

## ОБЧИСЛЮВАЛЬНА МАТЕМАТИКА

УДК 519.6

### ПРО ВИКОРИСТАННЯ МЕТОДУ ІНТЕГРАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ДЛЯ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧІ НЕЙМАНА ДЛЯ ЕЛІПТИЧНОГО РІВНЯННЯ ЗІ ЗМІННИМИ КОЕФІЦІЄНТАМИ

А. Бешлей

*Львівський національний університет імені Івана Франка,  
вул. Університетська, 1, Львів, 79000, e-mail: [andriy.beshley@lnu.edu.ua](mailto:andriy.beshley@lnu.edu.ua)*

Розглянуто наближене розв'язування внутрішньої задачі Неймана для еліптичного рівняння зі змінними коефіцієнтами в двовимірній однозв'язній області. Використовуючи функцію Леві, цю диференціальну задачу зведено до системи гранично-просторових інтегральних рівнянь другого роду. Чисельне розв'язування параметризованої системи виконано методом Нистрьома з використанням відповідних квадратур. Ефективність цього методу підтверджують результати чисельних експериментів.

*Ключові слова:* еліптичне рівняння зі змінними коефіцієнтами, функція Леві, гранично-просторові інтегральні рівняння, сильна та логарифмічна особливості, метод Нистрьома.

#### 1. ФОРМУЛЮВАННЯ КРАЙОВОЇ ЗАДАЧІ НЕЙМАНА

Диференціальні задачі для еліптичних рівнянь зі змінними коефіцієнтами часто трапляються під час моделювання різних фізичних процесів, зокрема, і в електричній імпедансній томографії (ЕІТ) – техніці медичної візуалізації, в якій зображення провідності частини тіла визначається з електричних вимірювань поверхні цього тіла. Застосування ЕІТ можна знайти в таких галузях: медицина, геофізика чи контроль руйнування (визначення тріщин у матеріалах) [4]. Також такі диференціальні рівняння часто виникають у задачах, що охоплюють неоднорідні середовища (наприклад, функціонально градуировані матеріали) [9].

Відомо, що крайову задачу для лінійного диференціального рівняння в частинних похідних (наприклад, задачу Неймана для рівняння Лапласа) можна звести до граничного інтегрального рівняння і далі розв'язати його чисельно. Проте такий підхід потребує наявності фундаментального розв'язку для диференціального рівняння. На жаль, загалом фундаментальний розв'язок для еліптичних рівнянь зі змінними коефіцієнтами невідомий, що унеможливорює зведення задачі до інтегрального рівняння з інтегралами лише по границі, а відтак зменшення розмірності вихідної задачі. Одним з варіантів розв'язування подібної задачі є використання параметрікса (функції Леві), що редукує диференціальну задачу до гранично-просторового інтегрального рівняння (ГПР).

Варто зазначити, що можна розглядати два типи ГПР. ГПР називають об'єднаним, якщо невідома функція  $u$  на границі є просто слідом функції  $u$  в області, на противагу так званому відокремленому ГПР, де невідомі граничні функції розглядають як формально незалежні від невідомих змінних в області [8]. Інтегральні рівняння першого типу можна отримати внаслідок застосування формули Гріна до диференціального оператора рівняння з врахуванням граничної умови. Якщо ж для

зведення крайової задачі до інтегрального рівняння використовувати об'ємний потенціал і граничний потенціал, що відповідають параметріксу з невідомими густинами, то отримаємо систему ГПР другого типу [7]. Саме цей підхід ми застосовували.

Нехай  $D$  – обмежена однозв'язна область в  $R^2$  з границею  $\Gamma \in C^2$ . Треба знайти функцію  $u \in H^1(D)$ , що задовольняє диференціальне рівняння

$$Lu = \operatorname{div}(\sigma(x)\nabla u(x)) = 0, \quad x \in D \quad (1)$$

та граничну умову Неймана

$$\sigma(x) \frac{\partial u}{\partial \nu}(x) = f(x), \quad x \in \Gamma, \quad (2)$$

де  $\sigma \in C^\infty(D)$ ,  $\sigma(x) > 0$ ,  $x \in D$ ;  $f \in H^{-1/2}(\Gamma)$  – задані функції, причому

$$\int_{\Gamma} f(y) ds(y) = 0. \quad (3)$$

Відомо [3], що задача (1)-(3) має єдиний розв'язок з точністю до константи. Єдиність розв'язку цієї задачі можна отримати, наклавши додаткову умову на шукану функцію  $u$ . Не обмежуючи загальності, вважатимемо, що область  $D$  містить початок координат і значення невідомої функції  $u$  в цій точці дорівнює 0.

## 2. ЗВЕДЕННЯ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНОЇ ЗАДАЧІ ДО СИСТЕМИ ІНТЕГРАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

Оскільки в загальному випадку явного вигляду фундаментального розв'язку для рівняння (1) немає, то для зведення крайової задачі до інтегрального рівняння будемо використовувати параметрікс.

**Означення 1.** Функція  $P(x, y)$ ,  $x, y \in R^2$  називається параметріксом (або функцією Леві) диференціального оператора  $L$ , якщо

$$L_x P(x, y) = \delta(x - y) + R(x, y), \quad x \neq y,$$

де  $\delta$  – функція Дірака;  $R$  – функція залишку, що має слабку особливість при  $x = y$ .

Відомо [8], що параметрікс для диференціального рівняння (1) зі змінними коефіцієнтами набуває вигляду

$$P(x, y) = \frac{\ln|x - y|}{2\pi\sigma(y)}, \quad x, y \in R^2.$$

Легко бачити, що функція залишку  $R$  в цьому випадку має таке подання:

$$R(x, y) = \frac{(x - y) \cdot \nabla \sigma(x)}{2\pi\sigma(y)|x - y|^2}.$$

Через  $|x - y|$  позначено евклідову відстань між точками  $x$  та  $y$ . Зауважимо, що параметрікс має не єдине зображення.

Подамо розв'язок задачі (1)-(3) у вигляді суми об'ємного потенціалу та потенціалу простого шару, що містять параметрікс

$$u(x) = \int_D \mu(y) P(x, y) dy + \int_{\Gamma} \psi(y) P(x, y) ds(y), \quad x \in D, \quad (4)$$

де  $\mu \in C(D)$ ,  $\psi \in C(\Gamma)$  – невідомі густини. Підставивши (4) в рівняння (1) та крайову умову (2), враховуючи означення параметріксу та властивості нормальної похідної

потенціалу простого шару [5], отримаємо таку систему інтегральних рівнянь другого роду

$$\begin{cases} \mu(x) + \int_D \mu(y)R(x, y)dy + \int_\Gamma \psi(y)R(x, y)ds(y) = 0, & x \in D, \\ -\frac{1}{2}\psi(x) + \int_D \mu(y)\sigma(x)\frac{\partial P(x, y)}{\partial v(x)} dy + \int_\Gamma \psi(y)\sigma(x)\frac{\partial P(x, y)}{\partial v(x)} ds(y) = f(x), & x \in \Gamma. \end{cases} \quad (5)$$

У випадку, коли  $\sigma(x) = 1$  (задача (1)-(2) вироджується в задачу Неймана для рівняння Лапласа) система (5) спрощується до класичного інтегрального рівняння другого роду

$$-\frac{1}{2}\psi(x) + \frac{1}{2\pi} \int_\Gamma \psi(y)\frac{\partial \ln|x-y|}{\partial v(x)} ds(y) = f(x), \quad x \in \Gamma. \quad (6)$$

Розв'язок рівняння (6) існує, коли крива  $\Gamma$  не є так званим  $\Gamma$ -контуром [2]. Достатньою умовою забезпечення розв'язку є вибір області  $D$  досить малого розміру, такого, що  $\text{diam } D < 1$  [1]. Проте в цьому випадку рівняння (6) має безліч розв'язків і для досягнення єдиності розглядають рівняння

$$-\frac{1}{2}\psi(x) + \frac{1}{2\pi} \int_\Gamma \psi(y)\frac{\partial \ln|x-y|}{\partial v(x)} ds(y) - \psi(x^*) = f(x), \quad x, x^* \in \Gamma. \quad (7)$$

Відомо [2], що IP (7) має єдиний розв'язок  $\psi \in L^2(\Gamma)$  для будь-яких  $f \in L^2(\Gamma)$ , і що розв'язок рівняння (7) є серед розв'язків рівняння (6). Тому розглядатимемо таку модифіковану систему:

$$\begin{cases} \mu(x) + \int_D \mu(y)R(x, y)dy + \int_\Gamma \psi(y)R(x, y)ds(y) = 0, & x \in D, \\ -\frac{1}{2}\psi(x) + \int_D \mu(y)\sigma(x)\frac{\partial P(x, y)}{\partial v(x)} dy + \int_\Gamma \psi(y)\sigma(x)\frac{\partial P(x, y)}{\partial v(x)} ds(y) - \psi(x^*) = f(x), & x \in \Gamma, \end{cases} \quad (8)$$

де  $x^* \in \Gamma$ .

### 3. ПАРАМЕТРИЗАЦІЯ СИСТЕМИ ТА ЧИСЕЛЬНЕ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ

Не обмежуючи загальності, будемо вважати, що область  $D$  симетрична стосовно початку координат, а гранична крива  $\Gamma$  має параметричне подання

$$\Gamma = \{x(t) = (x_1(t), x_2(t)), \quad t \in [0, 2\pi]\},$$

де  $x_1(t), x_2(t) - 2\pi$ -періодичні функції,  $|x'(t)| > 0$  для всіх  $t \in [0, 2\pi]$  і  $x \in C^2([0, 2\pi] \times [0, 2\pi])$ . Зробимо заміну змінних у подвійних інтегралах. Для точки  $y = (y_1, y_2)$

$$\begin{cases} y_1 = p_1(\xi, \tau) = \xi x_1(\tau), \\ y_2 = p_2(\xi, \tau) = \xi x_2(\tau), \end{cases}$$

де  $(\xi, \tau) \in \Pi = [0, 1] \times [0, 2\pi]$ , а якобіан  $J(\xi, \tau) = \xi(x_1(\tau)x_2'(\tau) - x_2(\tau)x_1'(\tau))$ . Вектор-функція  $p = (p_1, p_2)$  позначає відображення з області  $\Pi$  в область  $D$ , тому подібно точку  $x$  можна записати як  $x = p(\eta, t)$ . Звідси систему (8) можна переписати в еквівалентній параметризованій формі

$$\begin{cases} \varphi(\eta, t) + \frac{1}{2\pi} \int_{\Pi} \varphi(\xi, \tau) \tilde{R}(\eta, t; \xi, \tau) d\tau d\xi + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varphi_0(\tau) \tilde{R}(\eta, t; \tau) d\tau = 0, & (\eta, t) \in \Pi, \\ -\frac{1}{2} \varphi_0(t) - \varphi_0(0) + \frac{1}{2\pi} \int_{\Pi} \varphi(\xi, \tau) \tilde{P}(t; \xi, \tau) d\tau d\xi + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varphi_0(\tau) \tilde{P}(t, \tau) d\tau = \tilde{f}(t), & t \in [0, 2\pi], \end{cases} \quad (9)$$

де  $\varphi(\eta, t) = \mu(p(\eta, t))$ ,  $\varphi_0(t) = \psi(x(t))$ ,  $\tilde{f}(t) = f(x(t))$ , з ядрами

$$\begin{aligned} \tilde{R}(\eta, t; \xi, \tau) &= 2\pi R(p(\eta, t), p(\xi, \tau)) J(\xi, \tau), & \tilde{R}(\eta, t; \tau) &= 2\pi R(p(\eta, t), x(\tau)) |x'(\tau)|, \\ \tilde{P}(t; \xi, \tau) &= 2\pi \sigma(x(t)) \frac{\partial P(x(t), \xi x(\tau))}{\partial v(x(t))} J(\xi, \tau), & \tilde{P}(t, \tau) &= 2\pi \sigma(x(t)) \frac{\partial P(x(t), x(\tau))}{\partial v(x(t))} |x'(\tau)|, \end{aligned}$$

а як точки  $x^*$  взято  $x^* = x(0)$ .

Ядро  $\tilde{R}$  містить особливість типу Коші при  $\eta = \xi$ , для виділення якої використаємо подання вектор-функції визначеної на  $\Gamma$  через її нормальну та тангенціальну складові. Нехай крива  $\Gamma$  достатньо гладка, що існують одиничний тангенціальний вектор  $\theta$  та одиничний вектор нормалі  $v$ . Тоді вектор-функцію  $\omega$ , визначену на  $\Gamma$ , можна подати в такому вигляді:

$$\omega = (\omega \cdot v)v + (\omega \cdot \theta)\theta. \quad (10)$$

Враховуючи те, що змінна  $\tau$  відповідає за інтегрування по кривій в інтегралі з ядром  $\tilde{R}$ , а також беручи  $\nabla \sigma$  в (10) замість  $\omega$ , можемо отримати таку тотожність:

$$\begin{aligned} - \int_0^{2\pi} f(\tau) \frac{(x(t) - x(\tau)) \cdot \nabla \sigma(t)}{|x(t) - x(\tau)|^2} d\tau &= -\nabla \sigma(t) \cdot \nabla \int_0^{2\pi} f(\tau) \ln|x(t) - x(\tau)| d\tau = \\ &= \nabla \sigma(t) \cdot (v(t) \frac{\partial}{\partial v(t)} \int_0^{2\pi} f(\tau) \ln|x(t) - x(\tau)| d\tau + \theta(t) \frac{\partial}{\partial \theta(t)} \int_0^{2\pi} f(\tau) \ln|x(t) - x(\tau)| d\tau) = \\ &= I_1(t) + I_2(t). \end{aligned}$$

Для виділення особливості Коші, що міститься в  $I_2$ , потрібно додати та відняти

$$\frac{\sin(\tau - t)}{2(1 - \cos(\tau - t))}$$

та провести подібні перетворення, що описані в [6]. Виконавши

аналогічні перетворення, можна подати ядро  $\tilde{R}(\eta, t; \eta, t)$  в такій формі:

$$\tilde{R}(\eta, t; \eta, \tau) = \tilde{R}^{(1)}(\eta, t; \eta, \tau) + \tilde{R}^{(2)}(\eta, t; \eta, \tau) \cot \frac{\tau - t}{2},$$

з гладкими ядрами

$$\begin{aligned} \tilde{R}^{(1)}(\eta, t; \eta, \tau) &= \frac{\nabla \sigma(\eta x(t)) \cdot v(t) K_1(t, \tau)}{\eta \sigma(\eta x(\tau))} J(\eta, \tau) - \frac{1}{|x'(t)|} \frac{\nabla \sigma(\eta x(t)) \cdot \theta(t) K_2(t, \tau)}{\eta \sigma(\eta x(\tau))} J(\eta, \tau), \\ \tilde{R}^{(2)}(\eta, t; \eta, t) &= -\frac{1}{2|x'(t)|} \frac{\nabla \sigma(\eta x(t)) \cdot \theta(t)}{\eta \sigma(\eta x(\tau))} J(\eta, \tau). \end{aligned}$$

Тут функції  $K_1(t, \tau)$  та  $K_2(t, \tau)$  мають таке подання:

$$K_1(t, \tau) = \begin{cases} \frac{(x(t) - x(\tau)) \cdot v(t)}{|x(t) - x(\tau)|^2}, & t \neq \tau, \\ \frac{-x_2'(t)x_1''(t) + x_1'(t)x_2''(t)}{2|x'(t)|^3}, & t = \tau, \end{cases}$$

$$K_2(t, \tau) = \begin{cases} \frac{(x(\tau) - x(t)) \cdot x'(t)}{|x(t) - x(\tau)|^2} - \frac{\sin(\tau - t)}{2(1 - \cos(\tau - t))}, & t \neq \tau, \\ -\frac{x'(t) \cdot x''(t)}{2|x'(t)|^2}, & t = \tau. \end{cases}$$

Ядра  $\tilde{R}$  та  $\tilde{P}$  мають такий явний вигляд:

$$\tilde{R}(\eta, t; \tau) = \frac{(\eta x(t) - x(\tau)) \cdot \nabla \sigma(\eta x(t)) |x'(\tau)|}{\sigma(x(\tau)) |\eta x(t) - x(\tau)|^2},$$

$$\tilde{P}(t; \xi, \tau) = \frac{\sigma(x(t))}{\sigma(\xi x(\tau))} \frac{(x(t) - \xi x(\tau)) \cdot v(x(t))}{|x(t) - \xi x(\tau)|^2} J(\xi, \tau).$$

Можна довести, що ядро  $\tilde{P}$  не має особливості та визначається так:

$$\tilde{P}(t, \tau) = \begin{cases} \frac{\sigma(x(t)) |x'(\tau)| (x(t) - x(\tau))(x_2'(t), -x_1'(t))}{\sigma(x(\tau)) |x'(t)| |x(t) - x(\tau)|^2}, & t \neq \tau, \\ -\frac{x''(t) \cdot v(x(t))}{2|x'(t)|}, & t = \tau. \end{cases}$$

Для чисельного розв'язування будемо використовувати такі квадратурні формули:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\Pi} g(\xi, \tau) d\tau d\xi \approx \frac{1}{2n} \sum_{k=1}^N \sum_{j=0}^{2n-1} \alpha_k g(\eta_k, t_j),$$

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\Pi} g(\xi, \tau) \cot \frac{\tau - t}{2} d\tau d\xi \approx \sum_{k=1}^N \sum_{j=0}^{2n-1} \alpha_k T_j(t) g(\eta_k, t_j),$$

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\tau) d\tau \approx \frac{1}{2n} \sum_{j=0}^{2n-1} f(t_j),$$

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\tau) \ln \left( \frac{4}{e} \sin^2 \frac{t - \tau}{2} \right) d\tau \approx \sum_{j=0}^{2n-1} F_j(t) f(t_j),$$

де  $\alpha_k \in \mathbb{R}$  – квадратурні ваги;  $\eta_k \in (0,1)$ ,  $t_j = \frac{j\pi}{n}$  – квадратурні вузли, а вагові функції мають такий вигляд:

$$F_k(t) = -\frac{1}{2n} \left[ 1 + 2 \sum_{m=1}^{n-1} \frac{1}{m} \cos m(t - t_k) + \frac{1}{n} \cos n(t - t_k) \right],$$

$$T_k(t) = -\frac{1}{n} \sum_{m=1}^{n-1} \sin m(t - t_k) - \frac{1}{2n} \sin n(t - t_k).$$

Останню квадратурну формулу будемо використовувати для обчислення наближеного значення розв'язку.

Після застосування наведених квадратур до інтегралів у системі (9) і колокації отриманих апроксимаційних рівнянь у точках, що відповідають квадратурним вузлам, маємо таку повністю дискретизовану систему рівнянь:

$$\begin{cases} \varphi_{mi} + \sum_{k=1}^N \sum_{j=0}^{2n-1} \alpha_k \varphi_{kj} \bar{R}(\eta_m, t_i; \eta_k, t_j) + \frac{1}{2n} \sum_{j=0}^{2n-1} \varphi_{0j} \tilde{R}(\eta_m, t_i; t_j) = 0, \\ -\frac{1}{2} \varphi_{0i} - \varphi_{00} + \frac{1}{2n} \sum_{k=1}^N \sum_{j=0}^{2n-1} \alpha_k \varphi_{kj} \tilde{P}(t_i; \eta_k, t_j) + \frac{1}{2n} \sum_{j=0}^{2n-1} \varphi_{0j} \tilde{P}(t_i, t_j) = \tilde{f}_i, \end{cases} \quad (11)$$

з  $\varphi_{mi} \approx \varphi(\eta_m, t_i)$ ,  $\varphi_{0i} \approx \varphi_0(t_i)$ ,  $\tilde{f}_i = \tilde{f}(t_i)$ ,  $m=1, \dots, N$ ,  $i=0, \dots, 2n-1$ ,

$$\bar{R}(\eta_m, t_i; \eta_k, t_j) = \begin{cases} \frac{1}{2n} \tilde{R}(\eta_m, t_i; \eta_k, t_j), & m \neq k, \\ \frac{1}{2n} \tilde{R}^{(1)}(\eta_m, t_i; \eta_m, t_j) + T_j(t_i) \tilde{R}^{(2)}(\eta_m, t_i; \eta_m, t_j), & m = k. \end{cases}$$

Систему (11) можна переписати у такому вигляді:

$$\begin{cases} \sum_{j=0}^{2n-1} \left[ A_{0j}^{mi} \varphi_{0j} + \sum_{k=1}^N (\delta_{ij} + A_{kj}^{mi}) \varphi_{kj} \right] = 0, & m=1, \dots, N; i=0, \dots, 2n-1, \\ \sum_{j=0}^{2n-1} \left[ (A_{0j}^{0i} - \frac{\delta_{ij}}{2} - \delta_{i0}) \varphi_{0j} + \sum_{k=1}^N A_{kj}^{0i} \varphi_{kj} \right] = \tilde{f}_i, & i=0, \dots, 2n-1 \end{cases} \quad (12)$$

з матричними коефіцієнтами

$$A_{0j}^{mi} = \frac{1}{2n} \tilde{R}(\eta_m, t_i; t_j) = 0;$$

$$A_{kj}^{mi} = \alpha_k \begin{cases} \frac{1}{2n} \tilde{R}(\eta_m, t_i; \eta_k, t_j), & m \neq k, \\ \frac{1}{2n} \tilde{R}^{(1)}(\eta_m, t_i; \eta_m, t_j) + T_j(t_i) \tilde{R}^{(2)}(\eta_m, t_i; \eta_m, t_j), & m = k, \end{cases}$$

$$A_{0j}^{0i} = \frac{1}{2n} \tilde{P}(t_i; t_j) = 0,$$

$$A_{kj}^{0i} = \frac{\alpha_k}{2n} \tilde{P}(t_i; \eta_k, t_j) = 0.$$

Для знаходження наближеного розв'язку в області використаємо формулу (4). Виконавши параметризацію області, описану раніше, отримаємо таке подання:

$$u(\eta, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{\Pi} \varphi(\xi, \tau) \bar{P}(\eta, t; \xi, \tau) d\tau d\xi + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varphi_0(\tau) \dot{P}(\eta, t; \tau) d\tau, \quad (\eta, t) \in \Pi \quad (13)$$

з ядрами

$$\bar{P}(\eta, t; \xi, \tau) = 2\pi P(p(\eta, t), p(\xi, \tau)) J(\xi, \tau), \quad \dot{P}(\eta, t; \tau) = 2\pi P(p(\eta, t), x(\tau)) |x'(\tau)|.$$

Варто зазначити, що ядро  $\bar{P}$  містить логарифмічну особливість при  $\eta = \xi$ , яку можна виділити у вигляді відповідної вагової функції. Враховуючи властивості ядер та застосувавши квадратурні формули, знаходимо наближений розв'язок задачі як

$$u(\eta, t) \approx \sum_{j=0}^{2n-1} \left[ \frac{1}{2n} \dot{P}(\eta, t; t_j) \varphi_{0j} + \sum_{k=1}^N \alpha_k \bar{P}(\eta, t; \eta_k, t_j) \varphi_{kj} \right], \quad (\eta, t) \in \Pi \quad (14)$$

3

$$\dot{P}(\eta, t; t_j) = \frac{\ln|\eta x(t) - x(t_j)|}{\sigma(x(t_j))} |x'(t_j)|,$$

$$\bar{P}(\eta, t; \eta_k, t_j) = \begin{cases} \frac{1}{2n} \bar{P}(\eta, t; \eta_k, t_j), & \eta \neq \eta_k, \\ \bar{P}^{(1)}(\eta, t; \eta_k, t_j) F_j(t) + \frac{1}{2n} \bar{P}^{(2)}(\eta, t; \eta_k, t_j), & \eta = \eta_k \end{cases}$$

і відповідними функціями  $\bar{P}^{(1)}, \bar{P}^{(2)}$

$$\bar{P}^{(1)}(\eta, t; \eta_k, t_j) = \frac{1}{2} \frac{J(\eta_k, t_j)}{\sigma(\eta_k x(t_j))},$$

$$P^{(2)}(\eta, t; \eta_k, t_j) = \begin{cases} \frac{1}{2} \frac{J(\eta_k, t_j)}{\sigma(\eta_k x(t_j))} \ln \frac{\eta^2 |x(t) - x(t_j)|^2}{e^{\frac{4}{e} \sin^2 \frac{t-t_j}{2}}}, & t \neq t_j, \\ \frac{1}{2} \frac{J(\eta_k, t_j)}{\sigma(\eta_k x(t_j))} \ln(e \eta^2 |x'(t)|^2), & t = t_j. \end{cases}$$

#### 4. ЧИСЕЛЬНІ ЕКСПЕРИМЕНТИ

Для наближеного обчислення подвійних інтегралів у системі (9), зокрема для інтегрування по змінній  $\xi \in (0,1)$ , будемо використовувати формулу середніх прямокутників з квадратурними вузлами

$$\eta_k = 1 - \frac{2k-1}{N}, \quad k = 1, \dots, N$$

та вагами

$$\alpha_k = \frac{1}{N}.$$

Для наближеного обчислення відносної похибки розв'язку в області  $D$  за нормою  $L_2$  використовуємо таку апроксимацію з  $\tilde{N} = 20, \tilde{n} = 32$ :

$$\frac{\|u_{Nn} - u_{ex}\|_{L_2(D)}}{\|u_{ex}\|_{L_2(D)}} \approx \left( \frac{\sum_{k=1}^{\tilde{N}} \sum_{j=0}^{2\tilde{n}-1} (u_{Nn} - u_{ex})^2(\tilde{\eta}_k, \tilde{t}_j) J(\tilde{\eta}_k, \tilde{t}_j)}{\sum_{k=1}^{\tilde{N}} \sum_{j=0}^{2\tilde{n}-1} u_{ex}^2(\tilde{\eta}_k, \tilde{t}_j) J(\tilde{\eta}_k, \tilde{t}_j)} \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (15)$$

**Приклад 1.** Область  $D$  – круг радіуса  $R = 1$ ,

$$\sigma(x) = 4 - x_1^2 + x_2^2, \quad x \in D;$$

$$f(x) = (4 - x_1^2 + x_2^2) 2x_1 x_2, \quad x \in \Gamma.$$

Легко бачити, що функція  $f$  задовольняє умову (3). Функція  $u_{ex} = x_1 x_2$  є розв'язком задачі (1)-(3) для наведених вище даних. У табл. 1 наведено похибки розв'язку за мах-нормою на трьох кривих, що містяться в області  $D$  та визначаються за формулою

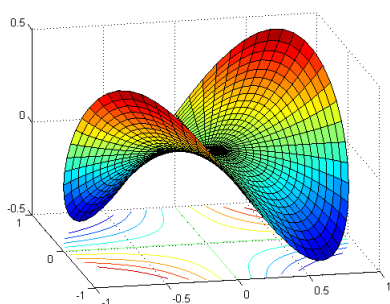
$$\Gamma_k = \{x_k(t) = (1 - 0.25k)x(t), t \in [0, 2\pi], k = 1, 2, 3\}$$

Параметри  $N$  та  $n$  відповідають за кількість квадратурних вузлів у системі (12). Також у таблиці наведено відносну похибку розв'язку в області, обчислену за формулою (15)

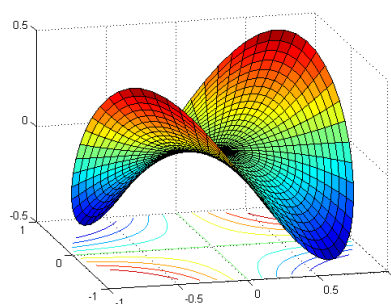
Таблиця 1

Похибки для прикладу 1

N	Nn	$\ u_{Nn} - u_{ex}\ _{C(\Gamma_1)}$	$\ u_{Nn} - u_{ex}\ _{C(\Gamma_2)}$	$\ u_{Nn} - u_{ex}\ _{C(\Gamma_3)}$	$\frac{\ u_{Nn} - u_{ex}\ _{L_2(D)}}{\ u_{ex}\ _{L_2(D)}} 100\%$
3	16	6.21E-005	1.33E-005	1.05E-006	3.39617
	32	1.94E-007	3.87E-008	3.08E-009	0.74938
	64	1.66E-012	3.31E-013	2.67E-014	0.06774
7	16	8.09E-004	1.65E-004	1.34E-005	3.40873
	32	6.44E-005	1.33E-005	1.18E-006	0.74813
	64	5.52E-007	1.14E-007	1.02E-008	0.06772
15	16	2.38E-003	4.59E-004	2.88E-005	3.56188
	32	4.57E-004	9.38E-005	8.01E-006	0.76257
	64	4.23E-005	8.79E-006	7.97E-007	0.06882



а



б

Наближений розв'язок при  $N=7, n=32$  (а) і точний (б) розв'язки для прикладу 1

**Приклад 2.** Область  $D$  – еліпс з півосями  $a = 2, b = 1$ , тобто область обмежує крива  $x(t) = (a \cos(t), b \sin(t)), t \in [0, 2\pi]$ ,  $\sigma(x) = 8 + 2x_1x_2, x = (x_1, x_2) \in D$ ;

$$\tilde{f}(t) = \frac{(8 + 2ab \cos(t) \sin(t))(2a \cos(t)b \sin(t) - 2b \sin(t)a \sin(t))}{\sqrt{b^2 \cos^2(t) + a^2 \sin^2(t)}}. \text{ Для таких вхідних}$$

даних точний розв'язок  $u_{ex}(x) = x_1^2 - x_2^2$ . Результати обчислень наведено в табл. 2.



Таблиця 2

## Похибки для прикладу 2

N	n	$\ u_{Nn} - u_{ex}\ _{C(\Gamma_1)}$	$\ u_{Nn} - u_{ex}\ _{C(\Gamma_2)}$	$\ u_{Nn} - u_{ex}\ _{C(\Gamma_3)}$	$\frac{\ u_{Nn} - u_{ex}\ _{L_2(D)}}{\ u_{ex}\ _{L_2(D)}} 100\%$
3	16	1.54E-005	2.77E-006	1.86E-004	6.16930
	32	2.70E-007	1.40E-006	6.47E-007	1.80596
	64	1.84E-010	1.28E-010	4.32E-011	0.28752
7	32	1.03E-006	9.51E-005	1.22E-004	1.81412
	64	3.37E-006	4.76E-006	1.12E-006	0.28746
	128	7.96E-010	9.60E-011	1.14E-009	0.02211
15	64	5.86E-005	1.63E-006	3.25E-005	0.31450
	128	4.32E-006	4.47E-006	1.29E-006	0.02262
	256	5.51E-010	1.04E-009	2.15E-009	0.00038

## 6. ВИСНОВКИ

За допомогою функції Леві крайова задача Неймана для еліптичного рівняння зі змінними коефіцієнтами зведена до системи гранично-просторових інтегральних рівнянь другого роду. Виконано параметризацію області, а для застосування методу Нистрьома та відповідних квадратур було виділено сильну та логарифмічну особливості в системі. Чисельні експерименти демонструють залежність між параметрами дискретизації та водночас доводять збіжність схеми у разі одночасного їх збільшення.

## СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. *Бабенко К.Є.* Про чисельне розв'язування задачі Неймана для еліптичного рівняння зі змінними коефіцієнтами методом граничних інтегральних рівнянь / К.Є. Бабенко, Р.С. Хапко // Вісник Харківського національного університету. – 2012. – **1015**. – С. 25-32.
2. *Atkinson K.* The numerical solution of integral equations of the second kind / K. Atkinson. – Cambridge: Cambridge University Press, 1997. – 552 p.
3. *Babenko Ch.* On the combination of singular and hypersingular boundary integral equations for the Neumann boundary value problem for an elliptic equation with variable coefficients / Ch. Babenko, R. Chapko // Journal of Numerical and Applied Mathematics (Kyiv). – 2012. – **109**. – P. 1-10.
4. *Kirsch A.* An Introduction to the Mathematical Theory of Inverse Problems / A. Kirsch. – New-York: Springer, 2010. – 307 p.
5. *Kress R.* Linear integral equations / R. Kress. – New-York – Berlin – Heidelberg: Springer-Verlag, 1999. – 365 p.
6. *Kress R.* On Trefftz' integral equation for the Bernoulli free boundary value problem / R. Kress // Numer Math., 2017. – **136** (2). – P. 503-522.
7. *Mikhailov S.E.* Analysis of Segregated Boundary-Domain Integral Equations for Variable-Coefficient Dirichlet and Neumann Problems with General Data / S.E. Mikhailov // ArXiv: 1509.03501. – 2015. – P. 1-32.

8. *Mikhailov S.E.* Numerical solution and spectrum of boundary-domain integral equation for the Neumann BVP with variable coefficient / S.E. Mikhailov, N.A. Mohamed // *International Journal of Computer Mathematics*, 2012. – **89**. – P. 1488-1503.
9. *Suresh S.* Fundamentals of Functionally Graded Materials / S. Suresh, A. Mortensen. – London: Institute of Materials, 1998. – 165 p.

*Стаття: надійшла до редколегії 12.09.2018*

*доопрацьовано 3.10.2018*

*прийнята до друку 31.10.2018*

## ON THE INTEGRAL EQUATION APPROACH FOR SOLUTION OF A NEUMANN BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR AN ELLIPTIC EQUATION WITH VARIABLE COEFFICIENTS

**A. Beshley**

*Ivan Franko National University of Lviv,*

*Universytetska Str., 1, Lviv, 79000, e-mail: [andriy.beshley@lnu.edu.ua](mailto:andriy.beshley@lnu.edu.ua)*

There are a lot of different physical processes modeling of which lead us to a differential problems for elliptic equations with variable coefficients. An example of such process is electrical impedance tomography (EIT) – a medical imaging technique in which an image of the conductivity of some part of the body is determined from electrical surface measurements. Applications of EIT can be found in medicine (lung function monitoring, skin cancer detection), nondestructive testing (determination of cracks in materials) or geophysics. Elliptic equations with variable coefficients often appear in problems for heterogeneous environments (for instance, functionally graded materials).

It is well known that a boundary value problem for a differential partial equation (e.g. the Neumann boundary value problem for Laplace equation) can be reduced to a boundary integral equation and then numerically solved. However, this approach requires availability of a fundamental solution for main differential equation. Unfortunately, in the general case, the fundamental solution for elliptic equations with variable coefficients is unknown that makes it impossible to consider an equivalent boundary integral equation. One of options for solving this problem is to use a parametrix (Levi function) that transforms the differential problem to the boundary-integral equation (BDIE).

Two types of BDIEs can be distinguished. BDIE is called united if the unknown function  $u$  on the boundary is just a trace of the function  $u$  in the domain as opposed to the segregated BDIE, where the unknown boundary functions are considered as formally independent of the unknown variables in the domain. The integral equations of the first type can be obtained as a consequence of Green's formula application to the differential operator of the equation taking into account the boundary condition. Using the parametrix-based potential operators we can obtain a system of BDIEs of the second type. The last approach is used in this paper.

We consider the Neumann boundary value problem for an elliptic equation with variable coefficients in a bounded simply connected domain. It is known that the solution  $u$  of the problem can be determined uniquely up to an additive constant. A uniqueness of the unknown function  $u$  can be reached by applying an additional condition. We assume that the solution domain contains an origin of coordinates and the solution function equals zero at that point. Since the fundamental solution for is in general not explicitly known, as it was mentioned above, we use the parametrix.

Using an indirect integral equation approach the solution of the Neumann problem is represented as a sum of the volume and the single layer potentials (based on the parametrix) with unknown densities over domain and boundary. Substituting the representation of the solution to the differential equation and Neumann boundary condition, taking into account Levi function properties and jump relation property of the normal derivative of the single layer potential, we obtain a system of BDIEs of the second kind. Further we consider the modified system (to satisfy the uniqueness condition), assume that our simply connected domain is symmetric relative to origin and the boundary

curve has the parametric representation. Making the change of variables in the double integrals the system of integral equations can be rewritten in the parameterized form.

The strong singularity in one of the kernels can be split using a statement in which a vector function is represented via its normal and tangential vectors. Employing the quadratures for continuous and strong singular integrands together with collocating the approximating equations at the quadrature points lead to the fully discretized system. Having the densities values we can find an approximate solution in the domain that is confirmed by numerical experiments.

*Key words:* elliptic equation with variable coefficients, Levi function, boundary-domain integral equations, strong and logarithmic singularities, Nyström method.