

УДК 539.3

НАБЛИЖЕНЕ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЛІНІЙНОЇ ДВОВИМІРНОЇ КРАЙОВОЇ ЗАДАЧІ ПРО ТРИМАЛЬНУ ЗДАТНІСТЬ ОРТОТРОПНИХ ПЛАСТИН

Н. Щербина^{*}, М. Жук^{**}, А. Кіндибалюк^{***}

^{*}Інститут прикладних проблем механіки і математики
ім. Я. С. Підстригача НАН України, вул. Наукова, 3-б, Львів, 79601

^{**}Львівський національний університет імені Івана Франка,
вул. Університетська, 1, Львів, 79000

^{***}Київський національний університет будівництва та архітектури,
Повітрофлотський проспект, 31, Київ, 03037

Наведено й обґрунтовано комбінований алгоритм наближеного розв'язування лінійної двовимірної крайової задачі стосовно розрахунку тримальної здатності ортотропної пластини з шарнірно опертими сторонами за дії поперечного навантаження. З використанням методу Канторовича розглядвана задача зредукована до одновимірної крайової задачі, розв'язок якої побудовано матрицантним числово-аналітичним методом. Головна особливість комбінованого алгоритму – можливість отримати наближений розв'язок в аналітичному вигляді з високою точністю. Подано обчислювальні аспекти алгоритму і деякі результати обчислень.

Ключові слова: двовимірна крайова задача, наближений розв'язок, комбінований алгоритм, ортотропна пластинка, тримальна здатність.

1. ВСТУП

Тонкі пластини як конструкційні елементи широко застосовують в інженерній практиці. Для розрахунку їхніх експлуатаційних характеристик застосовують різні теоретичні моделі й методи розв'язування відповідних крайових задач. Найбільш уживаною є модель, яка ґрунтується на гіпотезі Кірхгофа–Лява [1]. Зважаючи на складність розв'язування двовимірних крайових задач, до яких зводиться розрахунок пластин у двовимірному формулюванні, зазвичай застосовують числові методи (сіткові та безсіткові). Головна особливість сіткових методів пов'язана з редукцією досліджуваної диференціальної задачі до системи алгебричних рівнянь [5, 12]. Застосовують також безсіткові методи та розвивають підходи, які ґрунтуються на редукції двовимірних крайових задач до одновимірних і розв'язують їх уже добре опрацьованими методами, що дає змогу отримати достовірні результати з урахуванням фізичних особливостей задачі [4–8, 11, 16]. Суттєвою перевагою застосування аналітико-числових методів є можливість провести якісний аналіз отриманих результатів. Останнім часом для розв'язування прикладних задач застосовують також новітні комп'ютерні технології, зокрема нейромережеві [9, 14, 18–21].

Ми розглянемо комбінований алгоритм для наближеного розв'язування лінійної двовимірної крайової задачі, до якої зводиться розрахунок тримальної здатності тонкої прямокутної пластини з ортотропного матеріалу за дії поперечного навантаження у рамках класичної теорії пластин. Спочатку з використанням методу Канторовича виконуємо зниження вимірності математичної моделі. Отриману внаслідок редукції одновимірну крайову задачу розв'язуємо розробленим

матрицантним числово-аналітичним методом, який ґрунтується на редукції лінійної двоточкової крайової задачі до набору задач Коші і матрицантному поданні їхніх розв'язків. У разі застосування матрицантного числово-аналітичного методу для розв'язування лінійних одновимірних крайових задач головна проблема пов'язана з раціональним обчисленням матрицанту [15].

Опишемо алгоритм, який поєднує метод Канторовича і матрицантний числово-аналітичний метод, стосовно розв'язування лінійної двовимірної крайової задачі для диференціального рівняння четвертого порядку, яке описує згин ортотропної пластини зі сталими характеристиками [1], й наведемо його теоретичне обґрунтування. Розглянемо випадок граничних умов, які відповідають шарнірному опиранню пластини. Наближений розв'язок задачі згину ортотропної пластини у випадку жорстко закріплених країв, отриманий комбінованим алгоритмом, подано в [17].

2. ФОРМУЛЮВАННЯ ЗАДАЧІ ТА АЛГОРИТМ ПОБУДОВИ НАБЛИЖЕНОГО РОЗВ'ЯЗКУ

Розглянемо лінійну двовимірну крайову задачу, до якої зводиться розрахунок тримальної здатності тонкої прямокутної пластини з ортотропного матеріалу за дії поперечного навантаження $p(x, y)$ у рамках класичної теорії пластин [1]. Пластина віднесена до декартової системи координат x, y, z . Осі x і y перебувають в її серединній площині і напрямлені вздовж сторін a і b , відповідно, а вісь z спрямована перпендикулярно до цієї площини, $-h/2 \leq z \leq h/2$. Задача зводиться до розв'язання диференціального рівняння четвертого порядку в частинних похідних вигляду

$$Lw \equiv \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \beta_1 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \beta_2 \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = f(x, y), \quad (x, y) \in S, \quad (1)$$

де $w(x, y)$, $f(x, y) = p(x, y)/D_1$ – шукана і задана функції, відповідно; $\beta_1 = 2D_3/D_1$, $\beta_2 = D_2/D_1$ – сталі коефіцієнти; D_i (1,2,3) визначаються через величини, які характеризують пружні властивості матеріалу у випадку плоского напруженого стану за формулами

$$D_1 = \frac{E_1 h^3}{12(1-\nu_1 \nu_2)}, \quad D_2 = \frac{E_2 h^3}{12(1-\nu_1 \nu_2)}, \quad D_3 = D_1 \nu_2 + 2D_k = D_2 \nu_1 + 2D_k, \quad D_k = \frac{G h^3}{12}.$$

Тут через E_i , ν_i ($i=1,2$) позначено модулі Юнга, коефіцієнти Пуассона у напрямі осей x , y ; G – модуль зсуву; h – товщина пластини. Для головних напрямів у площині пластини справджується залежність $E_1 \nu_2 = E_2 \nu_1$. Для ізотропних пластин

$$D_1 = D_2 = D = \frac{E h^3}{12(1-\nu^2)} \text{ – циліндрична жорсткість.}$$

На контурі Γ прямокутної області $S = \{0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq b\}$ задано такі умови, які відповідають випадку шарнірно опертої пластини:

$$w = 0, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \text{ при } x = 0, \quad x = a, \quad (2)$$

$$w = 0, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0 \quad \text{при } y = 0, \quad y = b, \quad (3)$$

де $w(x, y)$ – прогин серединної площини пластини.

Отже, диференціальне рівняння в частинних похідних четвертого порядку (1) разом з умовами (2), (3) слугує математичною моделлю задачі про тримальну здатність шарнірно опертої прямокутної пластини з ортотропного матеріалу за дії поперечного навантаження $p(x, y)$ з залученням класичної теорії пластин Кірхгофа–Лява [1]. Значимо, що рівняння (1) використовують також при дослідженні згину пластини з неоднорідного матеріалу. У випадку $\beta_1 = \beta_2 = 1$ отримуємо відому у літературі класичну бігармонічну проблему для прямокутника [10, 13]. У праці [7] подано історичний екскурс стосовно різних методів розв’язання бігармонічної проблеми. На підставі запропонованої розрахункової схеми розв’язок задачі згину ізотропної пластини ми отримуємо як частковий випадок. Існування та єдиність розв’язку бігармонічної задачі (1) у випадку граничних умов $u = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial n} = 0$ на межі

Γ (жорстке закріплення контуру), що будується з використанням методу Канторовича, досліджено в [16]. У [6, 13] наведено розв’язок крайової задачі (1)–(3) у подвійних тригонометричних рядах. Зазвичай його використовують як еталонний для порівняння точності результатів, які отримують іншими методами.

Перейдемо до викладення комбінованого алгоритму, який поєднує ідеї методу Канторовича і матрицантного числово-аналітичного методу, для побудови наближеного розв’язку крайової задачі (1)–(3). На першому кроці двокрокового комбінованого алгоритму розв’язування сформульованої двовимірної крайової задачі виконуємо редукцію її до одновимірної задачі. Згідно з методом Канторовича наближений розв’язок задачі (1)–(3) шукаємо у вигляді [6]

$$w_n(x, y) = \sum_{k=1}^n \psi_k(x) \varphi_k(y). \quad (4)$$

У формулі (4) функції $\psi_k(x)$ підлягають визначенню, а $\varphi_k(y)$ – попередньо вибрані координатні функції, які задовольняють такі умови:

$$\varphi_k(y) = 0, \quad \varphi_k''(y) = 0 \quad \text{при } y = 0, \quad y = b \quad (k = 1, 2, \dots). \quad (5)$$

Домагаючись виконання граничних умов (2) з урахуванням подання шуканого розв’язку у вигляді (4), отримуємо відповідні умови на функції $\psi_k(x)$.

Система методу Канторовича для визначення невідомих функціональних коефіцієнтів $\psi_k(x)$ має вигляд

$$\int_0^b (Lw_n - f) \varphi_k(y) dy = 0 \quad (k = 1, 2, \dots, n); \quad (6)$$

$$\psi_k(x) = 0, \quad \psi_k''(x) = 0 \quad \text{при } x = 0, \quad x = a \quad (k = 1, 2, \dots, n). \quad (7)$$

Наприклад, при $n = 1$ для визначення функції $\psi_1(x)$ на підставі (6) і (4) отримуємо звичайне диференціальне рівняння четвертого порядку вигляду

$$\alpha_1 \frac{d^4 \psi_1}{dx^4} + \alpha_2 \frac{d^2 \psi_1}{dx^2} + \alpha_3 \psi_1(x) = q, \quad (8)$$

де

$$\alpha_1 = \int_0^b \varphi_1^2(y) dy, \quad \alpha_2 = 2\beta_1 \int_0^b \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial y^2} \varphi_1(y) dy, \quad \alpha_3 = \beta_2 \int_0^b \frac{\partial^4 \varphi_1}{\partial y^4} \varphi_1(y) dy,$$

$$q = \int_0^b f(x, y) \varphi_1(y) dy.$$

Розв'язок отриманої внаслідок редукції одновимірної крайової задачі шукаємо розробленим матрицантним числово-аналітичним методом [15]. За його схемою рівняння (8) заміняємо еквівалентною системою чотирьох диференціальних рівнянь першого порядку, яку записуємо у нормальній формі Коші. Далі з використанням процедури зведення неоднорідної системи диференціальних рівнянь до однорідної одержуємо такий аналог задачі (8), (7):

$$\frac{dZ}{dx} = A(x)Z, \quad (9)$$

$$z_1 = 0, \quad z_3 = 0, \quad z_5 = 1 \quad \text{при } x = 0;$$

$$z_1 = 0, \quad z_3 = 0 \quad \text{при } x = a, \quad (10)$$

де $Z = (z_1, \dots, z_5)^T = (\psi_1, \psi_1', \psi_1'', \psi_1''', z_5)^T$; z_5 – допоміжна змінна (у разі зведення неоднорідної системи до однорідної), $A(x) = [a_{ij}(x)]_{i,j=1}^5$.

Наприклад, якщо в апроксимації розв'язку (5) обмежитись одним членом ряду, то отримаємо (9), де матриця $A(x) = [a_{ij}(x)]_{i,j=1}^5$ має такі ненульові елементи:

$$a_{12} = 1, \quad a_{23} = 1, \quad a_{34} = 1, \quad a_{41} = -\alpha_3/\alpha_1, \quad a_{43} = -\alpha_2/\alpha_1, \quad a_{45} = q/\alpha_1.$$

Інші елементи, крім наведених, дорівнюють нулю.

За цим методом розв'язок задачі (9), (10) подаємо у вигляді

$$z_i(x) = \sum_{j=1}^5 c_j g_{ij}(x) \quad (i=1,2,\dots,5), \quad (11)$$

де $g_{ij}(x)$ – елементи матрицанту, обчислення якого виконаємо з потрібною точністю за спеціальною процедурою [15].

З умов (10) при $x = 0$, врахувавши властивість матрицанту [3], одержуємо

$$c_1 = 0, \quad c_3 = 0, \quad c_5 = 1. \quad (12)$$

Інші невідомі сталі в (11) визначаємо з системи лінійних алгебричних рівнянь, яка випливає з умов (10) при $x = a$. На підставі (11) з урахуванням (12) маємо

$$\psi_1(x) = z_1(x) = c_2 g_{12}(x) + c_4 g_{14}(x) + g_{15}(x), \quad (13)$$

де

$$c_2 = [g_{14}(a)g_{35}(a) - g_{15}(a)g_{34}(a)]/\delta, \quad c_4 = [g_{15}(a)g_{32}(a) - g_{12}(a)g_{35}(a)]/\delta,$$

$$\delta = g_{12}(a)g_{34}(a) - g_{14}(a)g_{32}(a).$$

Остаточно наближене значення прогину пластини в довільній її точці (x, y) обчислюємо за формулою

$$w_n(x, y) = z_1(x) \varphi_1(y). \quad (14)$$

Далі предметом досліджень буде питання щодо ефективності застосування наведеного вище алгоритму до розв'язування задач, які описує математична модель

(1)–(3), та оцінювання похибки у разі апроксимації розв'язку диференціального рівняння в частинних похідних (1) за методом Канторовича. Наведемо результат, який показує швидкість прямування похибки до нуля.

3. ТЕОРЕТИЧНЕ ОБҐРУНТУВАННЯ АЛГОРИТМУ

З огляду на коректне формулювання крайової задачі для диференціального рівняння (1) за область визначення $\Omega(L)$ оператора L приймаємо множину чотири рази неперервно диференційованих функцій в області S . Дослідимо властивості оператора L . Спочатку покажемо, що за умов задачі (1)–(3) оператор L буде додатно визначеним у гільбертовому просторі $H = L_2(S)$.

Доведемо, що оператор L є симетричним. Для цього розглянемо скалярний добуток (Lw, v) . Справді, для довільних $w, v \in S(L)$

$$(Lw, v) = \iint_S \left\{ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \beta_1 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + \beta_2 \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right\} dx dy = (w, Lv). \quad (15)$$

Рівність (15) означає, що оператор L симетричний. Доведемо ще, що для довільного $w \in \Omega(L)$ виконується така нерівність:

$$(Lw, w) \geq \gamma_0 \|w\|^2, \quad (16)$$

де $\gamma_0 = \text{const} > 0$, $\|w\|^2 = \iint_S w^2(x, y) dx dy$.

Із співвідношення (15) для довільного $w \in \Omega(L)$ одержуємо

$$\begin{aligned} (Lw, w) &= \iint_S \left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 + \beta_1 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \beta_2 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 \right] dx dy = \\ &= \iint_S \left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 + \beta_1 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 + \beta_2 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 \right] dx dy. \end{aligned} \quad (17)$$

Застосувавши нерівність Пуанкаре [8] до похідної $\frac{\partial w}{\partial x}$, отримаємо

$$\iint_S \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 dx dy \leq M \iint_S \left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] dx dy + N \left(\iint_S \frac{\partial w}{\partial x} dx dy \right)^2, \quad (18)$$

де $M > 0$, $N > 0$ – константи нерівності Пуанкаре.

За формулою Остроградського одержуємо

$$\iint_S \frac{\partial w}{\partial x} dx dy = \int_{\Gamma} w \cos(n, x) ds.$$

Тут ds – диференціал дуги контура області S ; n – зовнішня нормаль до межі Γ .

На підставі цього нерівність (18), враховуючи (2), набуває такого вигляду:

$$\iint_S \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 dx dy \leq M \iint_S \left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] dx dy.$$

Аналогічно

$$\iint_S \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 dx dy \leq M \iint_S \left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 \right] dx dy .$$

Додавши дві останні нерівності, отримаємо

$$\iint_S \left[\left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right] dx dy \leq M \iint_S \left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 \right] dx dy . \quad (19)$$

Тоді для співвідношення (17) можемо записати

$$\begin{aligned} (Lw, w) &= \iint_S \left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 + \beta_1 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 + \beta_2 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 \right] dx dy \geq \\ &\geq \min\{1, \beta_1/2, \beta_2\} \iint_S \left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 \right] dx dy , \end{aligned}$$

або

$$(Lw, w) \geq \mu \iint_S \left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 \right] dx dy , \quad (20)$$

де $\mu = \min\{1, \beta_1/2, \beta_2\}$.

Аналогічно для довільного $w \in \Omega(L)$ одержимо

$$(Lw, w) \leq \eta \iint_S \left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 \right] dx dy , \quad (21)$$

де $\eta = \max\{1, \beta_1/2, \beta_2\}$.

Далі, використовуючи нерівності (19) та (20), отримаємо

$$(Lw, w) \geq \frac{\mu}{M} \iint_S \left[\left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right] dx dy . \quad (22)$$

Тоді з нерівності (22), враховуючи нерівність Фрідрікса [8] для функції w , яка задовольняє умову (2),

$$\iint_S \left[\left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right] dx dy \geq \kappa \iint_S w^2 dx dy = \kappa \|w\|^2 ,$$

де $\kappa > 0$ – константа нерівності Фрідрікса, отримуємо таку оцінку:

$$(Lw, w) \geq \frac{\mu}{M} \iint_S \left[\left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right] dx dy \geq \frac{\mu \kappa}{M} \|w\|^2 .$$

Отже, для довільного $w \in \Omega(L)$ виконується нерівність

$$(Lw, w) \geq \gamma_0^2 \|w\|^2 , \text{ де } \gamma_0^2 = \mu \kappa / M .$$

Для зручності подальшого викладення уведемо в розгляд такий допоміжний оператор B з областю визначення $S(B) = S(A)$:

$$Bw \equiv \Delta^2 w = \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4}.$$

Значимо, що оператор B додатно визначений в просторі $H = L_2(S)$, тобто для довільного $w \in \Omega(L)$ виконується рівність $(Bw, v) = (w, Bv)$. У цьому разі з урахуванням (19), (22) маємо

$$\begin{aligned} (Bw, w) &= \iint_S \left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 \right] dx dy \geq \\ &\geq \frac{1}{M} \iint_S \left[\left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right] dx dy \geq \frac{\kappa}{M} \|w\|^2 \end{aligned}$$

або

$$(Bw, w) \geq \gamma^2 \|w\|^2, \text{ де } \gamma^2 = \frac{\kappa}{M} \text{ – стала, визначена нерівностями Фрідрікса.} \quad (23)$$

Позначимо через H_B енергетичний простір оператора B . Енергетичний добуток і енергетичну норму оператора B , відповідно, визначаємо так:

$$[w, w]_B = \iint_S \left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 \right] dx dy,$$

$$[w, v]_B = \iint_S \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right] dx dy,$$

$|w|_B^2 = [w, w]_B$, де $w \in H_B$.

Граничним переходом із нерівності (23) отримуємо, що для довільного $w \in H_B$ справджується нерівність

$$\|w\| \leq \frac{1}{\gamma} |w|_B. \quad (24)$$

Зазначимо, що енергетичні простори операторів L і B складаються з тих самих елементів. У цьому разі з урахуванням співвідношень (17), (20), (21), (24) для довільного елемента $w \in H_B = H_L$ можемо записати

$$\mu |w|_B^2 \leq |w|_L^2 \leq \eta |w|_B^2, \quad (25)$$

де $|w|_L^2 = (Lw, w) = [w, w]_L$, $\mu = \min(1, \beta_1/2, \beta_2)$, $\eta = \max(1, \beta_1/2, \beta_2)$.

Нерівності (25) забезпечують існування та єдиність узагальненого розв'язку $w(x, y) \in H_B$ для довільної функції $f(x, y) \in H$ як вихідної задачі (1)–(3), так і наближеного розв'язку $w_n(x, y) \in H_B = H_L$ відповідної її системи методу Канторовича. У разі застосування методу Канторовича для пошуку розв'язку

лінійної двовимірної крайової задачі (1)–(3) правильна така оцінка швидкості збіжності наближеного розв'язку до точного:

$$\|w - w_n\| \leq \frac{\eta}{\gamma\mu} |w - v_n|_B. \quad (26)$$

Елемент $v_n = \sum_{k=1}^n \Psi_k(x) \Phi_k(y) \in H_B$ в оцінці (26) є таким, що реалізує мінімум функціонала $|w - v_n|_B$.

Аналогічно, як у [8], доводиться, що для функції $w(x, y)$, яка задовольняє умови (1), (2), а функції $\frac{\partial^4 w}{\partial y^4}$, $\frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2}$ інтегровані з квадратом в S , можна побудувати такі функції $\bar{w}_n(x, y)$, $\tilde{w}_n(x, y)$ вигляду:

$$\bar{w}_n(x, y) = \sum_{k=1}^n \bar{\Psi}_k(x) \sin \frac{k\pi y}{b}, \quad \tilde{w}_n(x, y) = \sum_{k=1}^n \tilde{\Psi}_k(x) y^{k+2} (y-b)^3,$$

де функції $\bar{\Psi}_k(x)$, $\tilde{\Psi}_k(x)$, $\bar{\Psi}_k''(x)$, $\tilde{\Psi}_k''(x)$ дорівнюють нулю при $x = 0$, $x = a$,

що виконуються оцінки $|w - \bar{w}_n|_B = O\left(\frac{1}{n^2}\right)$, $|w - \tilde{w}_n|_B = O\left(\frac{1}{n^2}\right)$.

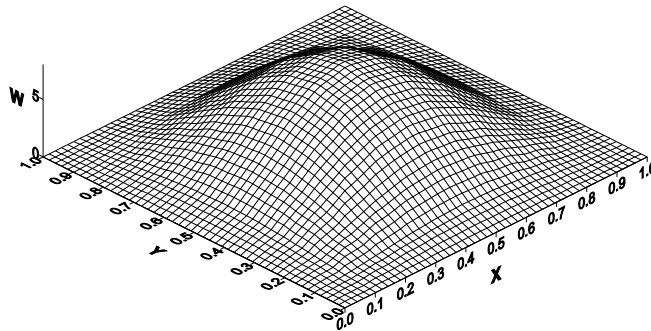
Звідси отримуємо, що у випадку вибору системи координатних функцій $\Phi_k(y) = \sin \frac{k\pi y}{b}$ або $\Phi_k(y) = y^{k+2} (y-b)^3$ маємо таку оцінку збіжності наближеного розв'язку до точного $\|w - w_n\| = O\left(\frac{1}{n^2}\right)$.

4. ЧИСЛОВІ РЕЗУЛЬТАТИ

Для розв'язування задачі (1)–(3) брали різну кількість координатних функцій для дослідження точності наближеного розв'язку (4). Обчислювальний експеримент показав добру практичну збіжність запропонованого алгоритму. Наближений розв'язок задачі (14), де $z_1(x)$ визначається за формулою (13), дає змогу дослідити вплив навантаження, пружних і геометричних характеристик пластини на її тримальну здатність. Розподіл прогину пластини з ізотропного матеріалу за дії рівномірно розподіленого сталого тиску отримуємо як частковий випадок загальної розрахункової схеми.

На рисунку зображено поле розподілу приведеної величини прогину $W = \frac{E_2 \bar{h}^3}{q_0 a} w_n$ ортотропної пластини ($\bar{a} = \bar{b} = 1$; $\bar{h} = h/a = 0.1$) за дії нерівномірного тиску $f(x, y) = q_0 \sin \frac{\pi x}{a}$ у випадку, коли два краї $x = 0$, $x = a$ шарнірно оперті, а краї $y = 0$, $y = b$ – жорстко закріплені. Змінні x , y віднесені до величини a , $\bar{b} = b/a$. Обчислення величини $W = \frac{E_2 \bar{h}^3}{q_0 a} w_n$ виконували для таких характеристик

матеріалу пластини: $E_1 = 2.5 \cdot 10^6$ МПа, $E_2 = 1 \cdot 10^5$ МПа, $G_{12} = G_{13} = 5 \cdot 10^4$ МПа, $G_{23} = 2 \cdot 10^4$ МПа, $\nu_{12} = 0.01$, $\nu_{21} = 0.25$. У цьому випадку координатну систему функцій вибирали такою: $\varphi_k = y^{k+1}(y-b)^2$, $k = 1, 2, \dots, n$. Числові результати наведено при $n = 1$.



Розподіл прогину ортотропної пластини

Для порівняння досяжної точності розв'язку, який отримуємо за комбінованим алгоритмом, наведемо деякі числові результати. У табл. 1 подано результати розв'язування задачі згину ізотропної квадратної пластини лінійно-змінної товщини

$h = h_0(1 + \alpha y)$ у випадку шарнірно опертих країв, отримані комбінованим алгоритмом (стовпець I) і числовим методом, який ґрунтується на редукції двовимірної крайової задачі до одновимірних і розв'язуванні їх методом дискретної ортогоналізації [4] (стовпець II). Внаслідок застосування до цієї задачі методу Канторовича отримали відповідну систему звичайних диференціальних рівнянь зі змінними коефіцієнтами для визначення функцій $\psi_k(x)$ у поданні наближеного розв'язку (4). Цю систему можна подати в уніфікованому вигляді (9), зручному для застосування матрицантного числово-аналітичного методу. Безрозмірну величину прогину $W = w_n E / q_0 a$ обчислювали за таких значень параметрів пластини: $\bar{a} = \bar{b} = 1$; $\nu = 0.3$; $\bar{h}_0 = 0.0625$; $\alpha = 0.5$. Порівнюючи дані табл. 1 стосовно розподілу величини прогину $W(x, y)$ при $x = 0.5$; $0 \leq y \leq 1$, бачимо практично повний збіг результатів.

Таблиця 1

Порівняння результатів обчислення прогину двома методами

y	W	
	I	II
0.0	0.0000	0.000
0.1	22.0567	22.057
0.2	40.4880	40.489
0.3	53.1913	53.192
0.4	59.3788	59.379
0.5	59.2234	59.224
0.6	53.5405	53.541
0.7	43.5107	43.511
0.8	30.4456	30.446
0.9	15.5959	15.372
1.0	0.0000	0.000

Числові результати у табл. 2 демонструють закономірності розподілу величини прогину $W(x,y)$ пластини ($\bar{a} = \bar{b} = 1$) з шарнірно опертими краями при $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$.

Таблиця 2

Прогин шарнірно опертої пластини

y x	0.0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
0.0	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
0.1	0.00	6.82	12.96	17.84	20.98	22.06	20.98	17.84	12.96	6.82	0.00
0.2	0.00	12.51	23.80	32.76	38.51	40.49	38.51	32.76	23.80	12.51	0.00
0.3	0.00	16.44	31.27	43.03	50.59	53.19	50.59	43.03	31.27	16.44	0.00
0.4	0.00	18.35	34.90	48.04	56.47	59.38	56.47	48.04	34.90	18.35	0.00
0.5	0.00	18.30	34.81	47.91	56.32	59.22	56.32	47.91	34.81	18.30	0.00
0.6	0.00	126.54	31.47	43.32	50.92	53.54	50.92	43.32	31.47	16.54	0.00
0.7	0.00	13.45	25.57	35.20	41.38	43.51	41.38	35.20	25.57	13.45	0.00
0.8	0.00	9.41	17.90	24.63	28.96	30.45	28.96	24.63	17.90	9.41	0.00
0.9	0.00	4.82	9.17	12.62	14.83	15.60	14.83	12.62	9.17	4.82	0.00
1.0	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00

Побудований розв'язок задачі (1)–(3) можемо використати для оцінювання тримальної здатності й напружено-деформованого стану перфорованих пластин, урахувавши особливості їхнього розрахунку [10]. На підставі того, що за умов однакового зовнішнього навантаження форма прогину перфорованої пластини подібна до форми згину суцільної пластини, для визначення прогину перфорованої пластини можна скористатись залежністю $w = kw_0$, де k – коефіцієнт пропорційності, який враховує зниження жорсткості пластини внаслідок її перфорації [10]; w і w_0 – переміщення перфорованої та суцільної пластин відповідно. Після визначення товщини і жорсткості еквівалентної (перфорованої)

пластини далі розрахунок виконують за отриманими формулами для суцільних пластин. Зазначимо, що такий підхід суттєво спрощує розрахунок порівняно з безпосереднім застосуванням числових методів.

5. ВИСНОВКИ

Проведені обчислювальні експерименти підтвердили ефективність застосування запропонованого комбінованого алгоритму, який поєднує метод Канторовича і матрицантний числово-аналітичний метод, для наближеного розв'язування лінійної двовимірної крайової задачі згину шарнірно опертої ортотропної пластини за дії трансверсального навантаження. Алгоритм теоретично обґрунтовано. Отримано оцінку збіжності наближеного розв'язку до точного. На підставі обчислювальних експериментів з'ясовано, що на точність апроксимації розв'язку впливає передусім вибір координатних функцій, їхня кількість (процедура Канторовича). Крім того, на точність розв'язку впливає також похибка розв'язку, побудованого матрицантним числово-аналітичним методом, одновимірних задач, які отримуємо внаслідок редукції вихідної двовимірної задачі. З'ясовано, що у випадку вибору системи координатних функцій $\varphi_k(y) = \sin \frac{k\pi y}{b}$ або $\varphi_k(y) = y^{k+2}(y-b)^3$

маємо таку оцінку збіжності наближеного розв'язку до точного: $\|w - w_n\| = O\left(\frac{1}{n^2}\right)$.

Ця оцінка добре узгоджується з обчислювальним експериментом.

На підставі запропонованої розрахункової схеми розв'язок задачі згину ізотропної пластини отримуємо як частковий випадок. Побудований розв'язок дає змогу дослідити вплив фізико-механічних і геометричних характеристик пластини, прикладеного навантаження на її тримальну здатність. Аналіз числових результатів, зокрема, засвідчив, що властивості матеріалу помітно впливають на тримальну здатність пластини; збільшення прикладеного навантаження призводить до інтенсивності прогину. Як позитивний момент зазначимо, що у разі потреби з однаковою точністю можна визначити також всі характеристики напружено-деформованого стану пластини.

ЛІТЕРАТУРА

1. Амбарцумян С. А. Теория анизотропных пластин. – М., 1967.
2. Варга Р. Функциональный анализ и теория аппроксимации в численном анализе. – М., 1974.
3. Гантмахер Ф. Р. Теория матриц. – М., 1998.
4. Григоренко Я. М., Крюков Н. Н. Решение задач теории пластин и оболочек с применением сплайн-функций (Обзор) // Прикл. механика. – 1995. – Вып. 31. – № 6. – С. 3–27.
5. Григоренко Я. М., Панкратова Н. Д. Обчислювальні методи в задачах прикладної математики: Навч. посібник. – К., 1995.
6. Канторович Л. В., Крылов В. И. Приближенные методы высшего анализа. – М., 1962.
7. Мелешко В. В. Бигармоническая задача для прямоугольника: история и современность // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2004. – 47, № 3. – С. 45–68.
8. Михлин С. Г. Вариационные методы в математической физике. – М., 1970.

9. Новотарський М. А., Нестеренко Б. Б. Штучні нейронні мережі: обчислення // Праці Інституту математики НАН України. – Київ, 2004. – Т.51.
10. Погорелов В. И. Строительная механика тонкостенных конструкций. – СПб., 2007.
11. Полубаринова А. И. Об одном методе решения уравнений в частных производных при помощи дифференцируемых тригонометрических рядов Фурье // Прикл. математика и механика. – 1986. – Т. 50. – Вып. 6. – С. 1036–1040.
12. Рикардс Р. Б. Метод конечных элементов в теории оболочек и пластин. – Рига, 1988.
13. Тимошенко С. П., Войновский-Кригер С. Пластинки и оболочки. – М., 1963.
14. Грушевський В. М., Щербина Н. М. Наближене розв'язування лінійних крайових задач мультисітковим ітераційним нейронним методом // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. прикл. матем. та інформ. – 2006. – Вип. 11. – С. 82–98.
15. Щербина Н. М. Обчислювальні аспекти чисельно-аналітичного методу розв'язування лінійних крайових задач // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. прикл. матем. та інформ. – 2000. – Вип. 2. – С. 169–180.
16. Щербина Н. М., Жук М. В. Комбінований алгоритм розв'язування лінійної двовимірної крайової задачі // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2005. – Т.48, № 4. – С. 133–139.
17. Щербина Н. М., Жук М. В. Розв'язування задачі згину анізотропних пластин із застосуванням методу Канторовича // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. прикл. матем. та інформ. – 2005. – Вип. 10. – С. 138–147.
18. Franke C., Schaback R. Solving partial differential equations by collocation using radial basis functions // Appl. Math. Comp. – 1998. – Vol. 93. – P. 73–82.
19. Hayati M., Karami B. Feedforward Neural Network for Solving Partial Differential Equations // J. of Applied Sciences. – 2007. – Vol. 7, No.19. – P. 2812–2817.
20. Lagaris I.E., Likas A., Fotiadis D.I. Artificial neural networks for solving ordinary and partial differential equations // Neural Networks, IEEE. – 1998. – Vol. 9., No.5. – P. 987–1000
21. Lee H., Kang I. Neural algorithms for solving differential equations // J. of Computational Physics. – 1990. – Vol. 91. – P.110–117.

ПРИБЛИЖЕННОЕ РЕШЕНИЕ ЛИНЕЙНОЙ ДВУХМЕРНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ О НЕСУЩЕЙ СПОСОБНОСТИ ОРТОТРОПНЫХ ПЛАСТИН

Н. Щербина^{*}, М. Жук^{**}, А. Киндыбалюк^{***}

^{*} *Институт прикладных проблем механики и математики
им. Я. С. Подстригача НАН Украины, ул. Наукова, 3-б, Львов, 79601*

^{**} *Львовский национальный университет имени Ивана Франко,
ул. Университетская, 1, Львов, 79000*

^{***} *Киевский национальный университет строительства и архитектуры,
Повитрофлотский проспект, 31, Киев, 03037*

Предложен и теоретически обоснован алгоритм приближенного решения линейной двухмерной краевой задачи о расчете несущей способности ортотропной пластины с шарнирно опертыми сторонами при действии поперечной нагрузки. Рассматриваемая задача с применением метода Канторовича редуцирована к одномерной задаче, решение которой найдено матрицантным численно-аналитическим методом. Главная особенность

комбинированного алгоритма – возможность получить приближенное решение в аналитическом виде с высокой точностью. Представлено вычислительные аспекты комбинированного алгоритма и некоторые результаты расчетов.

Ключевые слова: двухмерная краевая задача, приближенное решение, комбинированный алгоритм, ортотропная пластина, держательная способность.

APPROXIMATE SOLUTION OF THE LINEAR BOUNDARY PROBLEM ON LOAD-CARRYING CAPACITY OF ORTHOTROPIC PLATES

N. Shcherbyna^{*}, M. Zhuk^{**}, A. Kindybaljuk^{***}

^{}Pidstryhach Institute of Applied Problems of Mechanics and Mathematics National
Academy of Sciences of Ukraine, Naukova str., 3-b, 79601 Lviv, Ukraine*

*^{**}Ivan Franko National University in Lviv, Universytetska str., 1, 79000 Lviv, Ukraine*

*^{***}National university of building and architecture in Kyiv
Prosp. Povitroflotsky, 31, 03037, Kyiv, Ukraine*

An algorithm for approximate solving the 2D linear boundary value problem on load-carrying capacity of orthotropic plates with hinged ends subjected to transversal loading is proposed and also theoretical validated. The problem by applying Kantorovich method is reduced to the one-dimensional problem. Its solution is determined by using the matrix numerical-analytical method. The main feature of this combined algorithm is the possibility to obtain approximate solution in analytical form with high order accuracy. The numerical aspects of combined algorithm and some calculation results are presented.

Key words: two-dimensional boundary-value problem, approximate solution, combined algorithm, orthotropic plate, load-carrying capacity

Стаття надійшла до редколегії 15.04.2009

Прийнята до друку 11.02.2011