ISSN 2078-6115. Вісник Львівського університету. Серія економічна. 2019. Випуск 56. С. 207-217
Visnyk of the Lviv University. Series Economics. 2019. Issue 56. P. 207-217

УДК 336.76:311.15 DOI: http://dx.doi.org/10.30970/ves.2019.56.0.3014

ЕМПІРИЧНИЙ АНАЛІЗ ВИБІРКОВОЇ ОЦІНКИ КОЕФІЦІЄНТА РИЗИКУ ІНВЕСТОРА ПОРТФЕЛЯ З МАКСИМАЛЬНИМ ВІДНОШЕННЯМ ШАРПА

М. Заболоцький, Т. Заболоцький, Т. Байбула

Львівський національний університет імені Івана Франка
79000 м. Львів, вулиця Університетська 1
E-mail: m_zabol@lnu.edu.ua, zjabka@yahoo.com, baibula23@gmail.com

Стаття присвячена емпіричному аналізу асимптотичних властивостей вибіркової оцінки коефіцієнта βSR, що описує ставлення інвестора до ризику портфеля з максимальним відношенням Шарпа. Оскільки математичне сподівання вибіркових оцінок ваг, очікуваної дохідності та дисперсії цього портфеля не існують, то його практичне використання може призвести до ненадійних рішень. Ми пропонуємо вирішити цю проблему шляхом заміни портфеля з максимальним відношенням Шарпа на статистично еквівалентний портфель з максимальною очікуваною корисністю шляхом вивчення властивостей розподілу вибіркової оцінки βSR. Використовуючи метод Монте-Карло із 100000 повторень та дані на основі дохідностей 30 акцій, включених до індексу Dow Jones за період з 01.01.2019 по 31.12.2019 (251 спостереження), побудовано емпіричні розподіли вибіркової оцінки відповідного коефіцієнта βSR та досліджено збіжність цих розподілів до відповідного асимптотичного. В дослідженні використано два припущення щодо розподілу вектора активів: багатовимірний нормальний розподіл або багатовимірний t розподіл з 5 ступенями свободи. Виявляється, що в обох цих випадках збіжність емпіричних розподілів до відповідного асимптотичного є достатньо швидкою. Навіть для портфеля складеного з 30 активів з t розподіленими дохідностями досягнуто хорошого наближення для помірного розміру вибірки історичних дохідностей (n=4000). Методом біжучого вікна шириною n=2000 шляхом побудови асимптотичних довірчих інтервалів коефіцієнта βSR показано, що портфель з максимальним відношенням Шарпа впродовж 2018-2019 років був дуже ризиковим, оскільки у всіх розглянутих випадках верхня межа 99% довірчого інтервалу є менша за 0,2.

Ключові слова: *відношення Шарпа, коефіцієнт, що описує ставлення до ризику, асимптотичний розподіл, інтервал довіри, еліптичний розподіл, метод Монте-Карло.*

1. Вступ.

Теорія прийняття рішень відіграє важливу роль в сучасному світі. Основним її завданням на практиці є вибір «найкращої» альтернативи серед безлічі інших. Оскільки в загальному випадку поняття «найкращої» альтернативи неможливо визначити однозначно, то її вибір повинен прийматися на основі певних спостережень з використанням апарату математичного моделювання. Слідування цій тезі та у випадку правильної інтерпретованості результатів проведеного математичного моделювання дозволяє не лише обґрунтувати прийняте рішення, але й спрогнозувати майбутні результати та оцінити ризики. Ключовим моментом є врахування випадковості використаних при моделюванні даних. Оскільки результатами моделювання є оцінки певних величин, які є випадковими величинами, то отримані значення є лише однією з можливих їх реалізацій. Тому перед тим як приймати рішення на основі такої реалізації необхідно вивчити ймовірнісні властивості використаної оцінки.

Проблема інтерпретування результатів моделювання притаманна також теорії портфеля. У випадку портфеля з максимальним відношенням Шарпа, для вибіркових оцінок основних його характеристик (ваг, очікуваної дохідності та дисперсії) не існує математичного сподівання [1] та неможливо побудувати незміщену оцінку [2]. З другого боку, завдяки популярності відношення Шарпа серед практиків фінансового ринку [3, ст. 49], такий портфель часто використовують як еталон ефективності управління портфелем. Враховуючи негативні ймовірнісні властивості вибіркових оцінок його характеристик, доволі важко, якщо взагалі можливо, коректно інтерпретувати отримані результати. Для вирішення цієї проблеми пропонується використати поняття коефіцієнта, що описує ставлення інвестора до ризику (надалі коефіцієнт ризику). Обчисливши значення цього коефіцієнта для портфеля з максимальним відношенням Шарпа, матимемо можливість використати еквівалентний портфель з максимальною очікуваною корисністю, якому відповідає знайдене значення коефіцієнта ризику. Вибіркові оцінки характеристик цього портфеля не володіють притаманними портфелю з максимальним відношенням Шарпа недолікам, що істотно спрощує інтерпретацію отриманих результатів.

В роботі проведено емпіричний аналіз асимптотичних властивостей вибіркової оцінки коефіцієнта ризику за припущення еліптичної розподіленості вектора дохідностей активів портфеля. Зауважимо, що використання асимптотичних властивостей оцінок в управлінні портфелем та використання еліптичних розподілів для опису поведінки дохідностей фінансових активів обгрунтовано відповідно в [4] та [5]-[7]. На основі даних про дохідності акцій включених до переліку Dow Jones за період з 01.01.2019 по 31.12.2019 (251 спостереження) досліджено швидкість збіжності емпіричних розподілів вибіркової оцінки коефіцієнта ризику портфеля з максимальним відношенням Шарпа до відповідного асимптотичного для портфелів, що складаються з $k=\{5, 10, 15, 20, 25, 30\}$ перших активів зі списку Dow Jones розміщених в алфавітному порядку за припущення, що вектор дохідностей активів портфеля має багатовимірний нормальний розподіл та розподіл Стьюдента з 5 ступенями свободи. Зазначимо, що обидва припущення щодо поведінки вектора дохідностей часто використовуються у фінансовій літературі. Припущення про нормальність рекомендується завдяки своїм привабливим теоретичним властивостям [8], а використання t-розподілу Стьюдента обгрунтовано в [9], де також на основі емпіричного аналізу встановлено межі для кількості ступенів свободи 2.53 та 13.26 з середнім 4.79. Також побудовано асимптотичні інтервали довіри для коефіцієнтів ризику портфелів з $k=\{5, 10, 15, 20, 25, 30\}$ активів на основі щоденних спостережень за їх дохідностями за період з 05.01.2010 по 31.12.2019 (2514 спостережень) та на основі біжучого вікна довжиною $n=2000$ спостережень для оцінки параметрів розподілу. Отримані результати підтверджують високу ризиковість портфеля з максимальним відношенням Шарпа [10].

2. Основні означення, позначення та формулювання результатів.

Нехай ми формуємо портфель з k фінансових активів та немає можливості безризикового розміщення коштів. Позначимо $X_t=(X_{1t}, X_{2t}, \ldots, X_{kt})'$ вектор дохідностей активів, X_{it} – дохідність активу i, в момент часу t, $w=(w_1, w_2, \ldots, w_k)'$ – вектор ваг портфеля, де w_i – частка активу i в портфелі. Дохідність портфеля $R_{w,t}$ в момент часу t визначаємо як добуток векторів X_t та w, тобто $R_{w,t}=w'X_t$ і зауважимо, що $R_{w,t}$ є випадковою величиною. Припустимо, що вектор середніх μ та коваріаційна матриця Σ вектора X_t не залежать від часу, тобто X_t поводиться як слабко стаціонарний процес. У цьому випадку математичне сподівання $M(R_{w,t})=R_w=w'\mu$ називають очікуваною дохідністю, а дисперсію $D(R_{w,t})=V_w=w'\Sigma w$ часто приймають як показник ризику портфеля. За таких позначень відношення Шарпа SR_w визначається як $SR_w=R_w/V_w$, а ваги портфеля з максимальним відношенням Шарпа визначаються з оптимізаційної задачі

$SR_w \rightarrow \max$, $1'w=1$,

де $\mathbf{1}$ – k-вимірний вектор елементами якого є одиниці і становлять [1]

$$\mathbf{w}_{SR} = \frac{\mathbf{\Sigma}^{-1}\boldsymbol{\mu}}{\mathbf{1}'\mathbf{\Sigma}^{-1}\boldsymbol{\mu}}. \qquad (1)$$

Оскільки ваги портфеля $\mathbf{w}_{SR}$ з максимальним відношенням Шарпа залежать від параметрів розподілу вектора $\mathbf{X}_t$, $\boldsymbol{\mu}$, $\mathbf{\Sigma}$, які невідомі на практиці, то використаємо вибіркові оцінки для оцінювання їх значень. Якщо $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \ldots, \mathbf{X}_n$ вибірка попередніх значень векторів дохідностей активів, то вибіркові оцінки $\hat{\boldsymbol{\mu}}$, $\hat{\mathbf{\Sigma}}$ параметрів $\boldsymbol{\mu}$ та $\mathbf{\Sigma}$ мають вигляд

$$\hat{\boldsymbol{\mu}} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mathbf{X}_i, \ \hat{\mathbf{\Sigma}} = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(\mathbf{X}_i-\hat{\boldsymbol{\mu}})(\mathbf{X}_i-\hat{\boldsymbol{\mu}})'. \qquad (2)$$

Підставляючи оцінки (2) у вираз для ваг $\mathbf{w}_{SR}$ (1), отримаємо вибіркову оцінку вектора ваг $\mathbf{w}_{SR}$, яку позначимо $\hat{\mathbf{w}}_{SR}$. В [1] за припущення нормальності розподілу вектора $\mathbf{X}_t$ доведено, що для випадкової величини $\hat{\mathbf{w}}_{SR}$ існують лише моменти порядку строго меншого за 1. Отже, не існує математичного сподівання для вибіркових оцінок очікуваної дохідності та дисперсії портфеля з вагами $\mathbf{w}_{SR}$, що робить неможливою їх коректну інтерпретацію.

Будь-який ефективний портфель може бути отриманий як розв'язок задачі максимізації очікуваної корисності, яка має вигляд

$R_w-(\beta/2)V_w \rightarrow \max$, $\mathbf{1}'\mathbf{w}=1$,

де β – коефіцієнт, що описує ставлення інвестора до ризику. В теорії портфеля припускається, що коефіцієнт β є відомим для кожного інвестора. В літературі при емпіричних дослідженнях значення β зазвичай знаходяться в проміжку між 1 та 50 [11]. Розв'язком задачі максимізації очікуваною корисності є вектор ваг портфеля з максимальною очікуваною корисністю, який має вигляд [1]

$$\mathbf{w}_{EU} = \frac{\mathbf{\Sigma}^{-1}\mathbf{1}}{\mathbf{1}'\mathbf{\Sigma}^{-1}\mathbf{1}} + \beta^{-1}\mathbf{R}\boldsymbol{\mu}, \qquad (3)$$

де $\mathbf{R} = \mathbf{\Sigma}^{-1} - \frac{\mathbf{\Sigma}^{-1}\mathbf{1}\mathbf{1}'\mathbf{\Sigma}^{-1}}{\mathbf{1}'\mathbf{\Sigma}^{-1}\mathbf{1}}$. Оскільки портфель з максимальним відношенням Шарпа ефективний за Марковіцем, то існує таке значення $\beta=\beta_{SR}$, за якого портфель з максимальним відношенням Шарпа буде еквівалентний портфелю з максимальною очікуваною корисністю. Прирівнюючи вектори ваг портфелів (2) та (3), отримаємо

$$\beta_{SR} = \mathbf{1}'\mathbf{\Sigma}^{-1}\boldsymbol{\mu}\,. \qquad (4)$$

На практиці використати (4) для обчислення коефіцієнта ризику не можемо, натомість повинні користуватися його вибірковою оцінкою

$$\hat{\beta}_{SR} = \mathbf{1}'\hat{\mathbf{\Sigma}}^{-1}\hat{\boldsymbol{\mu}}\,, \qquad (5)$$

яка є випадковою величиною. Для прийняття коректних рішень необхідно глибше вивчити її ймовірнісні властивості. З цією метою нам потрібно конкретизувати припущення щодо вектора дохідностей активів. Нехай вектор $\mathbf{X}_t$ має багатовимірний еліптичний розподіл ($\mathbf{X}_t \sim E_k(\boldsymbol{\mu}, \mathbf{\Sigma}/\gamma^2, \psi)$), тобто його характеристична функція має вигляд

$$M(\exp(i\mathbf{x}'\mathbf{X}_t)) = \exp(i\boldsymbol{\mu}'\mathbf{x})\psi(\mathbf{x}'\mathbf{D}\mathbf{x}),\ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^k,\ \mathbf{D} = \mathbf{\Sigma}/\gamma^2,\ \gamma^2 = (-2\psi'(0)).$$

Функція ψ називається характеристичним генератором еліптичного розподілу, властивості якого можна знайти, наприклад, у [12]. Аналогічно як при доведенні теореми 2 з [10], отримуємо

$$\sqrt{n}\left(\hat{\beta}_{SR} - \beta_{SR}\right) \xrightarrow{d} N(0, \sigma_{SR}^2)\,,\ n \to \infty,$$

де $\xrightarrow{d}$ означає збіжність за розподілом, а

$\sigma^2_{SR} = (1 + \lambda\boldsymbol{\mu}'\mathbf{R}\boldsymbol{\mu})\mathbf{1}'\mathbf{\Sigma}^{-1}\mathbf{1} + 2\lambda(\mathbf{1}'\mathbf{\Sigma}^{-1}\boldsymbol{\mu})^2$, $\lambda = \psi''(0)/(\psi'(0))^2$.

Використовуючи міркування подібні до доведення теореми 3 з [10] неважко показати, що вибіркова оцінка $\hat{\sigma}_{SR}^2 = (1 + \lambda\hat{\boldsymbol{\mu}}'\hat{\mathbf{R}}\hat{\boldsymbol{\mu}})\mathbf{1}'\hat{\mathbf{\Sigma}}^{-1}\mathbf{1} + 2\lambda(\mathbf{1}'\hat{\mathbf{\Sigma}}^{-1}\hat{\boldsymbol{\mu}})^2$ параметра σ^2_{SR} є консистентна, тобто

$$\hat{\sigma}_{SR}^2 \xrightarrow{a.s.} \sigma_{SR}^2\,,\ n \to \infty,$$

де $\xrightarrow{a.s.}$ означає збіжність майже напевно, а отже, може бути використана на практиці.

Як наслідок з отриманого асимптотичного розподілу отримуємо асимптотичний $(1-\gamma)$ інтервал довіри для параметра β_{SR}

$$\left[\hat{\beta}_{SR} - \frac{\hat{\sigma}_{SR}}{\sqrt{n}} z_{1-\gamma/2}\,;\, \hat{\beta}_{SR} + \frac{\hat{\sigma}_{SR}}{\sqrt{n}} z_{1-\gamma/2}\right],$$

де z_γ – γ квантиль стандартного нормального розподілу. Відповідно всі значення коефіцієнта ризику β, які належать побудованому інтервалу, статистично не відрізняються від значення цього коефіцієнта для портфеля з максимальним відношенням Шарпа. Тому на практиці при аналізі характеристик портфеля з максимальним відношенням Шарпа він може бути замінений на статистично еквівалентний портфель з максимальною очікуваною корисністю, що істотно спростить інтерпретацію результатів.

3. Емпіричні результати.

Використання асимптотичних результатів з метою прийняття рішень вимагає певної обережності. Перш за все необхідно дослідити швидкість збіжності емпіричних розподілів до відповідного асимптотичного та визначити обсяг історичних даних для побудови вибіркових оцінок, який забезпечує необхідну точність. Для аналізу результатів використаємо два припущення про поведінку вектора $\mathbf{X}_t$: багатовимірний нормальний розподіл або t-розподіл Стьюдента з 5 ступенями свободи. Використаємо дані про щоденні дохідності акцій 30 компаній включених до переліку Dow Jones за період з 01.01.2019 по 31.12.2019 (251 спостереження) та розглянемо портфелі, що складаються з k={5, 10, 15, 20, 25, 30} акцій перших компаній зі списку Dow Jones розміщених в алфавітному порядку. З вибраних даних обчислимо параметри розподілу вектора $\mathbf{X}_t$ та приймемо їх за точні значення. Обчислимо асимптотичну дисперсію σ^2_{SR} враховуючи, що для багатовимірного нормального розподілу γ=1 та λ=1 натомість для багатовимірного t-розподілу Стьюдента з 5 ступенями свободи $\gamma=\sqrt{5/3}$ та λ=3.

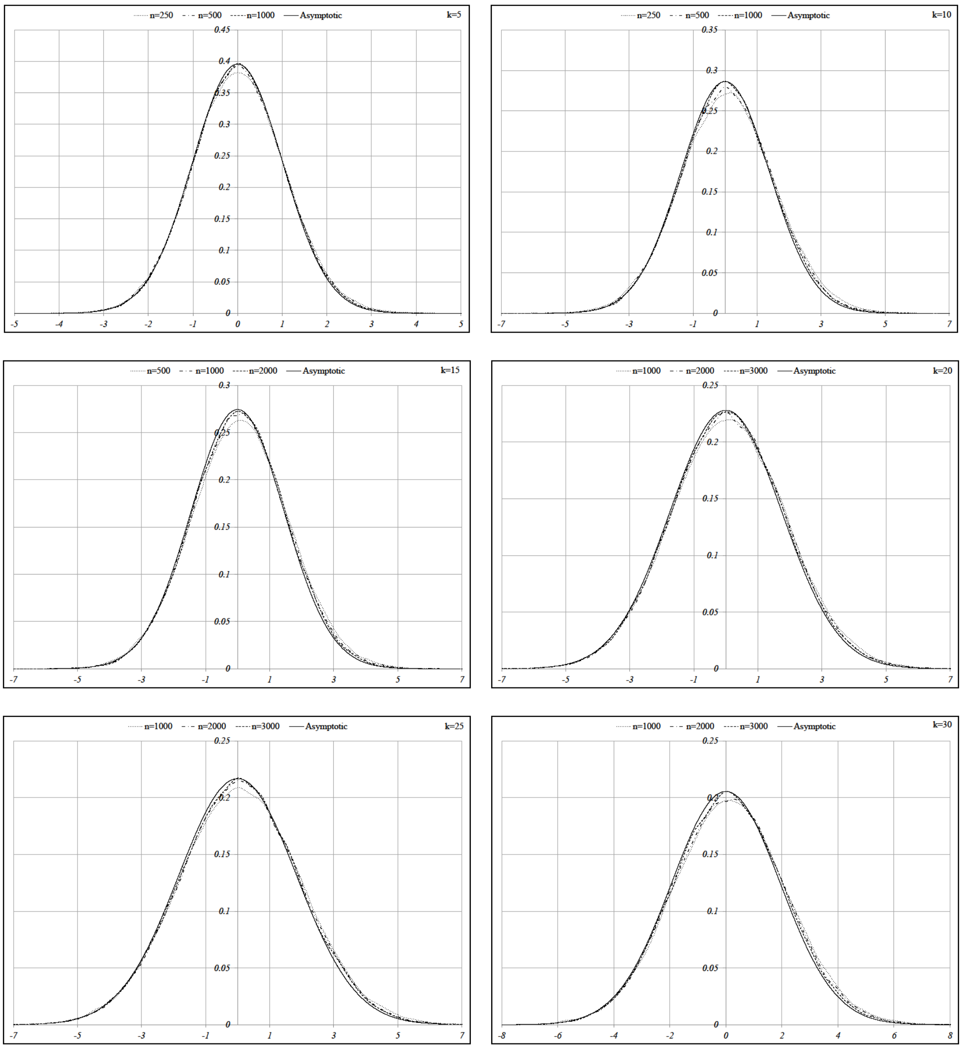

Рис. 1. Емпіричні та відповідні асимптотичні густини випадкової величини $\sqrt{n}\left(\hat{\beta}_{SR}-\beta_{SR}\right)$ за припущення нормальності вектора дохідностей $\mathbf{X}_t$

ISSN 2078-6115. Вісник Львівського університету. Серія економічна. 2019. Випуск 56

Таблиця 1.

Емпіричні та асимптотичні середні значення та дисперсії випадкової величини $\sqrt{n}\left(\hat{\beta}_{SR} - \beta_{SR}\right)$ за припущення нормальності вектора дохідностей $\mathbf{X}_t$

		k=5	k=10	k=15	k=20	k=25	k=30
n=500	Середнє	0.0159	0.0526	0.0866	0.1342	0.1559	0.2204
	Дисперсія	1.0583	2.0898	2.3369	3.4658	3.9734	4.6038
n=1000	Середнє	0.0158	0.0360	0.0575	0.0952	0.1043	0.1537
	Дисперсія	1.0335	2.0066	2.2149	3.2754	3.6635	4.1004
n=2000	Середнє	0.0106	0.0245	0.0477	0.0728	0.0752	0.1080
	Дисперсія	1.0331	1.9839	2.1580	3.1551	3.5250	3.9564
n=3000	Середнє	0.0075	0.0193	0.0304	0.0557	0.0553	0.0764
	Дисперсія	1.0205	1.9692	2.1342	3.1156	3.4820	3.8607
n=4000	Середнє	0.0045	0.0208	0.0304	0.0475	0.0461	0.0725
	Дисперсія	1.0211	1.9494	2.1402	3.0936	3.4715	3.8643
Асимптотичні	Середнє	0	0	0	0	0	0
	Дисперсія	1.0155	1.9419	2.1124	3.0599	3.3852	3.7662

Таблиця 2.

Емпіричні та асимптотичні середні значення та дисперсії випадкової величини $\sqrt{n}\left(\hat{\beta}_{SR} - \beta_{SR}\right)$ за припущення t-розподіленості з 5 ступенями свободи вектора дохідностей $\mathbf{X}_t$

		k=5	k=10	k=15	k=20	k=25	k=30
n=500	Середнє	0.0473	0.1269	0.1960	0.3173	0.3491	0.4954
	Дисперсія	1.1388	2.2692	2.5675	3.9536	4.5695	5.3535
n=1000	Середнє	0.0388	0.0916	0.1498	0.2241	0.2513	0.3696
	Дисперсія	1.1046	2.1877	2.4133	3.6491	4.1567	4.7715
n=2000	Середнє	0.0270	0.0710	0.0999	0.1657	0.1861	0.2666
	Дисперсія	1.0966	2.1455	2.3894	3.5211	3.9927	4.5894
n=3000	Середнє	0.0229	0.0537	0.08214	0.1522	0.1500	0.2232
	Дисперсія	1.0941	2.1325	2.3646	3.4946	3.9300	4.4839
n=4000	Середнє	0.0244	0.0514	0.0778	0.1306	0.1364	0.1893
	Дисперсія	1.0982	2.1415	2.3388	3.4814	3.9500	4.4764
Асимптотичні	Середнє	0	0	0	0	0	0
	Дисперсія	1.0931	2.1240	2.3387	3.4773	3.9690	4.4978

Емпіричні та відповідні асимптотичні густини представлені на рис. 1 у випадку нормально розподіленого вектора $\mathbf{X}_t$ та на рис. 2 – t-розподіленого з 5 ступенями свободи. В обох випадках швидкість збіжності емпіричних розподілів до відповідних асимптотичних є задовільною. Для випадку t-розподіленого вектора дохідностей $\mathbf{X}_t$ швидкість є меншою, але навіть при k=30 активів у портфелі добре наближення досягається при обсязі вибірки n=4000, що на сьогодні є помірною кількістю історичних даних.

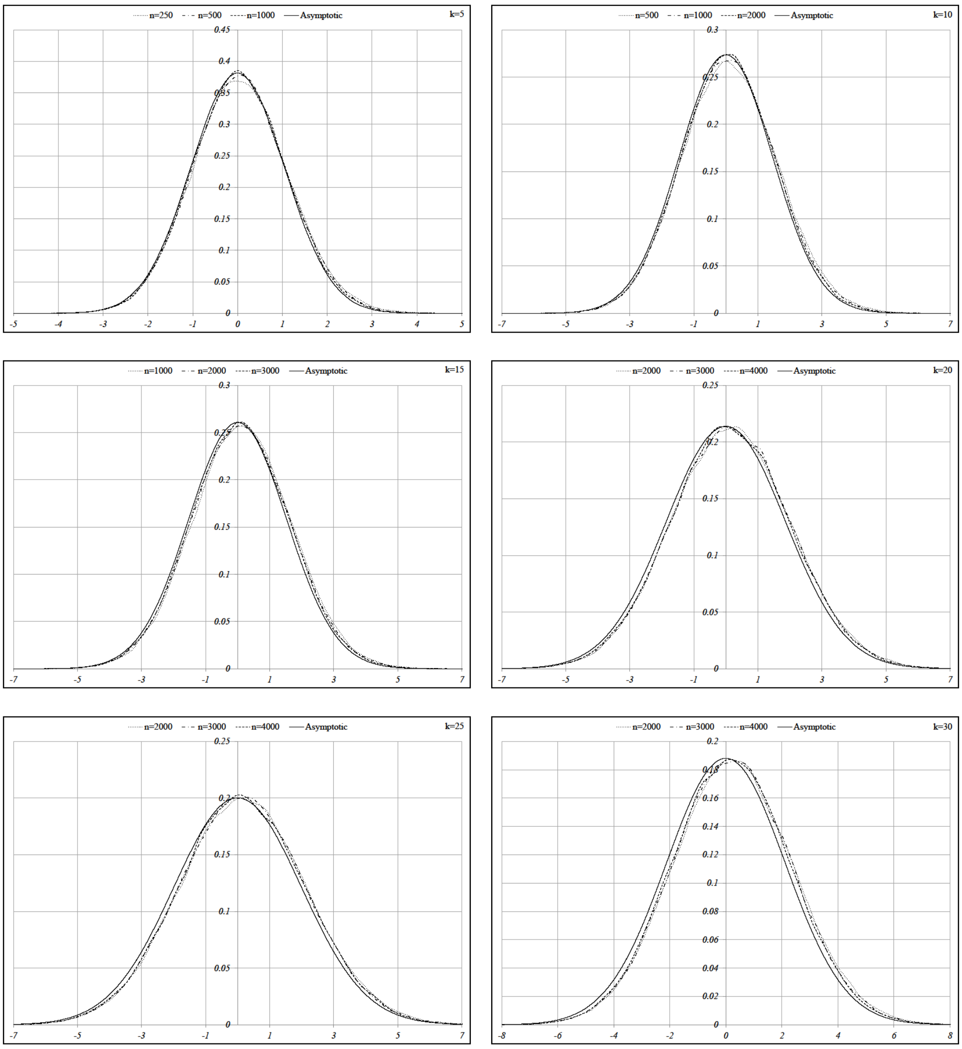

Рис. 2. Емпіричні та відповідні асимптотичні густини випадкової величини $\sqrt{n}\left(\hat{\beta}_{SR}-\beta_{SR}\right)$ за припущення t-розподіленості з 5 ступенями свободи вектора дохідностей $\mathbf{X}_t$

Емпіричні та асимптотичні середні значення та дисперсії представлені в табл. 1 за припущення нормальності розподілу вектора дохідностей $\mathbf{X}_t$ та в табл.2 – за припущення *t*-розподіленості з 5 ступенями свободи вектора дохідностей $\mathbf{X}_t$. Аналіз цих результатів підтверджує висновки графічного аналізу.

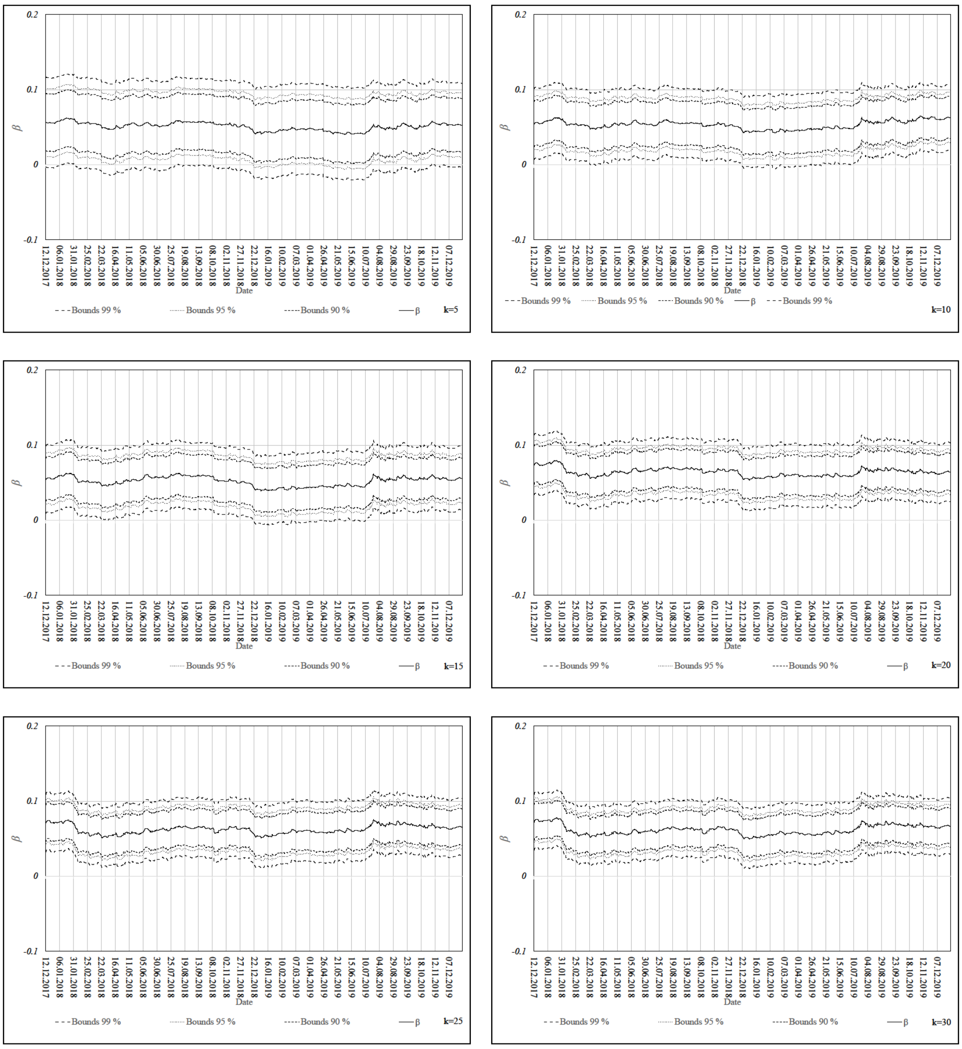

Рис. 3. Вибіркова оцінка та (1–*γ*) інтервали довіри (*γ*={0.1; 0.05; 0.01}) коефіцієнта ризику портфеля з максимальним відношенням Шарпа.

Використаємо отримані результати для дослідження ризиковості портфеля з максимальним відношенням Шарпа шляхом побудови асимптотичного $(1–\gamma)$ інтервалу довіри для значень γ={0.1; 0.05; 0.01}. З метою забезпечення достатньої точності результатів використаємо вибірку історичних значень обсягом n=2000 спостережень. Розглянемо портфелі з k={5, 10, 15, 20, 25, 30} акцій перших компаній зі списку Dow Jones розміщених в алфавітному порядку. Використаємо дані про щоденні спостереження за дохідностями цих акцій за період з 05.01.2010 по 31.12.2019 (2514 спостережень) та застосуємо метод біжучого вікна довжиною n=2000 спостережень для оцінки параметрів розподілу. Отримані результати представлено на рис. 3. Бачимо, що у всіх розглянутих випадках значення верхньої межі для коефіцієнта ризику портфеля з максимальним відношенням Шарпа менше ніж 0.2, що свідчить про надзвичайно високу ризиковість цього портфеля та є підтвердженням результатів отриманих у [10].

4. Висновки.

Важливим завданням практика фінансового ринку є не лише правильне використання апарату економіко-математичного моделювання, але й правильна інтерпретація отриманих результатів. Досягненню цього передує усвідомлення, що результати більшості економіко-математичних моделей є випадковими величинами. Для правильного розуміння результатів цих моделей необхідне проведення їх ймовірнісного аналізу. Не завжди можливо отримати точний розподіл, який дає найповніше уявлення про властивості випадкової величини, а тому рекомендується вивчити її асимптотичні властивості. Недоліком цього методу може бути повільна збіжність емпіричних характеристик до асимптотичних. Наслідком цього є необхідність використання вибірок великого обсягу для досягнення потрібної точності. Тому у випадку використання асимптотичних характеристик важливим є проведення їх емпіричного аналізу з метою дослідження швидкості збіжності до асимптотичних границь.

В роботі досліджено швидкість збіжності емпіричних розподілів вибіркової оцінки коефіцієнта ризику портфеля з максимальним відношенням Шарпа до асимптотичного розподілу, оскільки для вибіркових оцінок характеристик такого портфеля не існує математичного сподівання, то використання їх на практиці некоректно. Проведений аналіз дає змогу замінити портфель з максимальним відношенням Шарпа на статистично еквівалентний портфель з максимальною очікуваною корисністю, вибіркові оцінки характеристик якого не володіють згаданими недоліками. Цей результат дав змогу дослідити ризиковість портфеля з максимальним відношенням Шарпа та встановити його надзвичайно високу ризиковість.

1. Okhrin Y. Distributional properties of optimal portfolio weights / Y. Okhrin, W. Schmid // Journal of econometrics. – 2006. – № 134. – P. 235 – 256.
2. Schmid W. On the existence of unbiased estimators for the portfolio weights obtained by maximizing the Sharpe ratio / W. Schmid, T. Zabolotskyy // ASTA – Advances in statistical analysis. – 2008. – № 92. – P. 29 – 34.
3. Хохлов В. Ю. Математичні методи в управлінні портфелем цінних паперів / В. Ю. Хохлов. – К.: Кондор-Видавництво, 2017. – 298 с.
4. Ling S. Asymptotic theory for a vector ARMA-GARCH model / S. Ling, M. McAleer // Econometric theory. – 2003. – № 19. – P. 280 – 310.
5. Найман Е. Л. Розподіл щоденної дохідності акцій / Е. Л. Найман, В. Ю. Хохлов // Фінанси України. – 2012. – № 2. – С. 70–79.
6. Aparicio F. Empirical distributions of stock returns: Scandinavian securities markets, 1990-95 / F. Aparicio, J. Estrada // European journal of finance. – 2001. – № 7. – P. 1–21.
7. Linden M. A model for stock return distribution / M. Linden // International journal of finance and economics. – 2001. – № 6. – P. 159–169.
8. Markowitz H. Foundations of portfolio theory / H. Markowitz // Journal of finance. – 1991. – № 7. – P. 469 – 477.
9. Blattberg R. C. A comparison of the stable and student distributions as statistical models for stock prices / R. C. Blattberg, N. J. Gonedes // Journal of business. – 1974. – № 47. – P. 244–280.

10. Bodnar T. How risky is the optimal portfolio which maximizes the Sharpe ratio? / T. Bodnar, T. Zabolotskyy // ASTA – Advances in statistical analysis. – 2017. – № 101(1). – P. 1–28.
11. Zabolotskyy T. Determination and estimation of risk aversion coefficients / T. Bodnar, Y. Okhrin, V. Vitlinskyy, T. Zabolotskyy // Computational management science. – 2018. – № 15 (2). – P. 297-317.
12. Fang K. T. Symmetric multivariate and related distributions / K. T. Fang, S. Kotz, K. W. Ng. – London : Chapman and Hall. 1990. – 220 p.

References

1. Okhrin Y., Schmid W. (2006). Distributional properties of optimal portfolio weights, *Journal of econometrics,* 134, pp. 235 – 256.
2. Schmid W., Zabolotskyy T. (2008). On the existence of unbiased estimators for the portfolio weights obtained by maximizing the Sharpe ratio, *ASTA – Advances in statistical analysis,* 92, pp. 29 – 34.
3. Khokhlov V. Yu. (2017). Matematychni metody v upravlinni portfelem tsinnykh paperiv, K.: Kondor-Vydavnytstvo, 298.
4. Ling S., McAleer M. (2003). Asymptotic theory for a vector ARMA-GARCH model, *Econometric theory,* 19, pp. 280 – 310.
5. Naiman E. L., Khokhlov V. Yu. (2012). Rozpodil shchodennoi dokhidnosti aktsii, *Finansy Ukrainy,* 2, pp.70–79.
6. Aparicio F., Estrada J. (2001). Empirical distributions of stock returns: Scandinavian securities markets, 1990-95, *European journal of finance,* 7, pp.1–21.
7. Linden M. (2001). A model for stock return distribution, *International journal of finance and economics,* 6, pp. 159–169.
8. Markowitz H. (1991). Foundations of portfolio theory, *Journal of finance*, 7, pp.469 – 477.
9. Blattberg R. C., Gonedes N. J. (1974). A comparison of the stable and student distributions as statistical models for stock prices, *Journal of business,* 47, pp.244–280.
10. Bodnar T., Zabolotskyy T. (2017). How risky is the optimal portfolio which maximizes the Sharpe ratio?, *ASTA – Advances in statistical analysis,* 101(1), pp.1–28.
11. Bodnar T., Okhrin Y., Vitlinskyy V., Zabolotskyy T. (2018). Determination and estimation of risk aversion coefficients, *Computational management science,* 15 (2), pp.297-317.
12. Fang K.T., Kotz S., Ng K. W. (1990) Symmetric multivariate and related distributions, London : Chapman and Hall, 220.

EMPIRICAL ANALYSIS OF THE SAMPLE ESTIMATOR OF INVESTOR'S RISK AVERSION COEFFICIENT OF PORTFOLIO WITH THE MAXIMUM SHARPE RATIO

M. Zabolotskyy, T. Zabolotskyy, T. Baibula

Ivan Franko National University of Lviv
1 Universytetska Str., Lviv, 79000, Ukraine

The paper is dedicated to empirical analysis of the asymptotic properties of the sample estimator of the risk aversion coefficient of the portfolio with the maximum Sharpe ratio. Because the mathematical expectation of the sample estimators of the weights, expected return and variance of this portfolio do not exist its practical use is questionable. We propose to solve this problem by substituting instead of the maximum Sharpe ratio portfolio statistically equivalent portfolio with the maximum expected utility. It is done by considering distributional properties of the sample estimator of the investor's risk aversion coefficient of the portfolio with the maximum Sharpe ratio. Using Monte Carlo method with 100000 repetitions and the data based on the returns of 30 stocks included into the Dow Jones index for the period from 01.01.2019 to 31.12.2019 (251 observation) we provide empirical distributions of the sample estimator of the corresponding investor's risk aversion coefficient and investigate the convergence of these distributions to the corresponding asymptotic one. We make use of two assumptions concerning asset returns vector distribution: multivariate normal distribution or multivariate t distribution with 5 degrees of freedom. We conclude that convergence of empirical distributions to corresponding asymptotic is fast enough in both cases. Even for portfolio with 30 assets and t distributed returns a good approximation is reached for moderate sample size of historical values (n=4000). We make use of this result to investigate the degree of maximum Sharpe ratio portfolio risk. Using the rolling window of size n=2000 we show that this portfolio was very risky during 2018-2019 years by considering asymptotic confidence interval of its risk aversion coefficient. We observe that in all considered cases the upper limit of 99 % confidence interval is smaller than 0.2.

Keywords**:** Sharpe ratio, risk aversion coefficient, asymptotic distribution, confidence interval, elliptical distribution, Monte Carlo method.