ISSN 2078-6115. Вісник Львівського університету. Серія економічна. 2019. Випуск 57. С. 18-29
Visnyk of the Lviv University. Series Economics. 2019. Issue 57. P. 18-29

УДК 336.76:311.15 DOI: http://dx.doi.org/10.30970/ves.2019.57.0.4003

ЕМПІРИЧНИЙ АНАЛІЗ БЕТА КОЕФІЦІЄНТА ПОРТФЕЛЯ З МАКСИМАЛЬНИМ ВІДНОШЕННЯМ ШАРПА

М. Заболоцький, Т. Заболоцький

Львівський національний університет імені Івана Франка
79000 м. Львів, вулиця Університетська 1
E-mail: m_zabol@lnu.edu.ua, zjabka@yahoo.com

За допомогою бета коефіцієнта досліджується значущість різниці портфелем із максимальним відношенням Шарпа та з постійними вагами. Знайдено аналітичні вирази для обчислення бета коефіцієнта у двох випадках: коли портфель з максимальним відношенням Шарпа є еталонним або цільовим. Показано неможливість використання на практиці бета коефіцієнта якщо портфель з максимальним відношенням Шарпа є цільовим, оскільки не існує математичне сподівання його вибіркової оцінки. За припущення нормально розподіленості вектора дохідностей активів портфеля знайдено асимптотичний розподіл вибіркової оцінки бета коефіцієнта, отримано статистичний тест та побудовано довірчий інтервал для бета коефіцієнта у випадку еталонності портфеля із максимальним відношенням Шарпа. Теоретичні результати роботи реалізовані в емпіричному дослідженні. Підсумовано, що використання запропонованого методу порівняння портфелів на практиці доцільно за наявності вибірки історичних значень дохідностей з відносно великим обсягом (n> 5000) і кількістю активів у портфелі не менше 20.
Ключові слова: *відношення Шарпа, бета коефіцієнт, асимптотичний розподіл, оцінка параметрів, нормальний розподіл.*

1. Вступ

Теорія портфеля бере свій початок з роботи Марковіца [1], в якій вперше було описано алгоритм вибору раціональної структури портфеля фінансових активів шляхом оптимізації характеристик портфеля – очікуваної дохідності та ризику. Більш загально питання вибору структури портфеля було розглянуто Мертоном в [2], де було введено поняття ефективної множини портфелів. Портфелям, що належать ефективній множині притаманна властивість: неможливо збільшити очікувану дохідність цих портфелів не збільшуючи їх ризик та неможливо зменшити їх ризик не зменшивши їх очікувану дохідність. За класичною теорією портфель інвестора з раціональною структурою повинен належати ефективній множині. Існують різні критерії вибору раціональної структури портфеля: максимізація очікуваної корисності [3]-[5], мінімізація ризику [6]-[8], максимізація відношення Шарпа [9]-[12]. Оскільки відношення Шарпа є одним з головних показників управління портфелем фінансових активів [13], то цікавим, як з теоретичної так і з практичної точок зору, є метод вибору раціональної структури портфеля фінансових активів шляхом максимізації цього відношення.

Властивості портфеля з максимальним відношенням Шарпа досліджувалися в [3], [10]-[11]. Зазначимо, що властивості такого портфеля є доволі неоднозначними. З одного боку, як показано в [11], такий підхід до вибору раціональної структури портфеля не залежить від вибору міри ризику (дисперсія, VaR чи CVaR), що однозначно є доброю властивістю. З іншого боку, в [3] і [10] відповідно доведено, що для вибіркових оцінок ваг такого портфеля не існує математичного сподівання та неможливість побудови незміщеної оцінки цих ваг. Обидві ці властивості є поганими з точки зору математичної статистики. Також в [12] показано, що портфель з максимальним відношенням Шарпа є доволі ризиковим, що разом з невизначеністю оцінок його ваг та характеристик, змушує з обережністю використовувати цей портфель на практиці. Враховуючи вищенаведені недоліки портфеля з максимальним відношенням Шарпа, виникає питання: чи можливо використати на практиці портфель з кращими властивостями (наприклад, зі сталими вагами) та характеристиками, що істотно не відрізняються від характеристик портфеля з максимальним відношенням Шарпа. Для відповіді на це питання необхідно побудувати статистичний тест, який дасть змогу оцінити відмінність між характеристиками портфелів. Отже, метою роботи є побудова статистичного тесту для порівняння характеристик портфеля з максимальним відношенням Шарпа та портфеля зі сталими вагами.

Для побудови тесту використовуємо бета коефіцієнт, оскільки як зазначено вище, використання характеристик портфеля з максимальним відношенням Шарпа не є коректним. Бета коефіцієнт визначає співвідношення між дохідностями портфелів інвестора (цільового) та ринкового (еталонного) і відіграє центральну роль у теорії CAPM. Існують два методи його обчислення [14]: бета коефіцієнт портфеля визначається шляхом взяття середнього зваженого коефіцієнта бета кожного активу портфеля або шляхом регресування дохідності портфеля на дохідність ринкового портфеля. У [15] доведено їх еквівалентність за використання методу найменших квадратів (OLS) для оцінки параметрів лінійної регресійної моделі. Оскільки значення бета коефіцієнта залежить від невідомих параметрів розподілу дохідностей активів портфеля, то інвестор змушений у своїх розрахунках покладатися на їх оцінки, які в загальному випадку є випадковими величинами. В [16] досліджено статистичні властивості вибіркової оцінки бета коефіцієнта за умови сталості ваг обох портфелів (цільового і еталонного) та нормально розподіленості вектора дохідностей активів, включених у ці портфелі. За таких припущень обидва вищезгаданих методи обчислення бета коефіцієнта є еквівалентними. Ваги портфеля з максимальним відношенням Шарпа залежать від параметрів розподілу вектора дохідностей активів, а тому ми не можемо використати результати отримані в [16].

В другому параграфі цієї роботи за умови відсутності безризикового розміщення коштів, знайдено аналітичні вирази для обчислення бета коефіцієнта у випадках, коли портфель з максимальним відношенням Шарпа є відповідно цільовим або еталонним, а інший – портфелем зі сталими вагами; досліджено можливість використання їх вибіркових оцінок на практиці; обґрунтовано некоректність використання на практиці бета коефіцієнта у випадку, якщо портфель з максимальним відношенням Шарпа є цільовим; отримано асимптотичний розподіл вибіркової оцінки бета коефіцієнта за умови еталонності портфеля з максимальним відношенням Шарпа та на його основі побудовано статистичний тест для перевірки значення бета коефіцієнта.

В третьому параграфі на основі даних про ціни акцій, включених до індексу DAX, досліджено швидкість збіжності емпіричних розподілів до асимптотичного та на основі аналізу зроблено висновок про доцільність використання побудованого тесту на практиці.

2. Бета коефіцієнт портфеля з максимальним відношенням Шарпа

За умови відсутності безризикового розміщення коштів формуємо портфель з k фінансових активів. Позначимо $\mathbf{X}_t=(X_{1t}, X_{2t}, \ldots, X_{kt})'$ вектор дохідностей активів портфеля в момент часу t та припустимо, що вектор $\mathbf{X}_t$ має k-вимірний нормальний розподіл з параметрами $\boldsymbol{\mu}$ та $\boldsymbol{\Sigma}$ ($\mathbf{X}_t \sim N_k(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$). В цьому випадку ваги та характеристики портфеля фінансових активів з максимальним відношенням Шарпа мають вигляд [8]

$$\mathbf{w}_{SR} = \frac{\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\boldsymbol{\mu}}{\mathbf{1}'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\boldsymbol{\mu}}, \qquad (1)$$

$$R_{SR} = \frac{\boldsymbol{\mu}'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\boldsymbol{\mu}}{\mathbf{1}'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\boldsymbol{\mu}}, \qquad (2)$$

$$V_{SR} = \frac{\boldsymbol{\mu}'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\boldsymbol{\mu}}{\left(\mathbf{1}'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\boldsymbol{\mu}\right)^2}. \qquad (3)$$

Бачимо, що характеристики (1)-(3) портфеля з максимальним відношенням Шарпа залежать від невідомих на практиці параметрів $\boldsymbol{\mu}$ та $\boldsymbol{\Sigma}$ розподілу дохідностей його активів. Насамперед необхідно оцінити $\boldsymbol{\mu}$ та $\boldsymbol{\Sigma}$ та на їх основі отримати оцінки характеристик портфеля з максимальним відношенням Шарпа. Найрозповсюдженішими оцінками невідомих параметрів розподілу є вибіркові оцінки, які отримуються на основі вибірки попередніх значень векторів дохідностей активів $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \ldots, \mathbf{X}_n$. Тоді вибіркові оцінки параметрів $\boldsymbol{\mu}$ та $\boldsymbol{\Sigma}$ матимуть вигляд

$$\hat{\boldsymbol{\mu}} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mathbf{X}_i\,,\; \hat{\boldsymbol{\Sigma}} = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(\mathbf{X}_i - \hat{\boldsymbol{\mu}})(\mathbf{X}_i - \hat{\boldsymbol{\mu}})'. \qquad (4)$$

Підставивши оцінки (4) у (1)-(3), отримаємо оцінки характеристик портфеля

$$\hat{\mathbf{w}}_{SR} = \frac{\hat{\boldsymbol{\Sigma}}^{-1}\hat{\boldsymbol{\mu}}}{\mathbf{1}'\hat{\boldsymbol{\Sigma}}^{-1}\hat{\boldsymbol{\mu}}}, \qquad (5)$$

$$\hat{R}_{SR} = \frac{\hat{\boldsymbol{\mu}}'\hat{\boldsymbol{\Sigma}}^{-1}\hat{\boldsymbol{\mu}}}{\mathbf{1}'\hat{\boldsymbol{\Sigma}}^{-1}\hat{\boldsymbol{\mu}}}, \qquad (6)$$

$$\hat{V}_{SR} = \frac{\hat{\boldsymbol{\mu}}'\hat{\boldsymbol{\Sigma}}^{-1}\hat{\boldsymbol{\mu}}}{\left(\mathbf{1}'\hat{\boldsymbol{\Sigma}}^{-1}\hat{\boldsymbol{\mu}}\right)^2}. \qquad (7)$$

В [3] досліджено властивості вибіркової оцінки (5) ваг портфеля з максимальним відношенням Шарпа та показано, що для неї не існує математичного сподівання. В [10] доведено неможливість побудови незміщеної оцінки для ваг такого портфеля. Аналогічні результати можна отримати і для оцінок очікуваної дохідності (6) та дисперсії (7). Тому використання оцінок характеристик портфеля з максимальним відношенням Шарпа (5)-(7) для порівняння його з іншими портфелями на практиці не є коректним. Ми дослідимо властивості вибіркових оцінок бета коефіцієнта у двох випадках: коли портфель з максимальним відношенням Шарпа є цільовим або еталонним, а інший – портфелем зі сталими вагами та на основі проведеного аналізу визначимо можливість використання цих оцінок на практиці.

Нехай цільовий та еталонний портфелі складені з однакових k активів та позначимо ваги цільового портфеля через $\mathbf{w}=(w_1, w_2, \dots, w_k)'$, а ваги еталонного портфеля $\mathbf{w}_{et}=(w_{et1}, w_{et2}, \dots, w_{etk})'$. З [16] маємо

$$\beta = \frac{\mathbf{w}'\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{w}_{et}}{\mathbf{w}'_{et}\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{w}_{et}}, \qquad (8)$$

Обчислимо значення бета коефіцієнтів для наших двох випадків. Позначимо β_{SR1} та β_{SR2} – бета коефіцієнти, коли портфель з максимальним відношенням Шарпа є відповідно цільовим та еталонним. Позначивши через $\mathbf{w}$ ваги портфеля зі сталими вагами, та підставивши у (8) замість відповідних ваг ваги (1), отримаємо

$$\beta_{SR1} = \frac{\dfrac{\boldsymbol{\mu}'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}}{\mathbf{1}'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\boldsymbol{\mu}}\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{w}}{\mathbf{w}'\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{w}} = \frac{\boldsymbol{\mu}'\mathbf{w}}{\left(\mathbf{w}'\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{w}\right)\left(\mathbf{1}'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\boldsymbol{\mu}\right)}, \qquad (9)$$

$$\beta_{SR2} = \frac{\mathbf{w}'\boldsymbol{\Sigma}\dfrac{\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\boldsymbol{\mu}}{\mathbf{1}'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\boldsymbol{\mu}}}{\dfrac{\boldsymbol{\mu}'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}}{\mathbf{1}'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\boldsymbol{\mu}}\boldsymbol{\Sigma}\dfrac{\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\boldsymbol{\mu}}{\mathbf{1}'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\boldsymbol{\mu}}} = \frac{\mathbf{w}'\boldsymbol{\mu}\left(\mathbf{1}'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\boldsymbol{\mu}\right)}{\left(\boldsymbol{\mu}'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\boldsymbol{\mu}\right)}. \qquad (10)$$

Як і у випадку ваг та характеристик портфеля з максимальним відношення Шарпа, отримані вирази для β_{SR1} та β_{SR2} не можуть бути використані на практиці. Спершу необхідно їх оцінити. Використавши вибіркові оцінки (4), з (9)-(10) отримаємо вибіркові оцінки бета коефіцієнтів

$$\hat{\beta}_{SR1} = \frac{\hat{\boldsymbol{\mu}}'\mathbf{w}}{\left(\mathbf{w}'\hat{\boldsymbol{\Sigma}}\mathbf{w}\right)\left(\mathbf{1}'\hat{\boldsymbol{\Sigma}}^{-1}\hat{\boldsymbol{\mu}}\right)}, \qquad (11)$$

$$\hat{\beta}_{SR2} = \frac{\mathbf{w}'\hat{\boldsymbol{\mu}}\left(\mathbf{1}'\hat{\boldsymbol{\Sigma}}^{-1}\hat{\boldsymbol{\mu}}\right)}{\left(\hat{\boldsymbol{\mu}}'\hat{\boldsymbol{\Sigma}}^{-1}\hat{\boldsymbol{\mu}}\right)}. \qquad (12)$$

Оскільки множник $\left(\mathbf{1}'\hat{\boldsymbol{\Sigma}}^{-1}\hat{\boldsymbol{\mu}}\right)$ виразу (11) не є додатно визначеною квадратичною формою, то аналогічно як у [3] можемо показати, що математичне сподівання оцінки $\hat{\beta}_{SR1}$ не існує, а отже використання її на практиці некоректне.

Надалі ми вивчатимемо властивості вибіркової оцінки лише β_{SR2}. Нехай n – обсяг вибірки історичних значень вектора дохідностей активів $\mathbf{X}_t$, що використовується для побудови вибіркових оцінок (4) параметрів $\boldsymbol{\mu}$ та $\boldsymbol{\Sigma}$, символ $\xrightarrow{d}$ позначає збіжність за розподілом, $\mathbf{w}$ – ваги цільового портфеля, які є сталими.

Теорема 1. *Якщо вектор $\mathbf{X}_t$ дохідностей активів включених у портфель має k-вимірний нормальний розподіл з параметрами $\boldsymbol{\mu}$ та $\boldsymbol{\Sigma}$ ($\mathbf{X}_t \sim N_k(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$), то*

$$\sqrt{n}(\hat{\beta}_{SR2} - \beta_{SR2}) \xrightarrow{d} N(0, \sigma^2), \; n \to +\infty,$$

де

$$\sigma^2 = \frac{(\mathbf{1}'\mathbf{\Sigma}^{-1}\boldsymbol{\mu})^2(\mathbf{w}'\mathbf{\Sigma}\mathbf{w})}{(\boldsymbol{\mu}'\mathbf{\Sigma}^{-1}\boldsymbol{\mu})^2} + \frac{(\boldsymbol{\mu}'\mathbf{w})^2(\mathbf{1}'\mathbf{\Sigma}^{-1}\mathbf{1})}{(\boldsymbol{\mu}'\mathbf{\Sigma}^{-1}\boldsymbol{\mu})^2} + 2\frac{(\boldsymbol{\mu}'\mathbf{w})(\mathbf{1}'\mathbf{\Sigma}^{-1}\boldsymbol{\mu})}{(\boldsymbol{\mu}'\mathbf{\Sigma}^{-1}\boldsymbol{\mu})^2} - 4\frac{(\boldsymbol{\mu}'\mathbf{w})^2(\mathbf{1}'\mathbf{\Sigma}^{-1}\boldsymbol{\mu})^2}{(\boldsymbol{\mu}'\mathbf{\Sigma}^{-1}\boldsymbol{\mu})^3} +$$

$$+2\frac{(\boldsymbol{\mu}'\mathbf{w})^2(\mathbf{1}'\mathbf{\Sigma}^{-1}\mathbf{1})}{(\boldsymbol{\mu}'\mathbf{\Sigma}^{-1}\boldsymbol{\mu})} - 2\frac{(\boldsymbol{\mu}'\mathbf{w})^2(\mathbf{1}'\mathbf{\Sigma}^{-1}\boldsymbol{\mu})^2}{(\boldsymbol{\mu}'\mathbf{\Sigma}^{-1}\boldsymbol{\mu})^2}. \qquad (13)$$

Доведення. Позначимо через $\boldsymbol{\theta}=(\boldsymbol{\mu}', \mathrm{vech}(\mathbf{\Sigma})')'$ вектор невідомих параметрів розподілу дохідностей активів, а через $\hat{\boldsymbol{\theta}} = (\hat{\boldsymbol{\mu}}', \mathrm{vech}(\hat{\mathbf{\Sigma}})')'$ його вибіркову оцінку. Нехай $\mathbf{G}=(\partial\beta_{SR2}/\partial\boldsymbol{\mu}, \partial\beta_{SR2}/\partial\mathrm{vech}(\mathbf{\Sigma}))'$ $k(k+3)/2$-вимірний вектор і $\mathbf{\Omega}$ асимптотична коваріаційна матриця випадкової величини $\sqrt{n}(\hat{\boldsymbol{\theta}}-\boldsymbol{\theta})$, яка за наших припущень має вигляд [18, с. 218-225]

$$\mathbf{\Omega} = \begin{pmatrix} \mathbf{\Sigma} & \mathbf{0}_{k\times k(k+1)/2} \\ \mathbf{0}_{k(k+1)/2\times k} & \mathbf{D}_k^{+}(\mathbf{I}_{k^2}+\mathbf{K}_k)(\mathbf{\Sigma}\otimes\mathbf{\Sigma})\mathbf{D}_k^{+\prime} \end{pmatrix}, \qquad (14)$$

де $\mathbf{0}_{m\times l}$ – нульова матриця розмірності $m\times l$, $\mathbf{I}_{k^2}$ – одинична матриця розмірності $k^2\times k^2$. Властивості матриць $\mathbf{D}_k^{+} = (\mathbf{D}_k'\mathbf{D}_k)^{-1}\mathbf{D}_k'$, $\mathbf{D}_k$, $\mathbf{K}_k$, vech та vec оператора можуть бути знайдені, наприклад, в [17, с. 333-363].

Використовуючи дельта метод (див., напр., [18, с. 211]), отримуємо, що

$$\sqrt{n}(\hat{\beta}_{SR2}-\beta_{SR2}) \xrightarrow{d} N(0,\mathbf{G}'\mathbf{\Omega}\mathbf{G}),\ n\to+\infty,$$

і завдяки (14)

$$\mathbf{G}'\mathbf{\Omega}\mathbf{G}=(\partial\beta_{SR2}/\partial\boldsymbol{\mu})'\mathbf{\Sigma}(\partial\beta_{SR2}/\partial\boldsymbol{\mu})+$$

$$+(\partial\beta_{SR2}/\partial\mathrm{vech}(\mathbf{\Sigma}))'\mathbf{D}_k^{+}(\mathbf{I}_{k^2}+\mathbf{K}_k)(\mathbf{\Sigma}\otimes\mathbf{\Sigma})\mathbf{D}_k^{+\prime}(\partial\beta_{SR2}/\partial\mathrm{vech}(\mathbf{\Sigma})).$$

За правилами матричного диференційного числення маємо (див., напр., [17, с. 285-322])

$$\frac{\partial\beta_{SR2}}{\partial\boldsymbol{\mu}} = \frac{(\mathbf{1}'\mathbf{\Sigma}^{-1}\boldsymbol{\mu})}{\boldsymbol{\mu}'\mathbf{\Sigma}^{-1}\boldsymbol{\mu}}\mathbf{w} + \frac{(\boldsymbol{\mu}'\mathbf{w})}{\boldsymbol{\mu}'\mathbf{\Sigma}^{-1}\boldsymbol{\mu}}\mathbf{\Sigma}^{-1}\mathbf{1} - 2\frac{(\boldsymbol{\mu}'\mathbf{w})(\mathbf{1}'\mathbf{\Sigma}^{-1}\boldsymbol{\mu})}{(\boldsymbol{\mu}'\mathbf{\Sigma}^{-1}\boldsymbol{\mu})^2}\mathbf{\Sigma}^{-1}\boldsymbol{\mu}, \qquad (15)$$

$$\frac{\partial\beta_{SR2}}{\partial\,\mathrm{vech}\,\mathbf{\Sigma}} = (\boldsymbol{\mu}'\mathbf{w})\left(\frac{-\mathbf{D}_k'(\mathbf{\Sigma}^{-1}\otimes\mathbf{\Sigma}^{-1})\mathbf{D}_k^{+\prime}\mathbf{D}_k'(\boldsymbol{\mu}\otimes\mathbf{1})}{\boldsymbol{\mu}'\mathbf{\Sigma}^{-1}\boldsymbol{\mu}} + \right.$$

$$\left. + \frac{(\mathbf{1}'\mathbf{\Sigma}^{-1}\boldsymbol{\mu})\mathbf{D}_k'(\mathbf{\Sigma}^{-1}\otimes\mathbf{\Sigma}^{-1})\mathbf{D}_k^{+\prime}\mathbf{D}_k'(\boldsymbol{\mu}\otimes\boldsymbol{\mu})}{(\boldsymbol{\mu}'\mathbf{\Sigma}^{-1}\boldsymbol{\mu})^2}\right). \qquad (16)$$

Завдяки (15) отримуємо

$$(\partial\beta_{SR2}/\partial\boldsymbol{\mu})'\boldsymbol{\Sigma}(\partial\beta_{SR2}/\partial\boldsymbol{\mu})=\left(\frac{(\mathbf{1}'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\boldsymbol{\mu})}{\boldsymbol{\mu}'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\boldsymbol{\mu}}\mathbf{w}+\frac{(\boldsymbol{\mu}'\mathbf{w})}{\boldsymbol{\mu}'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\boldsymbol{\mu}}\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\mathbf{1}-2\frac{(\boldsymbol{\mu}'\mathbf{w})(\mathbf{1}'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\boldsymbol{\mu})}{(\boldsymbol{\mu}'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\boldsymbol{\mu})^2}\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\boldsymbol{\mu}\right)'\times$$

$$\times\boldsymbol{\Sigma}\times\left(\frac{(\mathbf{1}'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\boldsymbol{\mu})}{\boldsymbol{\mu}'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\boldsymbol{\mu}}\mathbf{w}+\frac{(\boldsymbol{\mu}'\mathbf{w})}{\boldsymbol{\mu}'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\boldsymbol{\mu}}\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\mathbf{1}-2\frac{(\boldsymbol{\mu}'\mathbf{w})(\mathbf{1}'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\boldsymbol{\mu})}{(\boldsymbol{\mu}'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\boldsymbol{\mu})^2}\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\boldsymbol{\mu}\right)=$$

$$=\frac{(\mathbf{1}'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\boldsymbol{\mu})^2(\mathbf{w}'\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{w})}{(\boldsymbol{\mu}'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\boldsymbol{\mu})^2}+\frac{(\boldsymbol{\mu}'\mathbf{w})^2(\mathbf{1}'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\mathbf{1})}{(\boldsymbol{\mu}'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\boldsymbol{\mu})^2}+4\frac{(\boldsymbol{\mu}'\mathbf{w})^2(\mathbf{1}'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\boldsymbol{\mu})^2}{(\boldsymbol{\mu}'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\boldsymbol{\mu})^3}+$$

$$+2\frac{(\boldsymbol{\mu}'\mathbf{w})(\mathbf{1}'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\boldsymbol{\mu})}{(\boldsymbol{\mu}'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\boldsymbol{\mu})^2}-4\frac{(\boldsymbol{\mu}'\mathbf{w})^2(\mathbf{1}'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\boldsymbol{\mu})^2}{(\boldsymbol{\mu}'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\boldsymbol{\mu})^3}-4\frac{(\boldsymbol{\mu}'\mathbf{w})^2(\mathbf{1}'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\boldsymbol{\mu})^2}{(\boldsymbol{\mu}'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\boldsymbol{\mu})^3}=$$

$$=\frac{(\mathbf{1}'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\boldsymbol{\mu})^2(\mathbf{w}'\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{w})}{(\boldsymbol{\mu}'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\boldsymbol{\mu})^2}+\frac{(\boldsymbol{\mu}'\mathbf{w})^2(\mathbf{1}'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\mathbf{1})}{(\boldsymbol{\mu}'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\boldsymbol{\mu})^2}+2\frac{(\boldsymbol{\mu}'\mathbf{w})(\mathbf{1}'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\boldsymbol{\mu})}{(\boldsymbol{\mu}'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\boldsymbol{\mu})^2}-4\frac{(\boldsymbol{\mu}'\mathbf{w})^2(\mathbf{1}'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\boldsymbol{\mu})^2}{(\boldsymbol{\mu}'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\boldsymbol{\mu})^3}. \quad (17)$$

Використовуючи наступні властивості для довільної $k\times k$ вимірної матриці $\mathbf{A}$ (див., напр., [19, с. 48-49]

$$\mathbf{D}_k\mathbf{D}_k^+=\frac{1}{2}\left(\mathbf{I}_{k^2}+\mathbf{K}_k\right)=\mathbf{N}_k,\quad \mathbf{N}_k(\mathbf{A}\otimes\mathbf{A})=(\mathbf{A}\otimes\mathbf{A})\mathbf{N}_k,\quad \mathbf{N}_k=\mathbf{N}_k^2=\mathbf{N}_k',$$

$$\mathbf{D}_k\mathbf{D}_k^+(\mathbf{A}\otimes\mathbf{A})\mathbf{D}_k=(\mathbf{A}\otimes\mathbf{A})\mathbf{D}_k,\ \mathbf{K}_k(\mathbf{A}\otimes\mathbf{A})=(\mathbf{A}\otimes\mathbf{A})$$

та (16), маємо

$$(\partial\beta_{SR2}/\partial\mathrm{vech}(\boldsymbol{\Sigma}))'\,\mathbf{D}_k^+\left(\mathbf{I}_{k^2}+\mathbf{K}_k\right)(\boldsymbol{\Sigma}\otimes\boldsymbol{\Sigma})\mathbf{D}_k^{+\prime}\,(\partial\beta_{SR2}/\partial\mathrm{vech}(\boldsymbol{\Sigma}))=$$

$$=(\boldsymbol{\mu}'\mathbf{w})^2\left(\frac{-\mathbf{D}_k'(\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\otimes\boldsymbol{\Sigma}^{-1})\mathbf{D}_k^{+\prime}\mathbf{D}_k'(\boldsymbol{\mu}\otimes\mathbf{1})}{\boldsymbol{\mu}'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\boldsymbol{\mu}}+\frac{(\mathbf{1}'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\boldsymbol{\mu})\mathbf{D}_k'(\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\otimes\boldsymbol{\Sigma}^{-1})\mathbf{D}_k^{+\prime}\mathbf{D}_k'(\boldsymbol{\mu}\otimes\boldsymbol{\mu})}{(\boldsymbol{\mu}'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\boldsymbol{\mu})^2}\right)'\times$$

$$\times\mathbf{D}_k^+\left(\mathbf{I}_{k^2}+\mathbf{K}_k\right)(\boldsymbol{\Sigma}\otimes\boldsymbol{\Sigma})\mathbf{D}_k^{+\prime}\times$$

$$\times\left(\frac{-\mathbf{D}_k'(\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\otimes\boldsymbol{\Sigma}^{-1})\mathbf{D}_k^{+\prime}\mathbf{D}_k'(\boldsymbol{\mu}\otimes\mathbf{1})}{\boldsymbol{\mu}'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\boldsymbol{\mu}}+\frac{(\mathbf{1}'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\boldsymbol{\mu})\mathbf{D}_k'(\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\otimes\boldsymbol{\Sigma}^{-1})\mathbf{D}_k^{+\prime}\mathbf{D}_k'(\boldsymbol{\mu}\otimes\boldsymbol{\mu})}{(\boldsymbol{\mu}'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\boldsymbol{\mu})^2}\right)'=$$

$$=(\boldsymbol{\mu}'\mathbf{w})^2\left(\frac{1}{(\boldsymbol{\mu}'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\boldsymbol{\mu})^2}(\boldsymbol{\mu}'\otimes\mathbf{1}')\mathbf{D}_k\mathbf{D}_k^+(\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\otimes\boldsymbol{\Sigma}^{-1})\mathbf{D}_k\mathbf{D}_k^+\left(\mathbf{I}_{k^2}+\mathbf{K}_k\right)(\boldsymbol{\Sigma}\otimes\boldsymbol{\Sigma})\times\right.$$

$$\times\mathbf{D}_k^{+\prime}\mathbf{D}_k'(\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\otimes\boldsymbol{\Sigma}^{-1})\mathbf{D}_k^{+\prime}\mathbf{D}_k'(\boldsymbol{\mu}\otimes\mathbf{1})+\frac{(\mathbf{1}'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\boldsymbol{\mu})^2}{(\boldsymbol{\mu}'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\boldsymbol{\mu})^4}(\boldsymbol{\mu}'\otimes\boldsymbol{\mu}')\mathbf{D}_k\mathbf{D}_k^+(\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\otimes\boldsymbol{\Sigma}^{-1})\times$$

$$\times \mathbf{D}_k \mathbf{D}_k^+ \left(\mathbf{I}_{k^2} + \mathbf{K}_k\right)\left(\mathbf{\Sigma} \otimes \mathbf{\Sigma}\right)\mathbf{D}_k^{+\prime} \mathbf{D}_k' (\mathbf{\Sigma}^{-1} \otimes \mathbf{\Sigma}^{-1})\mathbf{D}_k^{+\prime} \mathbf{D}_k' (\boldsymbol{\mu} \otimes \boldsymbol{\mu}) -$$

$$- \frac{2\left(\mathbf{1}'\mathbf{\Sigma}^{-1}\boldsymbol{\mu}\right)}{\left(\boldsymbol{\mu}'\mathbf{\Sigma}^{-1}\boldsymbol{\mu}\right)^3} (\boldsymbol{\mu}' \otimes \boldsymbol{\mu}') \times$$

$$\left. \times \mathbf{D}_k \mathbf{D}_k^+ (\mathbf{\Sigma}^{-1} \otimes \mathbf{\Sigma}^{-1}) \mathbf{D}_k \mathbf{D}_k^+ \left(\mathbf{I}_{k^2} + \mathbf{K}_k\right)\left(\mathbf{\Sigma} \otimes \mathbf{\Sigma}\right)\mathbf{D}_k^{+\prime} \mathbf{D}_k' (\mathbf{\Sigma}^{-1} \otimes \mathbf{\Sigma}^{-1})\mathbf{D}_k^{+\prime} \mathbf{D}_k' (\mathbf{1} \otimes \boldsymbol{\mu}) \right) =$$

$$= \left(\boldsymbol{\mu}'\mathbf{w}\right)^2 \left(\frac{1}{4\left(\boldsymbol{\mu}'\mathbf{\Sigma}^{-1}\boldsymbol{\mu}\right)^2} (\boldsymbol{\mu}' \otimes \mathbf{1}')(\mathbf{\Sigma}^{-1} \otimes \mathbf{\Sigma}^{-1})\left(\mathbf{I}_{k^2} + \mathbf{K}_k\right)^3 (\boldsymbol{\mu} \otimes \mathbf{1}) + \right.$$

$$+ \frac{\left(\mathbf{1}'\mathbf{\Sigma}^{-1}\boldsymbol{\mu}\right)^2}{4\left(\boldsymbol{\mu}'\mathbf{\Sigma}^{-1}\boldsymbol{\mu}\right)^4} (\boldsymbol{\mu}' \otimes \boldsymbol{\mu}')(\mathbf{\Sigma}^{-1} \otimes \mathbf{\Sigma}^{-1})\left(\mathbf{I}_{k^2} + \mathbf{K}_k\right)^3 (\boldsymbol{\mu} \otimes \boldsymbol{\mu}) -$$

$$\left. - \frac{2\left(\mathbf{1}'\mathbf{\Sigma}^{-1}\boldsymbol{\mu}\right)}{4\left(\boldsymbol{\mu}'\mathbf{\Sigma}^{-1}\boldsymbol{\mu}\right)^3} (\boldsymbol{\mu}' \otimes \boldsymbol{\mu}')(\mathbf{\Sigma}^{-1} \otimes \mathbf{\Sigma}^{-1})\left(\mathbf{I}_{k^2} + \mathbf{K}_k\right)^3 (\boldsymbol{\mu} \otimes \mathbf{1}) \right) =$$

$$= \left(\boldsymbol{\mu}'\mathbf{w}\right)^2 \left(2\frac{\left(\mathbf{1}'\mathbf{\Sigma}^{-1}\mathbf{1}\right)}{\left(\boldsymbol{\mu}'\mathbf{\Sigma}^{-1}\boldsymbol{\mu}\right)} + 2\frac{\left(\mathbf{1}'\mathbf{\Sigma}^{-1}\boldsymbol{\mu}\right)^2}{\left(\boldsymbol{\mu}'\mathbf{\Sigma}^{-1}\boldsymbol{\mu}\right)^2} - 4\frac{\left(\mathbf{1}'\mathbf{\Sigma}^{-1}\boldsymbol{\mu}\right)^2}{\left(\boldsymbol{\mu}'\mathbf{\Sigma}^{-1}\boldsymbol{\mu}\right)^2} \right) =$$

$$= \left(\boldsymbol{\mu}'\mathbf{w}\right)^2 \left(2\frac{\left(\mathbf{1}'\mathbf{\Sigma}^{-1}\mathbf{1}\right)}{\left(\boldsymbol{\mu}'\mathbf{\Sigma}^{-1}\boldsymbol{\mu}\right)} - 2\frac{\left(\mathbf{1}'\mathbf{\Sigma}^{-1}\boldsymbol{\mu}\right)^2}{\left(\boldsymbol{\mu}'\mathbf{\Sigma}^{-1}\boldsymbol{\mu}\right)^2} \right). \qquad (18)$$

Склавши (17) та (18) отримаємо твердження теореми.

З теореми 1 та теореми 1.14 [20, с. 8] випливає консистентність вибіркової оцінки асимптотичної дисперсії (13), тобто можливість її використання на практиці.

Також з теореми 1 отримуємо можливість побудови статистичних тестів для перевірки істотності відмінності очікуваних дохідностей розглянутих портфелів (еталонного портфеля з максимальним відношенням Шарпа та цільового зі сталими вагами). Якщо інтервал довіри

$$\left[\hat{\beta}_{SR2} - \frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{n}} z_{1-\gamma/2}, \hat{\beta}_{SR2} + \frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{n}} z_{1-\gamma/2} \right],$$

де z_γ – γ квантиль стандартного нормального розподілу, $\hat{\sigma}$ – вибіркова оцінка асимптотичної дисперсії (13) містить одиницю, то характеристики портфелів істотно не відрізняються. В цьому випадку інвестор має можливість використовувати портфель з невипадковими вагами, характеристики якого не відрізнятимуться істотно від характеристик портфеля з максимальним відношенням Шарпа.

3. Емпіричні результати

Дослідимо швидкість збіжності емпіричних розподілів вибіркової оцінки β_{SR2} до асимптотичного, знайденого в теоремі 1. Для цього використаємо щоденні дохідності акцій, включених до переліку DAX індексу за період з 01.01.2018 до 30.09.2019 (440 спостережень). Розглянемо 6 різних значень для кількості активів у портфелі k={5, 10, 15, 20, 25, 30}, які вибиратимемо в алфавітному порядку зі списку акцій включених до DAX індексу. Прийнявши портфель з однаковими вагами ($\mathbf{w}=(1/k, \ldots, 1/k)'$) за цільовий, методом Монте Карло отримаємо емпіричні розподіли випадкової величини $\sqrt{n}(\hat{\beta}_{SR2}-\beta_{SR2})$. Згенерувавши вибірку з нормального розподілу з параметрами, які дорівнюють значенням вибіркових оцінок (4) отриманих на основі даних про дохідності акцій, включених до переліку DAX індексу за період з 01.01.2018 до 30.09.2019, обсягом n={500, 1000, 3000, 5000, 10000, 15000, 20000}, обчислимо значення $\sqrt{n}(\hat{\beta}_{SR2}-\beta_{SR2})$. Повторивши таку процедуру 50000 разів, отримаємо вибірку значень випадкової величини $\sqrt{n}(\hat{\beta}_{SR2}-\beta_{SR2})$, на основі якої побудуємо емпіричний розподіл для кожного значення n та k.

Таблиця 1

Емпіричні n $\in$ { 500, 1000, 3000, 5000, 10000, 15000, 20000} та асимптотичні середні та дисперсії випадкової величини $\sqrt{n}(\hat{\beta}_{SR2}-\beta_{SR2})$ для k $\in$ {5, 10, 15, 20, 25, 30} у випадку цільового портфеля з однаковими вагами.

		k=5	k=10	k=15	k=20	k=25	k=30
n=500	Mean	1.7827	1.4953	1.1893	0.9696	0.6337	0.5029
	Variance	7.1658	4.3824	2.0703	1.4317	0.6414	0.5045
n=1000	Mean	1.5097	1.3236	1.0837	0.9127	0.5944	0.4622
	Variance	5.8604	4.7904	2.2336	1.6246	0.6380	0.4637
n=3000	Mean	0.9749	0.9091	0.7707	0.6771	0.4223	0.3446
	Variance	3.3002	4.8154	2.1102	1.6665	0.4767	0.3371
n=5000	Mean	0.7700	0.7251	0.6343	0.5518	0.3483	0.2777
	Variance	2.6105	4.8959	2.0292	1.6526	0.4250	0.2822
n=10000	Mean	0.5526	0.5254	0.4532	0.4170	0.2516	0.2094
	Variance	2.0539	4.7341	1.9165	1.5982	0.3686	0.2323
n=15000	Mean	0.4545	0.4503	0.3800	0.3303	0.2074	0.1719
	Variance	1.8292	4.7597	1.9316	1.5981	0.3494	0.2073
n=20000	Mean	0.3928	0.3761	0.3333	0.2894	0.1860	0.1511
	Variance	1.7445	4.6799	1.8904	1.5764	0.3356	0.1969
Asymptotic	Mean	0	0	0	0	0	0
	Variance	1.4199	4.8943	1.9656	1.6592	0.3368	0.1831

В табл. 1 наведено емпіричні середні та дисперсії випадкової величини $\sqrt{n}(\hat{\beta}_{SR2}-\beta_{SR2})$ для різних значень n та k та відповідні асимптотичні значення. Бачимо, що збіжність емпіричних середніх та дисперсій до асимптотичних є доволі повільною та зростає при збільшенні k кількості активів в портфелі. Даний результат є наслідком властивостей випадкових величин з нецентральним розподілом Фішера [21], оскільки знаменник вибіркової оцінки (12) містить випадкову величину, яка має нецентральний розподіл Фішера з (k, n–k) ступенями свободи та нецентральним параметром $n\cdot(\boldsymbol{\mu}'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\boldsymbol{\mu})$ [22], тобто

$$\frac{n(n-k)}{(n-1)k}\hat{\boldsymbol{\mu}}'\hat{\boldsymbol{\Sigma}}^{-1}\hat{\boldsymbol{\mu}} \sim F_{k,n-k,n(\boldsymbol{\mu}'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\boldsymbol{\mu})}.$$

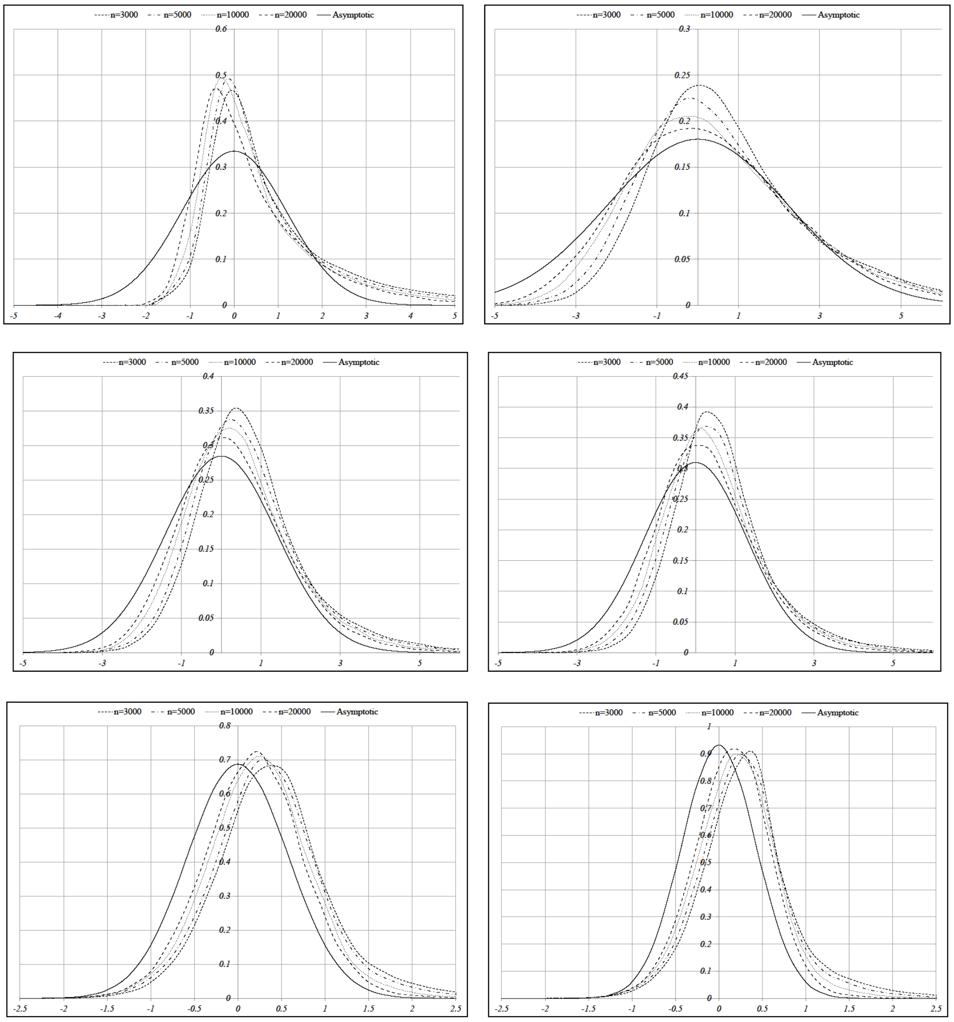

Рис. 1. ***Емпіричні n*** $\in$ ***{3000, 5000, 10000, 20000} та асимптотична густини випадкової величини*** $\sqrt{n}(\hat{\beta}_{SR2} - \beta_{SR2})$ **для *k*=5 (зверху зліва), *k*=10 (зверху справа), *k*=15 (посередині зліва), *k*=20 (посередині справа), *k*=25 (знизу зліва), *k*=30 (знизу справа).**

З результатів табл. 1 випливає можливість використання запропонованого методу порівняння портфеля з максимальним відношенням Шарпа та портфеля зі сталими (в нашому випадку однаковими) вагами лише при наявності вибірок історичних значень доволі великого обсягу (n>5000) та кількості активів в портфелі не меншої за 20. Аналіз розподілів, зображений на рис. 1, підтверджує попереднє спостереження. Емпіричним розподілам притаманна яскраво виражена асиметричність та доволі повільна збіжність до асимптотичного розподілу, особливо при невеликій кількості активів у портфелі.

4. Висновки

Робота присвячена дослідженню статистичних властивостей вибіркової оцінки бета коефіцієнта у двох випадках: коли портфель з максимальним відношенням Шарпа є цільовим або еталонним, а інший – портфелем зі сталими вагами.

Зважаючи на важливість відношення Шарпа у інвестиційній діяльності та на негативні властивості вибіркових оцінок характеристик портфеля з максимальним відношенням Шарпа, виникає питання: яким чином порівняти характеристики такого портфеля з характеристиками портфеля зі сталими вагами. Для побудови тесту ми обрали бета коефіцієнт. Виявляється, якщо портфель з максимальним відношенням Шарпа є цільовим, то для вибіркової оцінки бета коефіцієнта не існує математичного сподівання, а отже, використання цієї величини на практиці некоректне. Якщо портфель з максимальним відношенням Шарпа є еталонним, то вибіркова оцінка бета коефіцієнта таким недоліком не володіє. У цьому випадку в роботі знайдено асимптотичний розподіл вибіркової оцінки бета коефіцієнта та показано доволі повільну збіжність емпіричних розподілів до асимптотичного. Тому використання статистичного тесту для порівняння характеристик портфеля з максимальним відношенням Шарпа з характеристиками портфеля зі сталими вагами доцільне лише за наявності вибірки історичних значень великого обсягу та наявності в портфелі великої кількості активів. Враховуючи припущення про нормальність розподілу вектора дохідностей, за якого отримані результати, вважаємо використання запропонованого методу на практиці недоцільним.

---

1. Markowitz H. Portfolio selection / H. Markowitz // Journal of finance.–1952.–№7.– P. 77-91.
2. Merton R. C. An analytical derivation of the efficient frontier / R. C. Merton // Journal of financial and quantitative analysis – 1972. – №7. – P. 1851 – 1872.
3. Okhrin Y. Distributional properties of optimal portfolio weights / Y. Okhrin, W. Schmid // Journal of econometrics. – 2006. – № 134. – P. 235 – 256.
4. Okhrin Y. Estimation of optimal portfolio weights / Y. Okhrin, W. Schmid // International journal of theoretical and applied finance. – 2008. – № 11. – P. 249 – 276.
5. Ingersoll J. E. Theory of financial decision making / J. E. Ingersoll. – New York : Rowman&Littlefield Publishers. 1987. – 496 p.
6. Alexander G. J. Economic implication of using a mean-VaR model for portfolio selection: a comparison with mean-variance analysis / G. J. Alexander, M. A. Baptista // Journal of economic dynamics & control. – 2002. – № 26. – P. 1159 – 1193.
7. Alexander G. J., Baptista M. A. A comparison of VaR and CVaR constraints on portfolio selection with the mean-variance model // Management Science. – 2004. Vol. 50. – № 9. – P. 1261-1273.
8. Bodnar T. Minimum VaR and Minimum CVaR optimal portfolios: estimators, confidence regions, and tests / T. Bodnar, W. Schmid, T. Zabolotskyy // Statistics & Risk Modeling. – 2012. – № 29. – P. 281 – 314.
9. Sharpe W. F. The Sharpe ratio / W. F. Sharpe // The journal of portfolio management. – 1994. – Vol. 21. – № 1. – P. 49 – 58.
10. Schmid W. On the existence of unbiased estimators for the portfolio weights obtained by maximizing the Sharpe ratio / W. Schmid, T. Zabolotskyy // ASTA – Advances in Statistical Analysis. – 2008. – № 92. – P. 29 – 34.
11. Bodnar T. Maximization of the Sharpe ratio of an asset portfolio in the context of risk minimization / T. Bodnar, T. Zabolotskyy // Economic annals – XXI. – 2013. – № 11-12 (1). – P. 110 – 113.
12. Bodnar T. How risky is the optimal portfolio which maximizes the Sharpe ratio? / T. Bodnar, T. Zabolotskyy // ASTA – Advances in statistical analysis. – 2017. – № 101 (1). – P. 1-28.
13. Хохлов В. Ю. Математичні методи в управлінні портфелем цінних паперів / В. Ю. Хохлов. – К.: Кондор-Видавництво, 2017. – 298 с.

14. Damodaran A. Investment valuation: tools and techniques for determining the value of any asset / A. Damodaran. – Hoboken: JohnWiley & Sons. 2012. – 992 p.
15. Alexander C. Market models: a guide to financial data analysis. / C. Alexander. – Hoboken: John Wiley & Sons. 2001. – 445 p.
16. Bodnar T. Statistical inference for the β coefficient. / T. Bodnar, A. K. Gupta, V. Vitlinskiy, T. Zabolotskyy // Risks. – 2019. – № 7. – 56.
17. Harville D. A. Matrix algebra from a statistician's perspective / D. A. Harville. – New York : Springer Science+Business Media. 2008. – 634 p.
18. Brockwell P. J. Time series: theory and methods / P. J. Brockwell, R. A. Davis. – New York : Springer Science+Business Media. 2006. – 600 p.
19. Magnus J. R. Matrix differential calculus with applications in statistics and econometrics / J. R. Magnus, H. Neudecker. – New York : Wiley. – 1999. – 450 p.
20. DasGupta A. Asymptotic theory of statistics and probability / A. DasGupta. – New York : Springer. 2008. – 722 p.
21. Johnson N. L. Continuous univariate distributions / N. L. Johnson, S. Kotz, N. Balakrishnan. – New York : Wiley. 1995. – 752 p.
22. Muirhead R. J. Aspects of multivariate statistical theory / R. J. Muirhead. – New York : Wiley. 1982. – 704 p.

References

1. Markowitz H. (1952). Portfolio selection, *Journal of finance, 7, pp.*77 – 91.
2. Merton R. C. (1972). An analytical derivation of the efficient frontier, *Journal of financial and quantitative analysis,* 7, pp.1851 – 1872.
3. Okhrin Y., Schmid W. (2006). Distributional properties of optimal portfolio weights, *Journal of econometrics*, 134m pp.235 – 256.
4. Okhrin Y., Schmid W. (2008). Estimation of optimal portfolio weights, *International journal of theoretical and applied finance,* 11, pp.249 – 276.
5. Ingersoll J. E. (1987). Theory of financial decision making, New York : Rowman&Littlefield Publishers, 496.
6. Alexander G. J. (2002). Economic implication of using a mean-VaR model for portfolio selection: a comparison with mean-variance analysis, *Journal of economic dynamics & control,* 26, pp.1159 – 1193.
7. Alexander G. J., Baptista M. A. (2004). A comparison of VaR and CVaR constraints on portfolio selection with the mean-variance model, *Management Science,* V. 50, 9, pp.1261-1273.
8. Bodnar T., Schmid W., Zabolotskyy T. (2012). Minimum VaR and Minimum CVaR optimal portfolios: estimators, confidence regions, and tests, *Statistics & Risk Modeling,* 29, pp.281 – 314.
9. Sharpe W. F. (1994). The Sharpe ratio, *The journal of portfolio management,* V. 21, 1, pp. 49 – 58.
10. Schmid W., Zabolotskyy T. (2008). On the existence of unbiased estimators for the portfolio weights obtained by maximizing the Sharpe ratio, *ASTA – Advances in Statistical Analysis*, 92, pp. 29 – 34.
11. Bodnar T., Zabolotskyy T. (2013). Maximization of the Sharpe ratio of an asset portfolio in the context of risk minimization, *Economic annals – KhKhI,* 11-12 (1), pp.110 – 113.
12. Bodnar T., Zabolotskyy T. (2017). How risky is the optimal portfolio which maximizes the Sharpe ratio, *ASTA – Advances in statistical analysis,* 101 (1), pp.1-28.
13. Khokhlov V. Yu. (2017). Matematychni metody v upravlinni portfelem tsinnykh paperiv, K.: Kondor-Vydavnytstvo, 298.
14. Damodaran A. (2012). Investment valuation: tools and techniques for determining the value of any asset, Hoboken: JohnWiley & Sons, 992.

15. Alexander C. (2001). Market models: a guide to financial data analysis, Hoboken: John Wiley & Sons, 445 p.
16. Bodnar T., Gupta A. K., Vitlinskiy V., Zabolotskyy T. (2019). Statistical inference for the β coefficient, *Risks,* 7, 56.
17. Harville D. A. (2008). Matrix algebra from a statisticians perspective, New York : Springer Science+Business Media, 634.
18. Brockwell P. J., Davis R. A. (2006). Time series: theory and methods, New York : Springer Science+Business Media, 600.
19. Magnus J. R., Neudecker H. (1999) Matrix differential calculus with applications in statistics and econometrics, New York: Wiley, 450.
20. DasGupta A. (2008). Asymptotic theory of statistics and probability, New York : Springer, 722.
21. Johnson N. L., Kotz S., Balakrishnan N. (1995). Continuous univariate distributions, New York: Wiley, 752.
22. Muirhead R. J. (1982). Aspects of multivariate statistical theory, New York : Wiley, 704.

EMPIRICAL ANALYSIS OF BETA COEFFICIENT OF THE OPTIMAL PORTFOLIO WITH THE MAXIMUM SHARPE RATIO

M. Zabolotskyy, T. Zabolotskyy

Ivan Franko Lviv National University of Lviv, 1 Universytetska Str., Lviv, 79000, Ukraine
E-mail: m_zabol@lnu.edu.ua, zjabka@yahoo.com

In the paper, we consider the optimal portfolio with the maximum Sharpe ratio and investigate the possibility of testing the significance of difference between this portfolio and constant weights portfolio. We make use of beta coefficient. Considering two cases: when portfolio with the maximum Sharpe ratio is benchmark or target, we provide analytical expressions for two beta coefficients. We analyze the properties of sample estimators of corresponding beta coefficients and conclude that the beta coefficient when portfolio with the maximum Sharpe ratio is target cannot be used on practice because mathematical expectation of its sample estimator does not exist. Instead, the beta coefficient when portfolio with the maximum Sharpe ratio is benchmark does not have such a disadvantage. Assuming that the asset returns vector follows multivariate normal distribution we provide asymptotic distribution of the sample estimator of the beta coefficient in the case when portfolio with the maximum Sharpe ratio is target. This result is used to derive a statistical test for the beta coefficient and to construct a confidence interval for the beta coefficient. These findings give us the possibility to test whether investor's constant weights portfolio significantly differs from target portfolio with the maximum Sharpe ratio. The theoretical results of the paper are implemented in an empirical study. Using Monte Carlo method with 50000 repetitions and the data based on the returns of 30 stocks included into the DAX index we provide empirical distributions of the sample estimator of the beta coefficient and investigate the convergence of these distributions to the corresponding asymptotic one. We conclude that the proposed method of portfolio comparison can be used on practice only when the samples of historical values with relatively large amount (n> 5000) are available and the number of assets in the portfolio is not less than 20.

Keywords: Sharpe ratio, beta coefficient, asymptotic distribution, parameter estimation, normal distribution.