = \mathbf{N}_k'$, отримуємо

$$\acute{o}_{cor}^2 = \frac{1}{(\mathbf{w}_b'\tilde{\mathbf{A}}(0)\mathbf{w}_b)^4}\left((\mathbf{w}\otimes\mathbf{w}_b)(\mathbf{w}_b'\tilde{\mathbf{A}}(0)\mathbf{w}_b) - (\mathbf{w}_b\otimes\mathbf{w}_b)(\mathbf{w}_b'\tilde{\mathbf{A}}(0)\mathbf{w})\right)' \times$$
$$\times(\mathbf{I}_{k^2} + \mathbf{K}_k)\left(\sum_{h=\infty}^{\infty}\tilde{\mathbf{A}}(h)\otimes\tilde{\mathbf{A}}(h)\right)\times\left((\mathbf{w}\otimes\mathbf{w}_b)(\mathbf{w}_b'\tilde{\mathbf{A}}(0)\mathbf{w}_b) - (\mathbf{w}_b\otimes\mathbf{w}_b)(\mathbf{w}_b'\tilde{\mathbf{A}}(0)\mathbf{w})\right) =$$
$$= \frac{1}{(\mathbf{w}_b'\tilde{\mathbf{A}}(0)\mathbf{w}_b)^4}\left((\mathbf{w}\otimes\mathbf{w}_b)(\mathbf{w}_b'\tilde{\mathbf{A}}(0)\mathbf{w}_b) - (\mathbf{w}_b\otimes\mathbf{w}_b)(\mathbf{w}_b'\tilde{\mathbf{A}}(0)\mathbf{w})\right)\times$$
$$\times\left(\sum_{h=\infty}^{\infty}\tilde{\mathbf{A}}(h)\otimes\tilde{\mathbf{A}}(h)\right)\times\left((\mathbf{w}\otimes\mathbf{w}_b)(\mathbf{w}_b'\tilde{\mathbf{A}}(0)\mathbf{w}_b) - (\mathbf{w}_b\otimes\mathbf{w}_b)(\mathbf{w}_b'\tilde{\mathbf{A}}(0)\mathbf{w})\right) +$$
$$+ \frac{1}{(\mathbf{w}_b'\tilde{\mathbf{A}}(0)\mathbf{w}_b)^4}\left((\mathbf{w}\otimes\mathbf{w}_b)(\mathbf{w}_b'\tilde{\mathbf{A}}(0)\mathbf{w}_b) - (\mathbf{w}_b\otimes\mathbf{w}_b)(\mathbf{w}_b'\tilde{\mathbf{A}}(0)\mathbf{w})\right)\times$$
$$\times\mathbf{K}_k\left(\sum_{h=\infty}^{\infty}\tilde{\mathbf{A}}(h)\otimes\tilde{\mathbf{A}}(h)\right)\times\left((\mathbf{w}\otimes\mathbf{w}_b)(\mathbf{w}_b'\tilde{\mathbf{A}}(0)\mathbf{w}_b) - (\mathbf{w}_b\otimes\mathbf{w}_b)(\mathbf{w}_b'\tilde{\mathbf{A}}(0)\mathbf{w})\right).$$

Далі, для довільних k-вимірних ($k\times 1$) векторів **a**, **b** (див., наприклад [12, с. 351]) $(\mathbf{a}'\otimes\mathbf{b}')\mathbf{K}_k = \mathbf{b}'\otimes\mathbf{a}'$, а отже,

ISSN 2078-6115. Вісник Львівського університету. Серія економічна. 2021. Випуск 60

$$\acute{o}^2_{cor} = \frac{1}{\left(\mathbf{w}'_b\tilde{\mathbf{A}}(0)\mathbf{w}_b\right)^4}\left(\left(\mathbf{w}\otimes\mathbf{w}_b\right)\left(\mathbf{w}'_b\tilde{\mathbf{A}}(0)\mathbf{w}_b\right)-\left(\mathbf{w}_b\otimes\mathbf{w}_b\right)\left(\mathbf{w}'_b\tilde{\mathbf{A}}(0)\mathbf{w}\right)\right)'\times$$

$$\times\left(\sum_{h=\infty}^{+\infty}\tilde{\mathbf{A}}(h)\otimes\tilde{\mathbf{A}}(h)\right)\times\left(\left(\mathbf{w}\otimes\mathbf{w}_b\right)\left(\mathbf{w}'_b\tilde{\mathbf{A}}(0)\mathbf{w}_b\right)-\left(\mathbf{w}_b\otimes\mathbf{w}_b\right)\left(\mathbf{w}'_b\tilde{\mathbf{A}}(0)\mathbf{w}\right)\right)+$$

$$+\frac{1}{\left(\mathbf{w}'_b\tilde{\mathbf{A}}(0)\mathbf{w}_b\right)^4}\left(\left(\mathbf{w}_b\otimes\mathbf{w}\right)\left(\mathbf{w}'_b\tilde{\mathbf{A}}(0)\mathbf{w}_b\right)-\left(\mathbf{w}_b\otimes\mathbf{w}_b\right)\left(\mathbf{w}'_b\tilde{\mathbf{A}}(0)\mathbf{w}\right)\right)\times$$

$$\times\mathbf{K}_k\left(\sum_{h=\infty}^{+\infty}\tilde{\mathbf{A}}(h)\otimes\tilde{\mathbf{A}}(h)\right)\times\left(\left(\mathbf{w}\otimes\mathbf{w}_b\right)\left(\mathbf{w}'_b\tilde{\mathbf{A}}(0)\mathbf{w}_b\right)-\left(\mathbf{w}_b\otimes\mathbf{w}_b\right)\left(\mathbf{w}'_b\tilde{\mathbf{A}}(0)\mathbf{w}\right)\right)=$$

$$=\frac{1}{\left(\mathbf{w}'_b\tilde{\mathbf{A}}(0)\mathbf{w}_b\right)^4}\Bigg(\left(\mathbf{w}'_b\tilde{\mathbf{A}}(0)\mathbf{w}_b\right)^2\sum_{h=\infty}^{+\infty}\left(\mathbf{w}'\tilde{\mathbf{A}}(h)\mathbf{w}\right)\left(\mathbf{w}'_b\tilde{\mathbf{A}}(h)\mathbf{w}_b\right)+\left(\mathbf{w}'_b\tilde{\mathbf{A}}(0)\mathbf{w}_b\right)^2\sum_{h=\infty}^{+\infty}\left(\mathbf{w}'\tilde{\mathbf{A}}(h)\mathbf{w}_b\right)^2+$$

$$+2\left(\mathbf{w}'_b\tilde{\mathbf{A}}(0)\mathbf{w}\right)^2\sum_{h=\infty}^{+\infty}\left(\mathbf{w}'_b\tilde{\mathbf{A}}(h)\mathbf{w}_b\right)^2-4\left(\mathbf{w}'_b\tilde{\mathbf{A}}(0)\mathbf{w}_b\right)\left(\mathbf{w}'_b\tilde{\mathbf{A}}(0)\mathbf{w}\right)\sum_{h=\infty}^{+\infty}\left(\mathbf{w}'_b\tilde{\mathbf{A}}(h)\mathbf{w}_b\right)\left(\mathbf{w}'_b\tilde{\mathbf{A}}(h)\mathbf{w}\right).$$

Позначивши $\acute{o}^2_b = \mathbf{w}'_b\tilde{\mathbf{A}}(0)\mathbf{w}_b$ та $q_h(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \mathbf{a}'\mathbf{\Gamma}(h)\mathbf{b}$ для довільних k-вимірних векторів **a**, **b** та врахувавши (1), отримаємо твердження теореми.

Зауважимо, що асимптотична дисперсія σ_{cor} залежить від невідомих на практиці автоковаріаційних матриць $\mathbf{\Gamma}(h)$ вектора дохідностей $\mathbf{X}_t$. Однак з теореми 1.14 роботи [14, с. 8] випливає, що вибіркова оцінка σ_{cor} консистентна, а отже, може бути використана на практиці.

Імітаційне моделювання. Можливість застосування асимптотичних результатів на практиці обгрунтоване в [15] у випадку коли неможливо отримати точні результати. Однак для використання таких результати з метою прийняття рішень, необхідно додатково дослідити швидкість збіжності емпіричних густин до асимптотичної. Для цього використаємо наступний алгоритм. На основі даних про щоденні дохідності акцій 30 компаній з переліку Dow Jones за період з 01.01.2017 до 14.04.2021 (всього 1077 спостережень) оцінимо необхідні параметри. Використаємо припущення, що вектор дохідностей $\mathbf{X}_t$ поводиться як $VAR(p)$ (vector autoregressive) процес. На основі вибраних даних про дохідності акцій спочатку оцінимо порядок моделі p, а потім параметри самої моделі. Надалі приймемо, що оцінки, які ми отримали, є точними значеннями параметрів моделі. За ваги еталонного портфеля візьмемо портфель DJIA станом на 14.04.2021.

Розглянемо 6 портфелів інвестора, які складаються з k={5, 10, 15, 20, 25, 30} перших акцій посортованих в алфавітному порядку з переліку Dow Jones з однаковими вагами. Оскільки еталонний портфель є 30-вимірним, то розглянуті нами портфелі теж будуть 30-вимірними, але, наприклад, для портфеля з 10 перших акцій посортованих в алфавітному порядку з переліку Dow Jones, портфель буде складатися з 10

ISSN 2078-6115. Вісник Львівського університету. Серія економічна. 2021. Випуск 60

перших ваг, що дорівнюють 0.1, а інші ваги будуть дорівнювати 0. Для кожного з портфелів інвестора згенеруємо вибірку з моделі обсягу n та оцінимо на її основі бета-коефіцієнт. Повторимо цю процедуру 100000 разів для кожного портфеля та на основі отриманих значень побудуємо емпіричну густину, яку порівнюватимемо з відповідною асимптотичною. Також порівняємо емпіричні середні значення та дисперсії з відповідними асимптотичними значеннями.

В табл. подано емпіричні середні значення та дисперсії з відповідними асимптотичними значеннями для випадкової величини $\sqrt{n}\left(\hat{\hat{a}} - \hat{a}\right)$, а на рис. 1 зображено емпіричні густини цієї випадкової величини. Бачимо, що збіжність емпіричних середніх значень та дисперсій до асимптотичних є доволі швидкою. При обсязі вибірки, що дорівнює 120 спостережень отримано задовільне наближення. Даний висновок повністю підтверджується графічним представленням густин на рис.

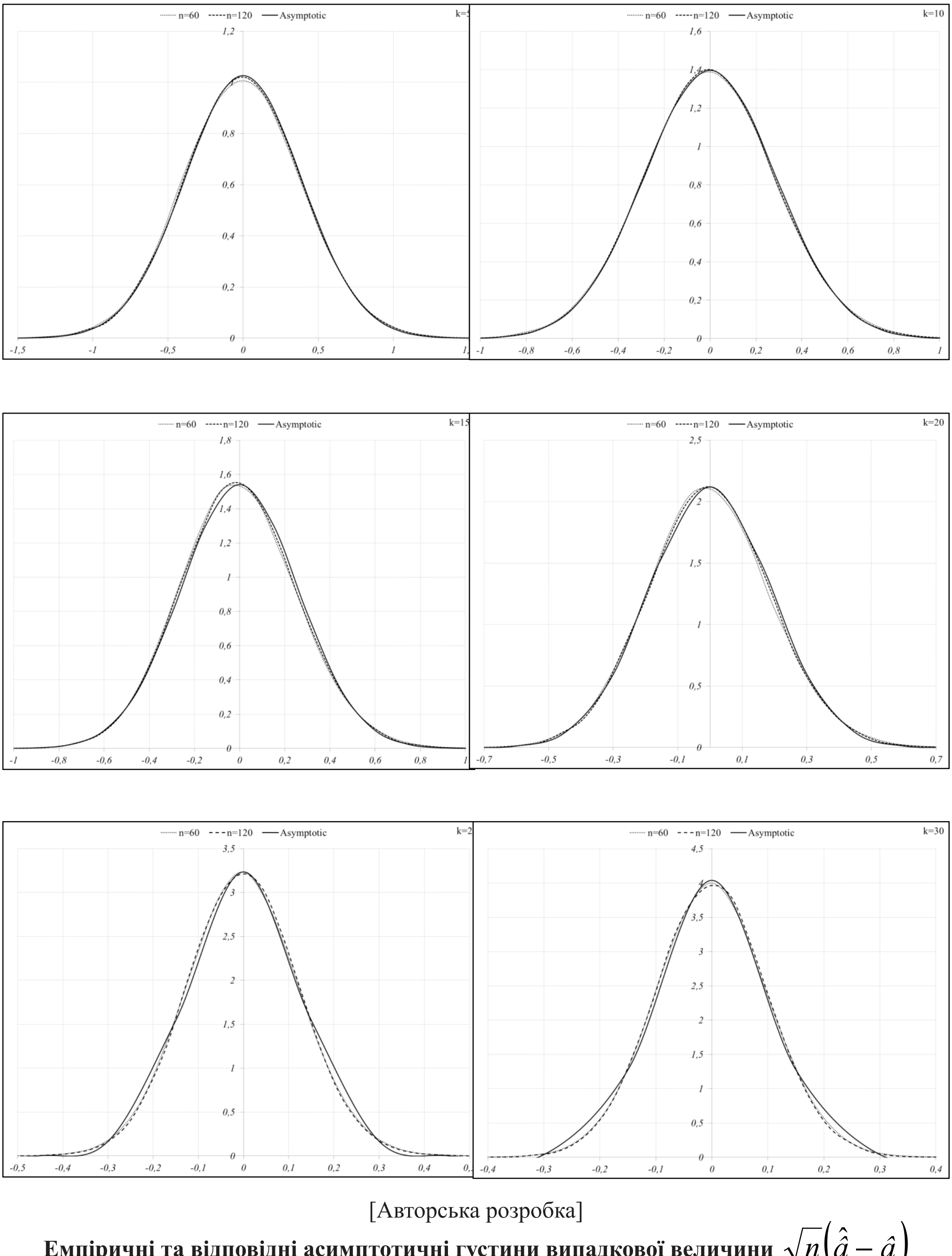
Емпіричні та асимптотичні середні значення та дисперсії випадкової величини

$$\sqrt{n}\left(\hat{\hat{a}} - \hat{a}\right)$$

		n=60	n=120	n=250	n=500	Асимптотичний
k=5	Середнє	–0,00583	-0,001907	–0,00329	–0,00421	0
	Дисперсія	0,156572	0,15285	0,15191	0,15071	0,15098
k=10	Середнє	–0,00216	–0,00151	–0,00256	–0,00292	0
	Дисперсія	0,083603	0,082035	0,08086	0,08151	0,08156
k=15	Середнє	–0,00590	–0,00302	–0,00138	–0,00146	0
	Дисперсія	0,06739	0,06670	0,06614	0,06649	0,06701
k=20	Середнє	–0,00338	–0,00119	–0,00008	0,00057	0
	Дисперсія	0,03651	0,03572	0,03542	0,03543	0,03543
k=25	Середнє	–0,00137	–0,00056	0,00043	0,00017	0
	Дисперсія	0,01555	0,01524	0,01502	0,01507	0,01521
k=30	Середнє	–0,00032	–0,00017	–0,00006	0,00059	0
	Дисперсія	0,01020	0,00996	0,00971	0,00970	0,00976

[Авторська розробка].

Висновки. В роботі знайдено асимптотичний розподіл вибіркової оцінки бета-коефіцієнта за умов, що ваги портфелів інвестора та еталонного є сталими, обидва портфелі складаються з однакових фінансових активів, вектор дохідностей $\mathbf{X}_t$ яких поводиться як слабко стаціонарний процес Гауса, тобто $\mathbf{X}_t$ є нормально розподіленим з автокорельоаваними реалізаціями.



[Авторська розробка]

Емпіричні та відповідні асимптотичні густини випадкової величини $\sqrt{n}\left(\hat{\hat{a}} - \hat{a}\right)$ для *k*=5 (зліва зверху), *k*=10 (справа зверху), *k*=15 (зліва по центру), *k*=20 (справа по центру), *k*=25 (зліва внизу) та *k*=30 (справа внизу)

На підставі імітаційного моделювання з'ясовано, що збіжність емпіричних розподілів до асимптотичного є доволі швидкою. Наприклад, при обсягу вибірки зі 120 спостережень досягається добре наближення емпіричних середніх значень та дисперсій відповідними асимптотичними. При кількості 30-ти активів у портфелях та при обсязі вибірки 120 спостережень історичних даних, емпіричні середнє значення та дисперсія становлять (–0,00017) та 0,00996 при асимптотичному середньому значенні 0, дисперсії – 0,00976 та при точному значенні бета-коефіцієнта 0,92704. Отже, отримані асимптотичні результати можуть бути використані на практиці для моделювання поведінки вибіркової оцінки бета коефіцієнта за сталих ваг еталонного портфеля та портфеля інвестора, оскільки в обох випадках за помірних обсягів вибірок історичних значень вдалося отримати задовільне наближення емпіричних густин відповідними асимптотичними.

Список використаних джерел

1. Bodnar T. Distributions of the weights of sample optimal portfolios in multivariate conditionally heteroscedastic elliptical models / T. Bodnar, T. Zabolotskyy // *Journal of money, investment and banking.* – 2008. – №1. – P. 5–23.
2. Bodnar T. Estimation of the global minimum variance portfolio in high dimensions / T. Bodnar, N. Parolya, W. Schmid // European journal of operational research. – 2018. – № 266. – P. 371–390.
3. Bodnar T. Minimum VaR and Minimum CVaR optimal portfolios: estimators, confidence regions, and tests / T. Bodnar, W. Schmid, T. Zabolotskyy // Statistics & risk modeling. – 2012. – № 29. – P. 281–314.
4. Bodnar T. Asymptotic behavior of the estimated weights and of the estimated performance measures of the minimum VaR and the minimum CVaR optimal portfolios for dependent data / T. Bodnar, W. Schmid, T. Zabolotskyy // Metrica. – 2013. – №76. – P. 1105–1134.
5. Okhrin Y. Distributional properties of optimal portfolio weights / Y. Okhrin, W. Schmid // Journal of econometrics. – 2006. – № 134. – P. 235–256.
6. Bodnar T. How risky is the optimal portfolio which maximizes the Sharpe ratio? / T. Bodnar, T. Zabolotskyy // *ASTA – Advances in statistical analysis*. – 2017. – № 101 (1). – P. 1–28.
7. Bodnar T. Statistical inference for the β coefficient. / T. Bodnar, A. K. Gupta, V. Vitlinskiy, T. Zabolotskyy // Risks. – 2019. – № 7 (2). – 56.
8. Yaroshko S. M. Properties of the beta-coefficient of the global minimum variance portfolio / S. M. Yaroshko, M. V. Zabolotskyy, T. M. Zabolotskyy // Mathematical modeling and computing. – 2021. – Vol. 8, No. 1. – P. 11–21.
9. Nelson D. B. Conditional heteroscedasticity in stock returns: a new approach / D. B. Nelson // Econometrica. – 1991. – № 59. – P. 347–370.
10. Fan J. The elements of financial econometrics / J. Fan, Q. Yao. – Beijing : Science Press, 2015. – 383 p.
11. Brockwell P. J. Time series: theory and methods / P. J. Brockwell, R. A. Davis. – New York : Springer Science+Business Media. 2006. – 600 p.
12. Harville D. A. Matrix algebra from a statistician's perspective / D. A. Harville. – New York : Springer Science+Business Media. 2008. – 634 p.
13. Magnus J. R. Matrix differential calculus with applications in statistics and econometrics / J. R. Magnus, H. Neudecker. – New York : Wiley. – 1999. – 450 p.

ISSN 2078-6115. Вісник Львівського університету. Серія економічна. 2021. Випуск 60

14. DasGupta A. Asymptotic theory of statistics and probability / A. DasGupta. – New York : Springer. 2008. – 722 p.
15. Ling S. Asymptotic theory for a vector ARMA-GARCH model / S. Ling, M. McAleer // Econometric theory. – 2003. – № 19. – P. 280–310.

References

1. Bodnar T., Zabolotskyy T. (2008). Distributions of the weights of sample optimal portfolios in multivariate conditionally heteroscedastic elliptical models. *Journal of money, investment and banking.* №1. P. 5–23.
2. Bodnar T., Parolya N., Schmid W. (2018). Estimation of the global minimum variance portfolio in high dimensions. *European journal of operational research*. № 266. P. 371–390.
3. Bodnar T., Schmid W., Zabolotskyy T. (2012). Minimum VaR and Minimum CVaR optimal portfolios: estimators, confidence regions, and tests. *Statistics & risk modeling*. №29. P. 281–314.
4. Bodnar T., Schmid W., Zabolotskyy T. (2013). Asymptotic behavior of the estimated weights and of the estimated performance measures of the minimum VaR and the minimum CVaR optimal portfolios for dependent data. *Metrica*. №76. P. 1105–1134.
5. Okhrin Y., Schmid W. (2006). Distributional properties of optimal portfolio weights. *Journal of econometrics*. № 134. P. 235–256.
6. Bodnar T., Zabolotskyy T. (2017). How risky is the optimal portfolio which maximizes the Sharpe ratio? *ASTA – Advances in statistical analysis*. № 101 (1). P. 1–28.
7. Bodnar T., Gupta A. K., Vitlinskiy V., Zabolotskyy T. (2019). Statistical inference for the β coefficient. *Risks*. № 7 (2). 56.
8. Yaroshko S. M., Zabolotskyy M. V., Zabolotskyy T. M. (2021). Properties of the beta-coefficient of the global minimum variance portfolio. *Mathematical modeling and computing*. Vol. 8, № 1. P. 11–21.
9. Nelson D. B. (1991). Conditional heteroscedasticity in stock returns: a new approach. *Econometrica*. № 59. P. 347–370.
10. Fan J., Yao Q. (2015). The elements of financial econometrics. Beijing : Science Press. 383 p.
11. Brockwell P. J., Davis R. A. (2006). Time series: theory and methods. New York : Springer Science+Business Media. 600 p.
12. Harville D. A. (2008). Matrix algebra from a statistician's perspective. – New York : Springer Science+Business Media. 634 p.
13. Magnus J. R., Neudecker H. (1999). Matrix differential calculus with applications in statistics and econometrics. New York : Wiley. 450 p.
14. DasGupta A. (2008). Asymptotic theory of statistics and probability. New York : Springer. 722 p.
15. Ling S., McAleer M. (2003). Asymptotic theory for a vector ARMA-GARCH model. *Econometric theory*. № 19. P. 280–310.

MODELING THE SAMPLE ESTIMATOR OF THE BETA-COEFFICIENT OF THE CONSTANT WEIGHTS PORTFOLIO UNDER AUTOCORRELATION OF THE ASSET RETURNS

Mykola Zabolotskyy, Taras Zabolotskyy, Maksym Petryshyn

Ivan Franko Lviv National University,
79000, 1 Universytetska St., Lviv
e-mail: mykola.zabolotskyy@lnu.edu.ua;
taras.zabolotskyy@lnu.edu.ua;
maksym.petryshyn.pmo@lnu.edu.ua

Abstract. The paper is dedicated to the study of the properties of the sample estimator of the beta-coefficient in the case when the benchmark and investors' portfolios consist of the same assets and their weights are constant. The beta-coefficient is one of the tools most frequently used for systematic risk measurement. It indicates whether systematic risk of investor's portfolio is higher or lower than the risk of some benchmark portfolio. In general, it depends on the parameters of the distribution of the asset returns vector that are unknown in practice. That is why we operate with estimators which are random variables. We use the following assumption concerning the vector of the asset returns included into the benchmark and investors' portfolios: it is multivariate normally distributed and it is autocorrelated. Under this assumption, the asymptotic distribution of the sample estimator of the beta-coefficient is found. For simulation study with 100,000 repetitions, we use vector autoregressive process with normally distributed residuals of order p for modelling the behavior of the asset returns vector. The true values of the parameters of the considered model of the asset returns vector behavior are taken as the corresponding estimators from the sample of historical values of daily returns of assets included into the Dow Jones index for the period from January 01, 2017 to April 14, 2021. For the benchmark portfolio, we take the DJIA portfolio as of April 14, 2021. For the investors portfolio we take the equally-weighted portfolio of six dimensions, viz. {5, 10, 15, 20, 25, 30}, which consists of the corresponding first k assets included into the Dow Jones index in the alphabetical order. It is shown that, according to our assumption, the asymptotic density provides good approximation to the empiric density even for sample size equal to 120 observations.

Keywords: beta-coefficient, assets portfolio, sample estimator, asymptotic distribution, simulation study.

Стаття надійшла до редакції 15.09.2021
Прийнята до друку 24.11.2021