ВІСНИК ЛЬВІВ. УН-ТУ
Серія прикл. матем. інформ.
2011. Вип. 17. С. 129–138

VISNYK LVIV UNIV.
Ser. Appl. Math. Inform.
2011. Is. 17. P. 129–138

І Н Ф О Р М А Т И К А

УДК 519.212

ОПТИМІЗАЦІЯ ПАРАМЕТРІВ ОБСЛУГОВУВАННЯ ДЛЯ МОДИФІКОВАНИХ СИСТЕМ M/M/1/M ТА M/M/1

Б. Копитко, К. Жерновий

Львівський національний університет імені Івана Франка,
вул. Університетська, 1, Львів, 79000, e-mail: k_zhernovyi@yahoo.com

Вивчено системи обслуговування M/M/1/m і M/M/1, в яких відбувається блокування вхідного потоку від моменту початку другого обслуговування поспіль до моменту звільнення системи і перехід на "швидке" обслуговування за умови перевищення кількості замовлень у системі деякого порогового рівня l. Визначено стаціонарні характеристики систем та розв'язано задачі оптимального вибору: 1) інтенсивності "швидкого" обслуговування; 2) порога перемикання на "швидке" обслуговування; 3) інтенсивності "повільного" обслуговування; 4) інтенсивності обслуговування без переходу на "швидке" обслуговування.

Ключові слова: системи M/M/1/m і M/M/1, блокування вхідного потоку, оптимізація режимів обслуговування.

1. ВСТУП

Адекватною математичною моделлю процесів, які відбуваються в багатьох фрагментах і вузлах сучасних комп'ютерних мереж і мереж зв'язку, є системи обслуговування з керованим режимом функціонування [2, 1, §2.6, 2.7]. Для таких систем, крім питання визначення стаціонарних характеристик, розглядають, зокрема, задачу оптимального вибору режимів обслуговування, пов'язану з мінімізацією деякого економічного функціонала якості функціонування системи (див. статтю [3] і огляд [2]).

Якщо система обслуговування може працювати в кількох режимах з різними інтенсивностями обслуговування, то задачі визначення її стаціонарних характеристик і оптимального вибору режимів обслуговування значно ускладнюються порівняно з такими самими задачами для класичних систем M/M/1/m і M/M/1. Застосування режиму блокування вхідного потоку дещо спрощує систему рівнянь для стаціонарних імовірностей станів системи і в деяких випадках дає змогу знаходити її розв'язки в явному вигляді.

Далі ми розглянемо задачі оптимального керування системами обслуговування, в яких відбувається блокування вхідного потоку від моменту початку другого обслуговування поспіль до моменту звільнення системи і перехід на режим "швидкого" обслуговування за умови перевищення кількості замовлень у системі деякого порогового рівня l.

2. СТАЦІОНАРНІ ХАРАКТЕРИСТИКИ СИСТЕМИ З ОБМЕЖЕНОЮ ЧЕРГОЮ

Розглянемо одноканальну систему обслуговування, для якої довжина черги не може перевищувати числа m. Замовлення в систему надходять по одному, а проміжки часу між моментами надходження замовлень – незалежні випадкові величини, розподілені за показниковим законом з параметром λ.

Замовлення приймаються в систему, коли вона вільна, а також під час першого обслуговування після стану вільної системи, якщо довжина черги не перевищує числа m.

Обслуговування замовлень може відбуватися у двох режимах. Час обслуговування в кожному з них розподілений за показниковим законом з параметрами μ_1 і μ_2 відповідно. Припускаємо, що $\mu_1 < \mu_2$, тобто перший режим "повільний", а другий "швидкий". "Швидке" обслуговування відбувається за умови, що в момент початку обслуговування чергового замовлення кількість замовлень у системі перевищує число l $\left(l = \overline{1, m-1}\right)$.

Введемо подвійну нумерацію станів системи: s_{kj} – стан k рівня j. Тут k $\left(k = \overline{0, m+1}\right)$ – кількість замовлень, які перебувають у системі; значення j $\left(j = \overline{1, m+1}\right)$ відповідають тим станам системи, коли обслуговується j-те за порядком замовлення після періоду вільної системи; s_{01} – стан, коли система вільна. Стан s_{01} умовно належить до групи станів першого рівня, завдяки чому стаціонарні ймовірності, що відповідають станам s_{k1} $\left(k = \overline{0, m}\right)$, ми зможемо записати однією формулою (див. співвідношення (3)).

Нехай $p_{kj}(t)$ – імовірність того, що система в момент часу t перебуває у стані s_{kj}. Кількість станів системи скінченна, процес зміни станів транзитивний марковський, тому існують границі

$$p_{kj} = \lim_{t\to\infty} p_{kj}(t) \qquad \left(k = \overline{0,\, m+1}; \quad j = \overline{1, m+1}\right).$$

Користуючись графом станів системи, запишемо рівняння для визначення стаціонарних імовірностей p_{kj}

$$\begin{gathered}
\mu_1 \sum_{k=1}^{m+1} p_{1k} - \lambda p_{01} = 0; \qquad \lambda p_{k-1,1} - (\lambda + \mu_1) p_{k1} = 0 \quad \left(k = \overline{1,\, m}\right); \\
\lambda p_{m1} - \mu_1 p_{m+1,1} = 0; \qquad \mu_1 (p_{k+1,j} - p_{k,j+1}) = 0 \quad \left(k = \overline{1,\, l-1};\ j = \overline{1,\, m-k+1}\right); \\
\mu_1 (p_{l+1,1} - p_{l2}) = 0; \qquad \mu_1 p_{k+1,1} - \mu_2 p_{k2} = 0 \quad \left(k = \overline{l+1,\, m}\right); \\
\mu_2 p_{l+1,j} - \mu_1 p_{l,j+1} = 0 \quad \left(j = \overline{2,\, m-l+1}\right); \\
\mu_2 (p_{k+1,j} - p_{k,j+1}) = 0 \quad \left(k = \overline{l+1,\, m-1};\ j = \overline{2,\, m-k+1}\right).
\end{gathered} \tag{1}$$

Введемо позначення $\beta = 1/\rho,\ \gamma = \mu_1/\mu_2,$ де $\rho = \lambda/\mu_1$ – коефіцієнт завантаження системи у режимі "повільного" обслуговування. Вигляд рівнянь (1) дає змогу виразити всі ймовірності, що відповідають станам рівнів $j \ge 2$, через імовірності станів першого рівня p_{k1}

$$p_{kj} = p_{k+j-1,1} \qquad \left(k=\overline{1,\ l};\quad j=\overline{2,\ m-k+2}\right);$$
$$p_{kj} = \gamma p_{k+j-1,1} \qquad \left(k=\overline{l+1,\ m};\quad j=\overline{2,\ m-k+2}\right). \tag{2}$$

Використовуючи співвідношення (2), з рівнянь (1) одержимо

$$p_{01} = \beta\sum_{k=1}^{m+1} p_{k1}; \qquad p_{k-1,1} = (1+\beta)p_{k1} \quad \left(k=\overline{1,\ m}\right); \qquad p_{m1} = \beta p_{m+1,1},$$

звідки ми маємо змогу виразити всі ймовірності p_{k1} через $p_{m+1,1}$

$$p_{k1} = \beta(1+\beta)^{m-k}\, p_{m+1,1} \qquad \left(k=\overline{0,\ m}\right). \tag{3}$$

Імовірність $p_{m+1,1}$ знайдемо після підстановки правих частин співвідношень (3) у нормувальну умову

$$p_{01} + \sum_{k=1}^{l+1} kp_{k1} + \sum_{k=1}^{m-l}(l+1+\gamma k)\,p_{l+k+1,1} = 1;$$

$$p_{m+1,1} = \frac{\beta}{(\beta^2+\beta+1)(1+\beta)^m - (1-\gamma)(1+\beta)^{m-l} - \gamma}. \tag{4}$$

Рівності (2)–(4) цілковито визначають ергодичний розподіл імовірностей станів s_{kj}.

Використовуючи розподіл (2)–(4), можемо знайти ергодичний розподіл довжини черги у системі. Позначимо через π_k стаціонарну ймовірність того, що довжина черги дорівнює k $\left(k=\overline{0,m}\right)$. Тоді

$$\pi_0 = \sum_{s=0}^{m+1} p_{s1} = (1+\beta)^{m+1}\, p_{m+1,1} = \frac{\beta(1+\beta)^{m+1}}{(\beta^2+\beta+1)(1+\beta)^m - (1-\gamma)(1+\beta)^{m-l} - \gamma};$$

$$\pi_k = \sum_{s=k+1}^{m+1} p_{s1} = (1+\beta)^{m-k}\, p_{m+1,1} =$$

$$= \frac{\beta(1+\beta)^{m-k}}{(\beta^2+\beta+1)(1+\beta)^m - (1-\gamma)(1+\beta)^{m-l} - \gamma} \qquad \left(k=\overline{1,\ l-1}\right); \tag{5}$$

$$\pi_k = p_{k+1,1} + \gamma\sum_{s=k+2}^{m+1} p_{s1} = (\beta+\gamma)(1+\beta)^{m-k-1}\, p_{m+1,1} =$$

$$= \frac{\beta(\beta+\gamma)(1+\beta)^{m-k-1}}{(\beta^2+\beta+1)(1+\beta)^m - (1-\gamma)(1+\beta)^{m-l} - \gamma} \quad \left(k=\overline{l,\ m-1}\right); \quad \pi_m = p_{m+1,1}.$$

Середню довжину черги визначимо як математичне сподівання дискретної випадкової величини

$$\overline{r} = \sum_{k=1}^{m} k\pi_k = \frac{p_{m+1,1}}{\beta^2}\Big((1+\beta)^{m+1} - (1-\gamma)(l\beta+1)(1+\beta)^{m-l} - \beta - \gamma(m\beta+1)\Big). \tag{6}$$

Стаціонарне значення ймовірності обслуговування замовлення, що надійшло на вхід системи, (відносну пропускну здатність системи) обчислимо як суму ймовірностей тих станів, в яких вхідний потік не заблокований,

$$P_{\text{обс}} = \sum_{k=0}^{m} p_{k1} = \frac{\beta\left((1+\beta)^{m+1}-1\right)}{(\beta^2+\beta+1)(1+\beta)^m-(1-\gamma)(1+\beta)^{m-l}-\gamma}. \qquad (7)$$

Середній час перебування замовлення в черзі визначимо за формулою Літтла, яка для системи з втратами замовлень набула вигляду

$$\overline{t_r} = \frac{\overline{r}}{\lambda P_{\text{обс}}} = \frac{(1+\beta)^{m+1}-(1-\gamma)(l\beta+1)(1+\beta)^{m-l}-\beta-\gamma(m\beta+1)}{\lambda\beta^2\left((1+\beta)^{m+1}-1\right)}. \qquad (8)$$

Запишемо також формули для стаціонарних імовірностей P_i, які виражають середній відносний час використання режиму обслуговування з інтенсивністю μ_i $(i=1;\,2)$

$$\begin{aligned} P_1 &= \sum_{k=1}^{l+1} kp_{k1} + (l+1)\sum_{k=l+2}^{m+1} p_{k1} = \frac{(1+\beta)^{m+1}-(1+\beta)^{m-l}}{(\beta^2+\beta+1)(1+\beta)^m-(1-\gamma)(1+\beta)^{m-l}-\gamma};\\ P_2 &= \gamma\sum_{k=l+2}^{m+1}(k-l-1)p_{k1} = \frac{\gamma\left((1+\beta)^{m-l}-1\right)}{(\beta^2+\beta+1)(1+\beta)^m-(1-\gamma)(1+\beta)^{m-l}-\gamma}. \end{aligned} \qquad (9)$$

3. СТАЦІОНАРНІ ХАРАКТЕРИСТИКИ СИСТЕМИ З НЕОБМЕЖЕНОЮ ЧЕРГОЮ

Перейшовши до границі при $m\to\infty$ у співвідношеннях (2)–(9), одержимо ергодичні розподіли $\{p_{kj}\}$ і $\{\pi_k\}$ та формули для стаціонарних характеристик відповідної системи обслуговування без обмежень на довжину черги

$$p_{k1} = \frac{\beta^2(1+\beta)^l}{(1+\beta)^k\left((\beta^2+\beta+1)(1+\beta)^l+\gamma-1\right)} \qquad (k=0,\,1,\,2,\,\ldots);$$

$$p_{kj} = p_{k+j-1,1} \quad \left(k=\overline{1,\,l};\quad j=2,\,3,\,\ldots\right);$$

$$p_{kj} = \gamma p_{k+j-1,1} \quad \left(k=l+1,\ l+2,\,\ldots;\quad j=2,\,3,\,\ldots\right);$$

$$\pi_0 = \frac{\beta(1+\beta)^{l+1}}{(\beta^2+\beta+1)(1+\beta)^l+\gamma-1};\quad \pi_k = \frac{\beta(1+\beta)^l}{(1+\beta)^k\left((\beta^2+\beta+1)(1+\beta)^l+\gamma-1\right)} \quad \left(k=\overline{1,\,l-1}\right);$$

$$\pi_k = \frac{\beta(\beta+\gamma)(1+\beta)^{l-1}}{(1+\beta)^k\left((\beta^2+\beta+1)(1+\beta)^l+\gamma-1\right)} \quad \left(k=l,\ l+1,\,\ldots\right);$$

$$\overline{r} = \frac{(1+\beta)^{l+1}-(1-\gamma)(l\beta+1)}{\beta\left((\beta^2+\beta+1)(1+\beta)^l+\gamma-1\right)};\qquad P_{\text{обс}} = \frac{\beta(1+\beta)^{l+1}}{(\beta^2+\beta+1)(1+\beta)^l+\gamma-1};$$

$$\overline{t_r} = \frac{(1+\beta)^{l+1}-(1-\gamma)(l\beta+1)}{\lambda\beta^2(1+\beta)^{l+1}};\qquad P_1 = \frac{(1+\beta)^{l+1}-1}{(\beta^2+\beta+1)(1+\beta)^l+\gamma-1};$$

$$P_2 = \frac{\gamma}{(\beta^2+\beta+1)(1+\beta)^l+\gamma-1}.$$

4. ЗАДАЧА ОПТИМАЛЬНОГО ВИБОРУ ІНТЕНСИВНОСТІ “ШВИДКОГО” ОБСЛУГОВУВАННЯ

Розглянемо економічний функціонал якості функціонування системи обслуговування у вигляді

$$I_\gamma = c_r \overline{t}_r + c_1 P_1 + c_2 P_2, \tag{10}$$

де c_r – штраф за одиницю часу перебування у черзі; P_i – середній відносний час використання i-го режиму; c_i – вартість одиниці часу використання i-го режиму, $i = 1; 2$. Зафіксуємо інтенсивність “повільного” обслуговування μ_1, тоді можна вважати, що $c_1 = const$. Припустимо, що $c_2 = c_2(\gamma) = c_1 / \gamma$, де $\gamma = \mu_1 / \mu_2$, $0 < \gamma < 1$. Вважаючи заданими параметри β і l, вибиратимемо параметр γ так, щоб мінімізувати середній ризик I_γ.

Після підстановки виразів для $\overline{t}_r$, P_1 і P_2 у співвідношення (10) одержимо явну залежність функціонала I_γ від параметра γ. Отже, задачу зведено до мінімізації функції $I_\gamma = I_\gamma(\gamma)$ на проміжку $0 < \gamma < 1$.

Достатні умови існування мінімуму функціонала (10) визначає теорема 1.

Теорема 1. *Якщо* $c_2 = c_1 / \gamma$, *і:*

1) *для* $m < \infty$ *виконуються умови*

$$\frac{(1+\beta)^{2(m-l)}\left((\beta^2+\beta+1)(1+\beta)^l-1\right)^2\left((l\beta+1)(1+\beta)^{m-l}-m\beta-1\right)}{\lambda\beta^2\left((1+\beta)^{m+1}-1\right)^2\left((1+\beta)^{m-l}-1\right)} <$$
$$< \frac{c_1}{c_r} < \frac{\left((\beta^2+\beta+1)(1+\beta)^m-1\right)^2\left((l\beta+1)(1+\beta)^{m-l}-m\beta-1\right)}{\lambda\beta^2\left((1+\beta)^{m+1}-1\right)^2\left((1+\beta)^{m-l}-1\right)}; \tag{11}$$

$$\gamma^* = \frac{1}{(1+\beta)^{m-l}-1}\left(\beta\left((1+\beta)^{m+1}-1\right)\sqrt{\frac{c_1\lambda\left((1+\beta)^{m-l}-1\right)}{c_r\left((l\beta+1)(1+\beta)^{m-l}-m\beta-1\right)}}\right)+$$
$$+\frac{1}{(1+\beta)^{m-l}-1}\left((1+\beta)^{m-l}-(\beta^2+\beta+1)(1+\beta)^m\right);$$

2) *для* $m = \infty$ *виконуються умови*

$$\frac{(l\beta+1)\left((\beta^2+\beta+1)(1+\beta)^l-1\right)^2}{\lambda\beta^2(1+\beta)^{2l+2}} < \frac{c_1}{c_r} < \frac{(l\beta+1)(\beta^2+\beta+1)^2(1+\beta)^{2l}}{\lambda\beta^2(1+\beta)^{2l+2}}; \tag{12}$$

$$\gamma^* = \beta(1+\beta)^{l+1}\sqrt{\frac{c_1\lambda}{c_r(l\beta+1)}} - (\beta^2+\beta+1)(1+\beta)^l + 1;$$

то мінімум функціонала I_γ *на множині* $\gamma \in (0; 1)$ *існує і досягається для* $\gamma = \gamma^*$.

Доведення. Похідна функції $I_\gamma(\gamma)$ має вигляд

$$I'_\gamma(\gamma) = a_1 - \frac{a_2}{(a_3 + a_4\gamma)^2},$$

де сталі a_i $\left(i = \overline{1, 4}\right)$ додатні. Виконання умов (11), (12) (своїх для кожного випадку відповідно) забезпечує належність кореня γ^* рівняння $I'_\gamma(\gamma) = 0$ проміжкові (0; 1). Функція $y = y(\gamma) = I'_\gamma(\gamma)$ монотонно зростає, оскільки $y(\gamma^*) = 0,$ то $y(\gamma^* - \varepsilon) < 0,$ $y(\gamma^* + \varepsilon) > 0$ для як завгодно малого $\varepsilon > 0,$ а це означає, що в точці $\gamma = \gamma^*$ функція $I_\gamma(\gamma)$ досягає мінімуму. Теорему доведено.

***Зауваження* 1**. *Якщо розглядати мінімум функціонала* I_γ *для всіх* $\gamma > 0,$ *то теорема* 1 *залишається правильною за умови виконання лише перших частин подвійних нерівностей* (11), (12).

5. ЗАДАЧА ОПТИМАЛЬНОГО ВИБОРУ ПОРОГА ПЕРЕМИКАННЯ НА “ШВИДКЕ” ОБСЛУГОВУВАННЯ

Вважаючи заданими параметри $\beta > 0,$ $\gamma \in (0; 1),$ для системи без обмежень на довжину черги ($m = \infty$) вибиратимемо параметр l так, щоб мінімізувати середній ризик

$$I_l = c_r \overline{t_r} + c_1 P_1 + c_2 P_2,$$

де економічний зміст c_r, c_1, c_2 і ймовірнісний зміст $\overline{t_r}, P_1, P_2$ такий самий, як у функціоналі (10); $c_2 = c_1 / \gamma.$

Розглядаючи $\overline{t_r}, P_1$ і P_2 як функції від $l,$ одержимо задачу мінімізації функції $I_l = I_l(l)$ цілочисельної змінної $l \ge 1.$ Цю задачу ми зможемо розв’язати, якщо мінімізуємо функцію $I_l(l)$ для всіх дійсних $l \ge 1.$

Теорема 2. *Якщо* $c_2 = c_1 / \gamma$ *і виконується умова*

$$\frac{c_1}{c_r} \ge \frac{\left((\beta^2 + \beta + 1)(1 + \beta) - 1 + \gamma\right)^2 \left((1 + \beta)\ln(1 + \beta) - \beta\right)}{\lambda\beta^2 (1 + \beta)^4 \ln(1 + \beta)}, \tag{13}$$

то мінімум функціонала I_l *на множині дійсних* $l \ge 1$ *існує і досягається для* $l = l^*,$ *де* l^* – *єдиний на проміжку* $[1, \infty)$ *дійсний корінь рівняння*

$$\frac{\left((\beta^2 + \beta + 1)(1 + \beta)^l - 1 + \gamma\right)^2 \left((l\beta + 1)\ln(1 + \beta) - \beta\right)}{\lambda\beta^2 (1 + \beta)^{2l+2} \ln(1 + \beta)} = \frac{c_1}{c_r}. \tag{14}$$

Доведення. Похідна функції $I_l(l)$ має вигляд

$$I'_l(l) = a(l)\left(c_r f_r(l) - c_1 f_1(l)\right),$$

де $a(l) > 0,$ $f_r(l) > 0$ і $f_1(l) > 0$ для всіх $l \ge 1.$ Прирівнюючи $I'_l(l)$ до нуля, одержимо рівняння (14), ліву частину якого позначимо через $F(l) = f_r(l) / f_1(l).$ Можна переконатися, що $F'(l) > 0$ для $l \ge 1,$ тобто функція $F(l)$ монотонно зростає для всіх

$l \ge 1,$ тому на проміжку $[1, \infty)$ рівняння $I_l'(l) = 0$ має єдиний дійсний корінь $l = l^*$, якщо $c_1 / c_r \ge F(1)$ (тобто виконується умова (13)).

Оскільки $F(l^*) = c_1 / c_r$, то нерівність $I_l'(l^* - \varepsilon) < 0$ еквівалентна нерівності $F(l^*) > F(l^* - \varepsilon)$, а нерівність $I_l'(l^* + \varepsilon) > 0$ еквівалентна нерівності $F(l^*) < F(l^* + \varepsilon)$ для як завгодно малого $\varepsilon > 0$. Однак функція $F(l)$ зростаюча, тому $I_l'(l^* - \varepsilon) < 0$ і $I_l'(l^* + \varepsilon) > 0$, тобто в точці $l = l^*$ функція $I_l(l)$ досягає мінімуму. Теорему доведено.

***Зауваження* 2.** *Щоб знайти відношення* c_1 / c_r, *для якого досягається мінімум функціонала* I_l *при фіксованому цілому* $l^* \ge 1$, *достатньо це значення* l^* *підставити у ліву частину рівності* (14).

***Зауваження* 3.** *Зі зростанням порогового значення* l *величина функціонала* I_l *асимптотично наближається до скінченного значення, яке не залежить від інтенсивності “швидкого” обслуговування, тобто від параметра* γ

$$\lim_{l \to \infty} I_l(l) = \frac{c_r}{\lambda \beta^2} + \frac{c_1(1+\beta)}{\beta^2 + \beta + 1}.$$

6. ЗАДАЧА ОПТИМАЛЬНОГО ВИБОРУ ІНТЕНСИВНОСТІ “ПОВІЛЬНОГО” ОБСЛУГОВУВАННЯ

Вважаючи заданим пороговий рівень l, з’ясуємо вплив на якість функціонування системи з необмеженою чергою ($m = \infty$) такої одночасної зміни інтенсивностей обслуговування μ_1 і μ_2, при якій відношення цих інтенсивностей $\mu_1 / \mu_2 = \gamma \in (0;\, 1)$ залишається незмінним. Шукатимемо таке значення параметра $\beta > 0,$ яке б мінімізувало середній ризик

$$I_\beta = c_r \overline{t_r} + c_1(\beta) P_1 + c_2(\beta, \gamma) P_2,$$

де $c_1(\beta)$ – вартість одиниці часу роботи системи в режимі “повільного” обслуговування з фіксованою інтенсивністю $\mu_1 = \lambda\beta$; $c_2(\beta, \gamma)$ – вартість одиниці часу роботи системи в режимі “швидкого” обслуговування з фіксованою інтенсивністю $\mu_2 = \lambda\beta / \gamma$. Загалом згідно з економічним змістом вартостей c_1 і c_2, залежність $c_1(\beta)$ зростаюча, а $c_2(\beta, \gamma)$ – зростаюча за β і спадна за γ. Ми обмежимось випадком, коли $c_1(\beta) = c_1^* \beta^k$, $c_2(\beta, \gamma) = c_1(\beta) / \gamma$, де $k > 0$, $c_1^* = c_1(1)$.

Теорема 3. *Для функції* $I_\beta = I_\beta(\beta) = c_r \overline{t_r} + c_1^* \beta^k \left(P_1 + P_2 / \gamma\right)$ *виконуються граничні співвідношення*

$$\lim_{\beta \to \infty} I_\beta(\beta) = \begin{cases} 0, & k \in (0;\, 1); \\ c_1^*, & k = 1; \\ +\infty, & k > 1. \end{cases} \tag{15}$$

Якщо $k > 1$, *то мінімум функціонала* I_β *існує і досягається для* $\beta = \beta^*$, *де* β^* – *єдиний додатний корінь рівняння*

$$F_{1r}(\beta) = \frac{c_r}{c_1^*}, \tag{16}$$

$$F_{1r}(\beta) = f_1(\beta) / f_r(\beta);$$

$$f_1(\beta) = \lambda\beta^{k+2}(1+\beta)^{3l+2}\left((k-1)\beta^3 + 2(k-1)\beta^2 + k(2\beta+1)\right) -$$

$$-\lambda\beta^{k+2}(1+\beta)^{2l+2}(1-\gamma)\left((l+k+1)\beta + k\right);$$

$$f_r(\beta) = \left((\beta^2+\beta+1)(1+\beta)^l - 1 + \gamma\right)^2 \left(2(1+\beta)^{l+2} - (1-\gamma)(l^2\beta^2 + 2l\beta^2 + 2l\beta + 3\beta + 2)\right).$$

Доведення. Співвідношення (15) випливають з того, що

$$\lim_{\beta\to\infty} \overline{t}_r(\beta) = 0; \qquad \lim_{\beta\to\infty} \beta^k \left(P_1(\beta) + \frac{1}{\gamma}P_2(\beta)\right) = \begin{cases} 0, & k \in (0;\,1); \\ 1, & k = 1; \\ +\infty, & k > 1. \end{cases}$$

Розглянемо випадок, коли $k > 1$. Похідна функції $I_\beta(\beta)$ має вигляд

$$I'_\beta(\beta) = a_{1r}(\beta)\left(c_1^* f_1(\beta) - c_r f_r(\beta)\right),$$

де $a_{1r}(\beta) > 0,\ f_1(\beta) > 0,\ f_r(\beta) > 0$ для всіх $\beta > 0,$ тому рівняння $I'_\beta(\beta) = 0$ зводиться до вигляду (16). Функція $F_{1r}(\beta)$ монотонно зростаюча для всіх $\beta > 0$ при $l \ge 1,$ тому рівняння (16) має єдиний додатний корінь β^*. Міркуючи так само, як у доведенні теореми 2, переконаємось, що $I'_\beta(\beta^* - \varepsilon) < 0$ і $I'_\beta(\beta^* + \varepsilon) > 0$ для як завгодно малого $\varepsilon > 0,$ тобто в точці $\beta = \beta^*$ функція $I_\beta(\beta)$ досягає мінімуму. Теорему доведено.

7. ЗАДАЧА ОПТИМАЛЬНОГО ВИБОРУ ІНТЕНСИВНОСТІ ОБСЛУГОВУВАННЯ БЕЗ ПЕРЕХОДУ НА "ШВИДКЕ" ОБСЛУГОВУВАННЯ

Нехай $\gamma = 1,$ отже, перехід на режим "швидкого" обслуговування не відбувається, а стаціонарні характеристики системи обслуговування з необмеженою чергою ($m = \infty$) залежать лише від параметра β:

$$\overline{t}_r = \frac{1}{\lambda\beta^2}, \qquad P_1 + P_2 = \frac{1+\beta}{\beta^2+\beta+1},$$

де $P_1 + P_2 = 1 - p_{01}$ – середній відносний час робочого режиму системи (коефіцієнт використання системи).

Вибиратимемо параметр β так, щоб мінімізувати середній ризик

$$I_{\beta 1} = c_r \overline{t}_r + c_1(\beta)(P_1 + P_2),$$

де $c_1(\beta)$ – вартість одиниці часу роботи системи в режимі обслуговування з фіксованою інтенсивністю $\mu_1 = \lambda\beta.$ Як і в попередній задачі, обмежимось випадком, коли $c_1(\beta) = c_1^*\beta^k$, де $k > 0,\ c_1^* = c_1(1).$

Теорема 4. *Для функції* $I_{\beta 1} = I_{\beta 1}(\beta) = c_r \overline{t}_r + c_1^*\beta^k\left(P_1 + P_2\right)$ *виконуються граничні співвідношення*

$$\lim_{\beta\to\infty} I_{\beta 1}(\beta) = \begin{cases} 0, & k \in (0;\,1); \\ c_1^*, & k = 1; \\ +\infty, & k > 1. \end{cases}$$

Якщо $k > 1$, *то мінімум функціонала* $I_{\beta 1}$ *існує і досягається для* $\beta = \beta^*$, *де* β^* – *єдиний додатний корінь рівняння*

$$\frac{\lambda\beta^{k+2}\left((k-1)\beta^2(\beta+2)+k(2\beta+1)\right)}{2(\beta^2+\beta+1)^2} = \frac{c_r}{c_1^*}.$$

Доведення. Функціонал $I_{\beta 1}$ – це частковий випадок функціонала I_β при $\gamma = 1$. Теорема 3 залишається правильною і для $\gamma = 1$. Тому, підставляючи $\gamma = 1$ у співвідношення (15) і (16), одержимо твердження теореми 4.

8. ВИСНОВКИ

Для марковських систем обслуговування з блокуванням вхідного потоку від моменту початку другого обслуговування поспіль до моменту звільнення системи і переходом на “швидке” обслуговування за умови перевищення кількості замовлень у системі деякого порогового рівня l знайдено в явному вигляді розв’язки системи рівнянь для стаціонарних імовірностей станів. Визначено стаціонарні характеристики систем і розв’язано задачі оптимального вибору інтенсивності обслуговування та порога перемикання на “швидке” обслуговування. Задача знаходження оптимальної стратегії вибору режимів обслуговування має нетривіальний розв’язок, якщо до складу економічного функціонала входять доданки, один з яких зростає, а другий спадає зі зміною параметра оптимізації. Наприклад, застосування “повільного” обслуговування дає змогу зменшити платню за використання режиму, але водночас зростає час перебування замовлення у черзі.

ЛІТЕРАТУРА

1. *Дудин А. Н., Медведев Г. А., Меленец Ю. В.* Практикум на ЭВМ по теории массового обслуживания: Учебное пособие. – Минск, 2003.
2. *Рыков В. В.* Управляемые системы массового обслуживания // Итоги науки и техники. Сер. Теория вероятностей. Мат. статистика. Теор. кибернет. – 1975. – Т. 12. – С. 43–153.
3. *Соловьев А. Д.* Задача об оптимальном обслуживании // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика. – 1970. – № 5. – С. 40–50.

ОПТИМИЗАЦИЯ ПАРАМЕТРОВ ОБСЛУЖИВАНИЯ ДЛЯ МОДИФИЦИРОВАННЫХ СИСТЕМ M/M/1/M И M/M/1

Б. Копытко, К. Жерновый

Львовский национальный университет имени Ивана Франко,
ул. Университетская, 1, Львов, 79000, e-mail: k_zhernovyi@yahoo.com

Изучены системы обслуживания M/M/1/m и M/M/1, в которых осуществляется блокировка входного потока от момента начала второго обслуживания подряд до момента освобождения системы и переход на “быстрое” обслуживание при условии превышения числа заявок некоторого порогового уровня l. Определены стационарные характеристики систем и решены задачи оптимального выбора: 1) интенсивности "быстрого" обслуживания; 2) порога переключения на "быстрое" обслуживание; 3) интенсивности "медленного" обслуживания; 4) интенсивности обслуживания без перехода на "быстрое" обслуживание.

Ключевые слова: системы M/M/1/m и M/M/1, блокировка входного потока, оптимизация режимов обслуживания.

OPTIMIZATION OF PARAMETERS OF SERVICE FOR THE MODIFIED M/M/1/M AND M/M/1 QUEUEING SYSTEMS

B. Kopytko, K. Zhernovyi

Ivan Franko National University of Lviv,
Universytetska str, 1, Lviv, 79000, e-mail: k_zhernovyi@yahoo.com

The M/M/1/m and M/M/1 queueing systems with blocking of an input flow from the moment of the beginning of the second service in a row to the moment of free system and with transition to a mode of "fast" service under condition of excess of number of customers in system of some threshold level l are examined. Stationary characteristics of systems are defined and following problems of an optimum choice are solved for: 1) intensity of "fast" service; 2) a threshold of switching on "fast" service; 3) intensity of "slow" service; 4) intensity of service without transition to "fast» service.

Key words: the M/M/1/m and M/M/1 queueing systems, blocking of an input flow, optimization of modes of service.

Стаття надійшла до редколегії 12.02.2010
Прийнята до друку 11.02.2011