ВІСНИК ЛЬВІВ. УН-ТУ | *VISNYK LVIV UNIV.*
Серія прикл. матем. інформ. | *Ser. Appl. Math. Inform.*
2011. Вип. 17. С. 94–102 | *2011. Is. 17. P. 94–102*

УДК 517.9:519.6

ПРО ВАРІАЦІЙНЕ ФОРМУЛЮВАННЯ ЗАДАЧІ ДІРІХЛЕ ДЛЯ ЕЛІПТИЧНОГО РІВНЯННЯ ДРУГОГО ПОРЯДКУ В ОБЛАСТІ З ТОНКИМ ВКЛЮЧЕННЯМ

Ю. Сибіль

Львівський національний університет імені Івана Франка,
вул. Університетська, 1, Львів, 79000, e-mail: kafprog@ franko.lviv.ua

Розглянуто задачу Діріхле для еліптичного рівняння другого порядку в обмеженому тілі з тонким включенням, яке моделюється розімкнутою двосторонньою поверхнею. Граничні умови задані на цій розімкнутій поверхні та на поверхні, що обмежує тіло. Проведено дослідження деяких функціональних просторів в області з включенням та операторів сліду на розімкнутій ліпшицевій поверхні. Доведено еквівалентність задачі в диференціальному формулюванні та відповідної варіаційної задачі. Розглянуто задачу з неоднорідними граничними умовами. Доведено існування та єдиність розв’язків у відповідних функціональних просторах.

Ключові слова: задача Діріхле, еліптичний оператор, варіаційна задача, розімкнута поверхня.

1. ВСТУП

Одним із варіантів моделювання просторових задач теорії пружності, термопружності, теорії руйнування та тріщин у тілах з тонкими включеннями є подання цього включення у вигляді двосторонньої розімкнутої поверхні [1,3,5]. Цей підхід дає змогу розглядати зазначені проблеми як окремий клас у певному сенсі некласичних задач математичної фізики. У цьому разі виникає потреба в додатковому аналізі як умов розв’язності сформульованих задач, так і аналізу класів розв’язків в околах точок нерегулярності області. Ці питання пов’язані з введенням відповідних функціональних просторів і граничних операторів, які б коректно відображали фізику явища. Зокрема, в [7,9] були розглянуті деякі підходи до варіаційного формулювання граничних задач для еліптичних рівнянь з допомогою введення певних функціональних просторів у нерегулярній області, що містить розімкнутий контур чи поверхню.

2. ФУНКЦІОНАЛЬНІ ПРОСТОРИ ТА ОПЕРАТОРИ СЛІДУ

Нехай $\Omega_+ \subset R^3$ – деяка обмежена однозв’язна область з ліпшицевою межею Σ [8]. $\overline{\Omega}_+ = \Omega_+ \cup \Sigma$. S – розімкнута двостороння ліпшицева поверхня обмежена замкнутою кривою Γ, $\overline{S} = S \cup \Gamma$. Вважаємо, що $\overline{S} \subset \Omega_+$. Позначимо $\Omega = \Omega_+ \setminus \overline{S}$. Точки простору позначатимемо $x = (x_1, x_2, x_3)$ і т.д. Під розімкнутою ліпшицевою поверхнею S з межею Γ будемо розуміти поверхню, яка є частиною деякої замкнутої однозв’язної ліпшицевої поверхні Σ_0, тобто $\Sigma_0 = \overline{S} \cup S_0$, причому вважаємо, що просторова крива Γ є кусково-гладкою та $\Sigma_0 \subset \Omega_+$. Позначимо Ω_1 – область, обмежену поверхнею Σ_0. $\overline{\Omega}_1 = \Omega_1 \cup \Sigma_0$, $\Omega_2 = \Omega_+ \setminus \overline{\Omega}_1$.

Оскільки Σ та S – ліпшицеві поверхні, майже всюди на них можна визначити нормаль $\vec{n}_x$, причому $\vec{n}_x$, $x \in \Sigma$, – зовнішня нормаль до Σ, а поверхню S залежно від напряму $\vec{n}_x$, $x \in S$, будемо розглядати як двосторонню зі сторонами S_+ та S_-.

В області Ω_+ розглянемо еліптичний оператор

$$Lu = -\sum_{i,j=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_i}(a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_j}) + a_0 u$$

та пов'язану з ним білінійну форму

$$a(u,v) = \int_{\Omega_+} \left\{ \sum_{i,j=1}^{3} a_{ij} \frac{\partial v}{\partial x_i}\frac{\partial u}{\partial x_j} + a_0 uv \right\} dx .$$

Тут $a_{ij}, a_0 \in C^1(\overline{\Omega}_+)$ – задані дійсні функції, які задовольняють такі умови: існують константи $\alpha_1 > 0, \alpha_2 > 0$, що для всіх $t_i \in R, i = \overline{1,3}$, та $x \in \Omega_+$ виконуються нерівності

$$\sum_{i,j=1}^{3} a_{ij}(x) t_i t_j \ge \alpha_1 \sum_{i=1}^{3} t_i^2 \qquad \text{та} \qquad a_0(x) \ge \alpha_2 . \tag{1}$$

Випадок симетричної білінійної форми $a(u,v)$ було розглянуто в [10].

Введемо гільбертів простір $H^1(\Omega_+)$ дійсних функцій u з нормою та скалярним добутком

$$\|u\|^2_{H^1(\Omega_+)} = \int_{\Omega_+} \{|\nabla u|^2 + u^2\} dx, \qquad (u,v)_{H^1(\Omega)} = (u,v)_{L_2(\Omega)} + (\nabla u, \nabla v)_{L_2(\Omega)} ,$$

а також оператор сліду $\gamma^+_{0,\Sigma} : H^1(\Omega_+) \to H^{1/2}(\Sigma)$, який є неперервним і сюр'єктивним [2,6].

Позначимо $C_0^\infty(\Omega)$ простір нескінченно диференційовних в Ω функцій з компактним носієм. Очевидно, що $C_0^\infty(\Omega) \subset C_0^\infty(\Omega_+)$. Крім того, множина $C_0^\infty(\Omega)$ щільна в $L_2(\Omega) = L_2(\Omega_+)$. Справді, нехай $u \in L_2(\Omega)$. Треба показати, що існує послідовність $\{\varphi_k\} \subset C_0^\infty(\Omega)$: $\|\varphi_k - u\|_{L_2(\Omega)} \to 0$, $k \to \infty$. Позначимо $r_{\Omega_i} u(x) = u_i(x)$ – звуження функції $u(x)$ на область Ω_i, $i = 1,2$. Оскільки $C_0^\infty(\Omega_i)$ щільна в $L_2(\Omega_i)$, то існує послідовність $\{\varphi_k^{(i)}\} \subset C_0^\infty(\Omega_i)$ така, що $\left\|\varphi_k^{(i)} - u_i\right\|_{L_2(\Omega_i)} \to 0$, $k \to \infty$. Відповідно послідовність $\{\varphi_k\}$, де $r_{\Omega_i}\varphi(x) = \varphi_i(x)$, $i = 1,2$, належить $C_0^\infty(\Omega)$ і для неї виконується $\|\varphi_k - u\|_{L_2(\Omega)} \to 0$, $k \to \infty$.

Розглянемо гільбертів простір $H^1(\Omega)$ дійсних функцій u з нормою [10]

$$\|u\|^2_{H^1(\Omega)} = \int_{\Omega} \{|\nabla u|^2 + u^2\} dx, \tag{2}$$

де похідні $\frac{\partial u}{\partial x_i}\in L_2(\Omega)$ визначені так:

$$(\frac{\partial u}{\partial x_i},\varphi)_{L_2(\Omega)}=-\int_\Omega u\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}dx$$

для довільної функції $\varphi\in C_0^\infty(\Omega)$.

Розглянемо деякі оператори слідів в області Ω. Нехай $\gamma_{0,\Sigma_0}^+ : H^1(\Omega_1)\to H^{1/2}(\Sigma_0)$, $\gamma_{0,\Sigma_0}^- : H^1(\Omega_2)\to H^{1/2}(\Sigma_0)$ – неперервні та сюр'єктивні. Позначимо $\gamma_{0,S}^\pm$ звуження операторів $\gamma_{0,\Sigma_0}^\pm$ на S, тобто $\gamma_{0,S}^\pm : H^1(\Omega)\to H^{1/2}(S)$. Аналогічно $\gamma_{0,S_0}^\pm$ – звуження на S_0. Надалі будемо використовувати такі оператори $\gamma_0=(\gamma_{0,\Sigma}^+,\gamma_{0,S,}^-[\gamma_{0,S}])$, $[\gamma_{0,S}]=\gamma_{0,S}^+-\gamma_{0,S}^-$, $[\gamma_{0,S_0}]=\gamma_{0,S_0}^+-\gamma_{0,S_0}^-$.

Позначимо $H_0^1(\Omega)$ – замикання $C_0^\infty(\Omega)$ по нормі (1), $H^{-1}(\Omega)=(H_0^1(\Omega))'$ – простір двоїстий до $H_0^1(\Omega)$. Маємо щільне вкладення $H_0^1(\Omega)\subset L_2(\Omega)\subset H^{-1}(\Omega)$. Очевидно, що $H^1(\Omega_+)\subset H^1(\Omega)$.

Лема 1. Якщо $u\in H^1(\Omega_+)$, то $\gamma_{0,S}^+u=\gamma_{0,S}^-u$.

Доведення. За умовою $\overline{S}\subset\Omega_+$. Розглянемо обмежену область $D\subset\Omega_+$ таку, що $D=D_+\cup D_-\cup S$, $\overline{D}=D\cup S_D^+\cup S_D^-\cup\Gamma$. Область D_+ обмежена поверхнею $S_D^+\cup\overline{S}$, аналогічно область D_- – поверхнею $S_D^-\cup\overline{S}$. Вважаємо, що $\overline{D}\subset\Omega_+$.

Нехай $\varphi\in C^1(\overline{S})$ – довільна функція, яка обертається в нуль на Γ. Через $\widetilde{\varphi}\in C^1(\overline{D})$ позначимо деяку функцію, яка дорівнює φ на S та обертається в нуль на межі D.

Позначимо $u_\pm=r_{D_\pm}u$. Оскільки $u_\pm\in H^1(\Omega_\pm)$, то

$$\int_{D_\pm}\frac{\partial u_\pm}{\partial x_i}\widetilde{\varphi}dx=-\int_{D_\pm}u_\pm\frac{\partial\widetilde{\varphi}}{\partial x_i}dx\pm\int_S\gamma_{0,S}^\pm u_\pm\varphi\cos(\vec{n}_x,\vec{x}_i)ds_x \tag{3}$$

З іншого боку, $r_Du\in H^1(D)$, тому

$$\int_D\frac{\partial u}{\partial x_i}\widetilde{\varphi}dx=-\int_D u\frac{\partial\widetilde{\varphi}}{\partial x_i}dx. \tag{4}$$

Додаючи ліву та праву частини рівності (3) та порівнюючи з (4), отримаємо

$$\int_S[\gamma_{0,S}]u\varphi\cos(\vec{n}_x,\vec{x}_i)ds_x=0.$$

На підставі щільності $C^1(\overline{S})$ в $L_2(S)$ з отриманої рівності випливає, що $\gamma_{0,S}^+u=\gamma_{0,S}^-u$. □

Наслідок 2. Якщо $u\in H^1(\Omega)$, то $[\gamma_{0,S_0}]u=0$.

З наслідку 2 отримаємо, що оператор сліду $[\gamma_{0,S_0}]: H^1(\Omega) \to H_{00}^{1/2}(S)$, де $H_{00}^{1/2}(S) = \{g \in H^{1/2}(S) : p_0 g \in H^{1/2}(\Sigma_0)\}$. Тут $p_0 g$ – продовження нулем g на S_0.

Норма в $H_{00}^{1/2}(S)$ задається так : $\|g\|_{H_{00}^{1/2}(S)} = \|p_0 g\|_{H^{1/2}(\Sigma_0)}$.

Лема 3. Якщо $u \in H^1(\Omega)$ та $\gamma_{0,S}^{+} u = \gamma_{0,S}^{-} u$, то $u \in H^1(\Omega_+)$.

Доведення. Нехай $u \in H^1(\Omega)$. З леми 1 та наслідку 2 випливає, що $\gamma_{0,\Sigma_0}^{+} u = \gamma_{0,\Sigma_0}^{-} u$. Крім того, $u_i = r_{\Omega_i} u \in H^1(\Omega_i)$, а отже, $\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \in L_2(\Omega_i)$, $i = 1,2$, $j = \overline{1,3}$.
Для довільної $\varphi \in C_0^{\infty}(\Omega_+)$ одержимо

$$\int_{\Omega_1} \frac{\partial u_1}{\partial x_i} \varphi dx = -\int_{\Omega_1} u_1 \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} dx + \int_{\Sigma_0} \gamma_{0,\Sigma_0}^{+} u_1 \varphi \cos(\vec{n}_x, \vec{x}_i) ds_x, \tag{5}$$

$$\int_{\Omega_2} \frac{\partial u_2}{\partial x_i} \varphi dx = -\int_{\Omega_2} u_2 \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} dx - \int_{\Sigma_0} \gamma_{0,\Sigma_0}^{-} u_2 \varphi \cos(\vec{n}_x, \vec{x}_i) ds_x. \tag{6}$$

З рівностей (5) та (6) отримаємо

$$\int_{\Omega_+} \frac{\partial u}{\partial x_i} \varphi dx = \int_{\Omega_1} \frac{\partial u_1}{\partial x_i} \varphi dx + \int_{\Omega_2} \frac{\partial u_2}{\partial x_i} \varphi dx = -\int_{\Omega_+} u \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} dx.$$

Крім того, $\frac{\partial u}{\partial x_i} \in L_2(\Omega_+)$, оскільки $r_{\Omega_i} \frac{\partial u}{\partial x_j} \in L_2(\Omega_i)$, $i = 1,2$.□

Лема 4. Нехай $u \in L_2(\Omega_+)$, причому $u_i = r_{\Omega_i} u \in H^1(\Omega_i)$, $i = 1,2$, та $[\gamma_{0,S_0}] u = 0$. Тоді $u \in H^1(\Omega)$.

Доведення. Оскільки $u_i = r_{\Omega_i} u \in H^1(\Omega_i)$, то $\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \in L_2(\Omega_i)$. Розглянемо функцію $w \in L_2(\Omega_+)$: $r_{\Omega_i} w = \frac{\partial u_i}{\partial x_j}$. Покажемо, що $w = \frac{\partial u}{\partial x_j}$. Для довільної $\varphi \in C_0^{\infty}(\Omega)$ отримаємо

$$\int_{\Omega} w \varphi dx = \int_{\Omega_1} \frac{\partial u_1}{\partial x_j} \varphi dx + \int_{\Omega_2} \frac{\partial u_2}{\partial x_j} \varphi dx = -\int_{\Omega_1} u_1 \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} dx + \int_{\Sigma_0} \gamma_{0,S_0}^{+} u_1 \varphi \cos(\vec{n}_x, \vec{x}_i) ds_x -$$
$$- \int_{\Omega_2} u_2 \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} dx - \int_{\Sigma_0} \gamma_{0,S_0}^{-} u_2 \varphi \cos(\vec{n}_x, \vec{x}_i) ds_x = -\int_{\Omega} u \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} dx.$$

Отже, $w = \frac{\partial u}{\partial x_j}$. Оскільки $r_{\Omega_i} \frac{\partial u}{\partial x_j} \in L_2(\Omega_i)$, $i = 1,2$, то $u \in H^1(\Omega)$.□

Лема 5. Нехай $u \in H^1(\Omega)$. Норму (2) можна задати так:

$$\|u\|_{H^1(\Omega)}^2 = \|u_1\|_{H^1(\Omega_1)}^2 + \|u_2\|_{H^1(\Omega_2)}^2,$$

де $u_i = r_{\Omega_i} u$, $i = 1,2$.

Доведення. З леми 4 випливає, що $r_{\Omega_i} \dfrac{\partial u}{\partial x_j} = \dfrac{\partial u_i}{\partial x_j} \in L_2(\Omega_i)$. Отже,

$$\int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx = \int_{\Omega_1} |\nabla u_1|^2 dx + \int_{\Omega_2} |\nabla u_2|^2 dx,$$

що й доводить лему. □

Лема 6. Оператор $\gamma_0 : H^1(\Omega) \to H^{1/2}(\Sigma) \times H^{1/2}(S) \times H_{00}^{1/2}(S)$ неперервний і сюр'єктивний.

Доведення. Нехай задано $g \in H^{1/2}(\Sigma)$, $g_- \in H^{1/2}(S)$, $g_0 \in H_{00}^{1/2}(S)$. Позначимо $\tilde{g} \in H^{1/2}(\Sigma_0)$ – довільне продовження g_- на S_0, $\tilde{g}_0 \in H^{1/2}(\Sigma_0)$ – продовження g_0 нулем на S_0, $g_1 = \tilde{g} + \tilde{g}_0 \in H^{1/2}(\Sigma_0)$. Оператор $\gamma_{0,\Sigma_0}^{+} : H^1(\Omega_1) \to H^{1/2}(\Sigma_0)$ є неперервним і сюр'єктивним. Отже, існує функція $u_1 \in H^1(\Omega_1)$ така, що $\gamma_{0,\Sigma_0}^{+} u_1 = g_1$ і $\|g_1\|_{H^{1/2}(\Sigma_0)} \le c_1 \|u_1\|_{H^1(\Omega_1)}$, де $c_1 > 0$ – деяка константа. Аналогічно для $\tilde{g}$ та g існує $u_2 \in H^1(\Omega_2)$ така, що $\gamma_{0,\Sigma_0}^{-} u_2 = \tilde{g}$, $\gamma_{0,\Sigma}^{+} u_2 = g$ і виконується нерівність

$$\|\tilde{g}\|_{H^{1/2}(\Sigma_0)} + \|g\|_{H^{1/2}(\Sigma)} \le c_2 \|u_2\|_{H^1(\Omega_2)}, \tag{7}$$

де $c_2 > 0$ – деяка константа.

Розглянемо функцію $u \in L_2(\Omega)$: $r_{\Omega_i} u = u_i \in H^1(\Omega_i)$, $i = 1,2$. Очевидно, що $[\gamma_{0,S_0}]u = \gamma_{0,S_0}^{+} u_1 - \gamma_{0,S_0}^{-} u_2 = r_{S_0}\tilde{g} - r_{S_0}\tilde{g} = 0$. Тоді з леми 4 випливає, що $u \in H^1(\Omega)$. Сюр'єктивність доведено.

Для доведення неперервності розглянемо таку нерівність:

$$\begin{aligned} \left\|\gamma_{0,\Sigma_0}^{+} u_1 - \gamma_{0,\Sigma_0}^{-} u_2\right\|_{H^{1/2}(\Sigma_0)} &\le \left\|\gamma_{0,\Sigma_0}^{+} u_1\right\|_{H^{1/2}(\Sigma_0)} + \left\|\gamma_{0,\Sigma_0}^{-} u_2\right\|_{H^{1/2}(\Sigma_0)} \le \\ &\le c_3 \{\|u_1\|_{H^1(\Omega_1)} + \|u_2\|_{H^1(\Omega_2)}\} \le c_4 \|u\|_{H^1(\Omega)}, \end{aligned}$$

де $c_3, c_4 > 0$ – деякі константи.

З іншого боку,

$$\left\|\gamma_{0,\Sigma_0}^{+} u_1 - \gamma_{0,\Sigma_0}^{-} u_2\right\|_{H^{1/2}(\Sigma_0)} = \|g_1 - \tilde{g}\|_{H^{1/2}(\Sigma_0)} = \|\tilde{g}_0\|_{H^{1/2}(\Sigma_0)} = \|g_0\|_{H_{00}^{1/2}(S)} .$$

Отже, $\|g_0\|_{H_{00}^{1/2}(S)} \le c_4 \|u\|_{H^1(\Omega)}$. Використовуючи нерівність (7), отримаємо

$$\|\tilde{g}\|_{H^{1/2}(\Sigma_0)} + \|g\|_{H^{1/2}(\Sigma)} + \|g_0\|_{H_{00}^{1/2}(S)} \le c_2 \|u_2\|_{H^1(\Omega_2)} + c_4 \|u\|_{H^1(\Omega)} \le c \|u\|_{H^1(\Omega)} .$$

Оскільки, $\|g_-\|_{H^{1/2}(S)} = \inf\limits_{pg_-} \|pg_-\|_{H^{1/2}(\Sigma_0)}$, де pg_- – довільне продовження $g_- \in H^{1/2}(S)$ на S , то $\|g_-\|_{H^{1/2}(S)} \le \|\tilde{g}\|_{H^{1/2}(\Sigma_0)}$. Неперервність γ_0 доведено.□

3. ВАРІАЦІЙНЕ ФОРМУЛЮВАННЯ ЗАДАЧІ ДІРІХЛЕ

Розглянемо задачу Діріхле в області Ω (задача D_0) :

знайти функцію $u \in H^1(\Omega)$ таку, що

$$Lu = f\,, \qquad \gamma^{\pm}_{0,S}u = 0\,, \qquad \gamma^{+}_{0,\Sigma}u = 0\,, \qquad f \in H^{-1}(\Omega)\,.$$

З цією задачею пов'язана варіаційна задача (задача VD_0) :

знайти функцію $u \in H^1_0(\Omega)$, щоб для довільної функції $v \in H^1_0(\Omega)$ виконувалася рівність $a(u,v) = l(v)$.

Тут $l(v): H^1_0(\Omega) \to R$ – функціонал, який задано так : $l(v) = \langle f, v\rangle$, $\langle \cdot,\cdot\rangle$ – відношення двоїстості між $H^1_0(\Omega)$ та $H^{-1}(\Omega)$. Зокрема, $\langle f, v\rangle = \int\limits_{\Omega} fv dx$ для $f \in L_2(\Omega)$.

Лема 7. Білінійна форма $a(u,v): H^1(\Omega)\times H^1(\Omega) \to R$ неперервна та $H^1(\Omega)$– еліптична.

Доведення. Оскільки $a_{ij}, a_0 \in C^1(\overline{\Omega}_+)$, то

$$|a(u,v)| \le \int\limits_{\Omega}\left|\sum_{i,j=1}^{3} a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_j} + a_0 uv\right|dx \le c_1\int\limits_{\Omega}\left\{\sum_{i,j=1}^{3}\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|\left|\frac{\partial v}{\partial x_j}\right| + |u||v|\right\}dx \le$$

$$\le c_1\left\{\sum_{i,j=1}^{3}\left(\int\limits_{\Omega}\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^2 dx\right)^{1/2}\left(\int\limits_{\Omega}\left(\frac{\partial v}{\partial x_j}\right)^2 dx\right)^{1/2} + \left(\int\limits_{\Omega}u^2dx\right)^{1/2}\left(\int\limits_{\Omega}v^2dx\right)^{1/2}\right\} \le$$

$$\le c_2\|u\|_{H^1(\Omega)}\|v\|_{H^1(\Omega)}.$$

Тут $c_1, c_2 > 0$ – деякі константи, які не залежать від u, v.

З іншого боку, на підставі умови

$$a(u,u) \ge \alpha_1\int\limits_{\Omega}\sum_{i=1}^{3}\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^2 dx + \alpha_2\int\limits_{\Omega}u^2dx \ge \alpha\|u\|^2_{H^1(\Omega)},$$

де $\alpha = \min\{\alpha_1, \alpha_2\}$, $\alpha > 0$ і не залежить від u.□

Теорема 8. Задачі D_0 та VD_0 – еквівалентні.

Доведення. Нехай $u \in H^1(\Omega)$ – розв'язок задачі D_0. З граничних умов випливає, що $u \in H^1_0(\Omega)$.

Оператор L на $H^1(\Omega)$ визначений так. Для довільних $u \in H^1(\Omega)$ та $\varphi \in C^\infty_0(\Omega)$ одержуємо: $Lu \in H^{-1}(\Omega)$ та $\langle Lu, \varphi\rangle = (u, L^*\varphi)_{L_2(\Omega)}$, де

$$L^*u = -\sum_{i,j=1}^{3}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ji}\frac{\partial u}{\partial x_j}\right) + a_0 u\,.$$

Легко переконатись, що $(u,L^{*}\varphi)_{L_2(\Omega)}=a(u,\varphi)$. Отже, $\langle Lu,\varphi\rangle=a(u,\varphi)$. На підставі щільності $C_0^{\infty}(\Omega)$ в $H_0^1(\Omega)$ для довільних $u\in H^1(\Omega)$, $v\in H_0^1(\Omega)$ отримаємо

$$\langle Lu,v\rangle=a(u,v). \tag{8}$$

Оператор L є формальним оператором, породженим білінійною формою $a(u,v)$ [4], тобто $L:H^1(\Omega)\to H^{-1}(\Omega)$ – неперервний оператор.

Оскільки $Lu=f$, $l(v)=\langle f,v\rangle$, то з рівності (8) випливає, що для довільних $u,v\in H_0^1(\Omega)$: $a(u,v)=l(v)$. Отже, u є розв'язком задачі VD_0.

Нехай $u\in H_0^1(\Omega)$– розв'язок задачі VD_0. З рівності (8) для довільних $v\in H_0^1(\Omega)$ отримаємо $a(v,u)-l(v)=\langle Lu,v\rangle-\langle f,v\rangle=\langle Lu-f,v\rangle=0$. Оскільки v – довільна, то $Lu-f=0$, тобто $Lu=f$ в сенсі рівності функціоналів. Виконання нульової граничної умови очевидне. Отже, u є розв'язком задачі D_0.□

Теорема 9. Задачі D_0 та VD_0 мають єдиний розв'язок для довільного функціонала $f\in H^{-1}(\Omega)$.

Доведення. Оскільки білінійна форма $a(u,v)$ неперервна та $H^1(\Omega)$– еліптична, а функціонал $l:H_0^1(\Omega)\to R$ – неперервний, то з леми Лакса-Мільграма випливає, що задача VD_0 має єдиний розв'язок для довільного $f\in H^{-1}(\Omega)$. З теореми 8 отримаємо існування та єдиність розв'язку задачі D_0. □

Розглянемо неоднорідну задачу Діріхле в області Ω (задача D) : знайти функцію $u\in H^1(\Omega)$ таку, що

$$Lu=0,\ \ \gamma_{0,S}^{\pm}u=g_{\pm},\qquad \gamma_{0,\Sigma}^{+}u=g,\qquad g_{\pm}\in H^{1/2}(S),\ g\in H^{1/2}(\Sigma).$$

Теорема 10. Задача D має єдиний розв'язок для довільних $g\in H^{1/2}(\Sigma)$ і $g_{\pm}\in H^{1/2}(S)$ з умовою $g_{+}-g_{-}\in H_{00}^{1/2}(S)$.

Доведення. Очевидно, якщо $g_{-}\in H^{1/2}(S)$ – довільна функція, то $g_{+}=g_{-}+g_0$, де $g_0\in H_{00}^{1/2}(S)$. Із леми 6 випливає, що для довільних $g\in H^{1/2}(\Sigma)$ та $g_{\pm}\in H^{1/2}(S)$ за умови $g_{+}-g_{-}\in H_{00}^{1/2}(S)$ існує функція $w\in H^1(\Omega)$ така, що $\gamma_0 w=(g,g_{-},g_{+}-g_{-})$, тобто $\gamma_{0,S}^{\pm}w=g_{\pm}$, $\gamma_{0,\Sigma}^{+}w=g$. Відповідно функція $u_0=u-w$ буде розв'язком задачі D_0 з $f=-Lw$. Тоді $u=u_0+w$ – єдиний розв'язок задачі D.□

4. ВИСНОВОК

У процесі побудови схеми наближеного розв'язування задачі VD_0 за допомогою метода Гальоркіна доцільно використовувати асимптотичну поведінку $|\nabla u|$ в околі Γ, яка для широкого класу математичних моделей має вигляд

$\left|\nabla u(x)\right| \sim \rho^{-\alpha}$, де $\rho = dist(x, \Gamma)$, $\alpha = \frac{1}{2}$ для регулярних точок та $0 < \alpha < 1$ для кутових точок контура Γ. Для обчислення значення білінійної форми $a(u,v)$ можна використати подання норми в $H^1(\Omega)$ на підставі леми 5.

ЛІТЕРАТУРА

1. *Винницька Л., Савула Я.* Напружено-деформований стан пружного тіла тонким включенням// Фіз.-мат. моделювання та інф. технології. – 2008. – № 7. – С. 21–29.
2. *Лионс Ж.-Л., Мадженес Э.* Неоднородные граничные задачи и их приложения. – М., 1971.
3. *Михаськів В. В., Калиняк О. І.* Нестаціонарні збурення тривимірної пружної матриці з жорстким дисковим включенням// Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 2005. – Т.41, № 2.– С. 7–15.
4. *Обэн Ж.-П.* Приближенное решение эллиптических краевых задач. – М., 1977.
5. *Савула Я., Дяконюк Л.* Дослідження варіаційної задачі теплопровідності у багатошарових середовищах з тонкими включеннями// Вісн. Львів. ун-ту. Сер. прикл. математика та інформатика. – 2000. – Вип. 3. – С. 125–130.
6. *Costabel M.* Boundary integral operators on Lipschitz domains: elementary results// SIAM J. Math. Anal. – 1988. – Vol. 19. – P. 613–626.
7. *Costabel M., Stephan E. P.* An improved boundary element Galerkin method for three-dimensional crack problems // Integral Equatios and Operator Theory. – 1987. – Vol. 10. – P. 467–504.
8. *Grisvard P.* Boundary value problems in non-smooth domains. Pitman. – London, 1985.
9. *Stephan E. P., Wendland W. L.* An augmeted Galerkin procedure for the boundary integral method applied to two-dimensional screen and crack problems// Applicable Analisis. – 1984. – Vol. 18. – P. 183–219.
10. *Sybil Yu.* Three-dimentional elliptic boundary value problems for an open Lipschitz surface// Математичні студії. – 1997. – Т. 8, N 1. – С. 79–96.

О ВАРИАЦИОННОЙ ФОРМУЛИРОВКЕ ЗАДАЧИ ДИРИХЛЕ ДЛЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА В ОБЛАСТИ С ТОНКИМ ВКЛЮЧЕНИЕМ

Ю. Сибиль

Львовский национальный университет имени Ивана Франко,
ул. Университетская, 1, Львов, 79000, e-mail: kafprog@franko.lviv.ua

Рассмотрено задачу Дирихле для эллиптического уравнения второго порядка в ограниченном теле с тонким включением, которое моделируется разомкнутой двусторонней поверхностью. Граничные условия задаются на этой разомкнутой поверхности и на поверхности, которая ограничивает заданное тело. Проведено исследование некоторых функциональных пространств в области с включением и операторов следа на разомкнутой липшицевой поверхности. Показано эквивалентность задачи в дифференциальной постановке и сответствующей вариационной задачи. Рассмотрена задача с неоднородными граничными условиями. Доказано существование и единственность решений в соответствующих функциональных пространствах.

Ключевые слова: задача Дирихле, эллиптический оператор, вариационная задача, разомкнутая поверхность.

ON VARIATIONAL FORMULATION OF THE DIRICHLET PROBLEM FOR ELLIPTIC EQUATION OF THE SECOND ORDER IN REGION WITH THIN INCLUSION

Yu. Sybil

Ivan Franko National University In Lviv,
Universytetska str., 1, Lviv, 79000, e-mail: kafprog @ franko.lviv.ua

We consider Dirichlet problem for the second order elliptic equation in bounded region with thin inclusion which is presented as an open two-sided surface. Boundary conditions are given on this open surface and on the boundary of the region as well. We investigate some functional spaces in the region with slot and the trace operators on the open Lipschitz surface. It was shown the equivalence of the original boundary value problem and corresponding variational problem. We consider also the problem with nonhomogeneous boundary conditions. We derive existence and uniqueness of solutions in appropriate functional spaces.

Key words: Dirichlet problem; elliptic operator; variational problem; open surface.

Стаття надійшла до редколегії 22.03.2010
Прийнята до друку 26.01.2011