

УДК 517.958:536.12

МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ РОЗПОДІЛУ ТЕМПЕРАТУРИ В СЕРЕДОВИЩІ З НЕЛІНІЙНОЮ ПОВЕДІНКОЮ МАТЕРІАЛУ

Б. Грицько*, Р. Гудзь*, Л. Журавчак**

*Львівський національний університет імені Івана Франка,
вул. Університетська, 1, Львів, 79000, e-mail: kafprog@franko.lviv.ua

**Карпатське відділення Інституту геофізики ім. С. І. Субботіна НАН України,
вул. Наукова, 3-б, Львів, 79060, e-mail: lzhuravchak@ukr.net

Розглянуто змішану крайову стаціонарну задачу теплопровідності у плоскій однозв'язній області з ліпшицевим краєм при залежних від температури теплофізичних характеристиках. На частинах краю області задано температуру, тепловий потік і умову конвективного теплообміну з зовнішнім середовищем. Проведено різносторонній аналіз розробленої методики комбінованого застосування методів граничних і приграничних елементів, перетворення Кірхгофа та модифікованого методу Ньютона розв'язування систем нелінійних рівнянь.

Ключові слова: стаціонарне температурне поле, непрямий метод приграничних елементів, непрямий метод граничних елементів, перетворення Кірхгофа, залежні від температури теплофізичні характеристики.

1. ВСТУП

Проблеми зниження матеріаломісткості неоднорідних елементів конструкцій, які експлуатують в умовах граничних теплових навантажень з різкими перепадами температур, а також оцінка їхньої міцності й надійності, актуальні в різних галузях економіки й техніки, зокрема, в машино- і приладобудуванні, тепловій енергетиці, проектуванні термотривких матеріалів. Розв'язання цих проблем ґрунтується на знаходженні теплових полів у кусково-однорідних об'єктах довільної форми, тобто побудові розв'язків дво- чи тривимірних нестационарних задач теплопровідності. Лінійні математичні моделі, побудовані у припущенні кусково-сталості залежності теплофізичних характеристик матеріалів від координат, не завжди адекватно описують реальні процеси. Достовірніші моделі, які враховують вплив температури на коефіцієнти тепло- та температуропровідності матеріалів компонент, приводять до нелінійних крайових задач математичної фізики, для розв'язування яких переважно використовують аналітико-чисельні та чисельні методи [1-3]. Одним з підходів, які використовують для знаходження розв'язків таких задач, є виділення оператора, що характеризує вплив нелінійності і застосування до нього ітераційних методів з використанням дискретизації області нелінійності [4, 5]. Інший, ефективніший, шлях розв'язування стаціонарних і нестационарних задач у випадку простої нелінійності (коли коефіцієнт температуропровідності незначно залежить від температури і його можна вважати сталим) полягає у використанні перетворення Кірхгофа, яке зводить нелінійне рівняння до лінійного [6-9]. Зокрема, в [8] для знаходження розв'язків стаціонарних задач теплопровідності з урахуванням залежності коефіцієнта теплопровідності від температури поєднано перетворення Кірхгофа з прямим методом граничних елементів (МГЕ). У [9] розглянуто двовимірну нестационарну

задачу для многокутника з крайовою умовою першого роду та залежним від температури коефіцієнтом теплопровідності і для визначення температурного поля запропоновано підходи, які ґрунтуються на спільному використанні змінної Кірхгофа, непрямих методів граничних (МГЕ) або приграничних елементів (МПГЕ), фундаментального розв'язку нестационарного рівняння теплопровідності та покрокової зміни часу.

У цій статті розглянуто тіло, ускладнене наявністю в ньому локальної області з нелінійною поведінкою матеріалу. Розроблено алгоритм моделювання розв'язку змішаної крайової задачі теплопровідності, який ґрунтується на використанні фундаментального розв'язку рівняння Лапласа для необмеженого середовища, непрямих МГЕ або МПГЕ, перетворенні Кірхгофа та модифікованому методі Ньютона розв'язування систем нелінійних рівнянь.

2. ФОРМУЛЮВАННЯ ЗАДАЧІ

Розглянемо плоску однозв'язну однорідну область $\Omega \subset \mathbf{R}^2$ з простим замкнутим краєм Γ . Коефіцієнт теплопровідності $\lambda(\theta)$ матеріалу середовища та коефіцієнт тепловіддачі з цієї межі $\alpha(\theta)$ є неперервними функціями від шуканої температури $\theta(x)$ [4]

$$\lambda(\theta) = \lambda_0(1 + \lambda_\theta(\theta)S_+(\theta - \theta_\lambda)\chi_\theta), \quad \alpha(\theta) = \alpha_0(1 + \alpha_\theta(\theta)S_+(\theta - \theta_\alpha)\chi_\theta), \quad (1)$$

де χ_θ – характеристична функція багатозв'язної області Ω_θ , в якій $\theta > \min(\theta_\lambda, \theta_\alpha)$, $S_+(z) = 1$ при $z > 0$, $S_+(z) = 0$ при $z \leq 0$, де $x = (x_1, x_2)$.

На частинах $\partial\Omega^s \subset \Gamma$ ($s = 1, 2, 3, \cup_{s=1}^3 \cup_{k=1}^2 \partial\Omega^s = \Gamma$) межі тіла задано, відповідно, поведінку температурного поля, теплового потоку та конвективний теплообмін із зовнішнім середовищем, температура якого $\theta_c(x)$, $x = (x_1, x_2)$. Всередині області Ω діє джерело тепла інтенсивності $\psi(x)$.

Для визначення стаціонарного температурного поля в Ω маємо нелінійне рівняння [10]

$$\sum_{i=1}^2 \frac{\partial}{\partial x_i} (\lambda(\theta) \frac{\partial \theta(x)}{\partial x_i}) = -\psi(x), \quad x \in \Omega, \quad (2)$$

граничні умови першого, другого та третього роду

$$\begin{aligned} \theta(x) &= \theta_\Gamma(x), \quad x \in \partial\Omega^1, \\ q(x) &= -\lambda(\theta) \frac{\partial \theta(x)}{\partial \mathbf{n}(x)} = q_\Gamma(x), \quad x \in \partial\Omega^2, \quad \alpha(\theta)\theta(x) - \lambda(\theta) \frac{\partial \theta(x)}{\partial \mathbf{n}(x)} = \alpha(\theta)\theta_c(x), \quad x \in \partial\Omega^3. \end{aligned} \quad (3)$$

Тут $\mathbf{n}(x) = (n_1(x), n_2(x))$ – відповідно, зовнішня однозначно визначена нормаль до $\partial\Omega$.

3. ЧАСТКОВА ЛІНЕАРИЗАЦІЯ ВИХІДНОЇ ЗАДАЧІ ЗА ДОПОМОГОЮ ПЕРЕТВОРЕННЯ КІРХГОФА

Після введення прямого [10]

$$\vartheta(x) = \mathbf{K}(\theta^{(m)}(x)) = \frac{1}{\lambda_0} \int_{\theta^{(0)}(x)}^{\theta(x)} \lambda(\zeta) d\zeta \quad (4)$$

та оберненого перетворення Кірхгофа

$$\mathbf{K}^{-1}(\vartheta(x)) = \theta(x) \quad (5)$$

для знаходження $\vartheta(x)$ одержимо частково лінеаризовану задачу

$$\Delta \vartheta(x) = -\psi(x), \quad x \in \Omega, \quad (6)$$

$$\vartheta(x) = \mathbf{K}(\theta_\Gamma(x)), \quad x \in \partial\Omega^1, \quad \frac{\partial \vartheta(x)}{\partial \mathbf{n}(x)} = q_\Gamma(x), \quad x \in \partial\Omega^2,$$

$$\frac{\partial \vartheta(x)}{\partial \mathbf{n}(x)} + \alpha(\mathbf{K}^{-1}(\vartheta))\mathbf{K}^{-1}(\vartheta) = \alpha(\mathbf{K}^{-1}(\vartheta))\theta_c(x), \quad x \in \partial\Omega^3, \quad (7)$$

де θ_0 – характеристична температура.

Ми бачимо, що перетворення Кірхгофа лінеаризує вихідне рівняння (2) та граничну умову другого роду з (3) стали лінійними, гранична умова першого роду залишається лінійною, а гранична умова третього роду з (3) зберігається нелінійною.

4. ІНТЕГРАЛЬНІ СПІВВІДНОШЕННЯ НМГЕ ТА НМПГЕ

Використаємо непрямі методи граничних і приграничних елементів [11, 12]. Уведемо на межі Γ області Ω та у зовнішній приграничній до неї смузі $G = B \setminus \Omega$ товщиною h ($\Omega \subset B \subset \mathbf{R}^2$, $\Gamma \cap \partial B = \emptyset$, ∂B – межа розширеної області B) фіктивні джерела тепла невідомої інтенсивності $\varphi^{(\Gamma)}(x)$, $\varphi^{(G)}(x)$. ($\gamma \in \{\Gamma, G\}$).

Внаслідок цього опишемо шукану функцію замість (6) рівнянням

$$\Delta \vartheta^{(\gamma)}(x) = -\varphi^{(\gamma)}(x)\chi_\gamma - \psi(x), \quad x \in \mathbf{R}^2, \quad \gamma \in \{\Gamma, G\}, \quad (8)$$

де $\chi_\gamma(x)$ – характеристична функція γ , тобто $\chi_\gamma(x) = 1$ при $x \in \gamma$, $\chi_\gamma(x) = 0$ при $x \notin \gamma$.

Тоді інтегральні зображення змінної Кірхгофа як розв'язку рівнянь (8), її похідної за нормаллю набувають вигляду

$$\vartheta^{(\gamma)}(x) = \mathbf{F}^\gamma(x, U) + C + \mathbf{F}_\psi(x, U), \quad \frac{\partial \vartheta^{(\gamma)}(x)}{\partial \mathbf{n}(x)} = \mathbf{F}^\gamma(x, Q) + \mathbf{F}_\psi(x, Q), \quad (9)$$

де

$$\mathbf{F}^\gamma(x, \Phi) = \int_\gamma \Phi(x, \xi) \varphi^{(\gamma)}(\xi) d\gamma(\xi),$$

$$\mathbf{F}_\psi(x, \Phi) = \int_\Omega \Phi(x, \xi) \psi(\xi) d\Omega(\xi),$$

$U(x, \xi) = -\frac{1}{2\pi} \ln |r/r_0|$ – фундаментальний розв'язок оператора Лапласа, який точно задовольняє рівняння (6) в Ω , $|z|$ – модуль z , $\xi = (\xi_1, \xi_2) \in \mathbf{R}^2$,

$$Q(x, \xi) = -\sum_{j=1}^2 Q_j(x, \xi) n_j(x), \quad Q_j(x, \xi) = \frac{\partial U(x, \xi)}{\partial x_j} = -\frac{x_j - \xi_j}{2\pi r^2}, \quad r = \sqrt{\sum_{i=1}^2 (x_i - \xi_i)^2}, \quad r_0 -$$

константа, яку використовують для поліпшення обчислювального процесу, $\Phi \in \{U, Q_j, Q\}$.

Спрямувавши в (9) x з середини області Ω до зовнішньої межі Γ для задоволення умов (3), одержимо граничні інтегральні рівняння (ГІР), які зв'язують невідомі $\varphi^{(\gamma)}(\xi)$ з заданими на зовнішній межі функціями

$$\mathbf{F}^\gamma(x, U) + C = \mathbf{K}(\theta_\Gamma(x)) - \mathbf{F}_\psi(x, U), \quad x \in \partial\Omega^1, \quad \mathbf{F}^\gamma(x, Q) = q_\Gamma(x) - \mathbf{F}_\psi(x, Q), \quad x \in \partial\Omega^2, \quad (10)$$

$$\begin{aligned} & \alpha(\mathbf{K}^{-1}(\mathbf{F}^\gamma(x, U) + C + \mathbf{F}_\psi(x, U))\mathbf{K}^{-1}(\mathbf{F}^\gamma(x, U) + C + \mathbf{F}_\psi(x, U)) + \mathbf{F}^\gamma(x, Q) = \\ & = \alpha(\mathbf{K}^{-1}(\mathbf{F}^\gamma(x, U) + C + \mathbf{F}_\psi(x, U))\theta_c(x) - \mathbf{F}_\psi(x, Q), \quad x \in \partial\Omega^3, \quad (11) \end{aligned}$$

$$\int_\gamma \varphi^{(\gamma)}(\xi) d\gamma(\xi) = - \int_\Omega \psi(\xi) d\Omega(\xi). \quad (12)$$

Зауважимо, що рівняння (12) відображає сумарну рівність нулю всіх джерел, які діють в Ω .

5. ДИСКРЕТИЗАЦІЯ ГЕОМЕТРІЇ ТА АПРОКСИМАЦІЯ РОЗВ'ЯЗКУ

Для знаходження розв'язків системи (10)-(12) виконаємо просторову дискретизацію за допомогою таких кроків. Дискретизуємо область G та межу Γ на приграничні G_v та граничні Γ_v ($v=1, \dots, V$) елементи й апроксимуємо невідомі функції $\varphi^{(G)}(\xi)$, $\varphi^{(\Gamma)}(\xi)$ в них константами d_v^G, d_v^Γ . У цьому разі $mes G_v = 2$, $\cup_{v=1}^V G_v = G$, $\cup_{v=1}^{V_1} (\partial G_v \cap \Gamma) = \partial\Omega^1$, $\cup_{v=V_1+1}^{V_2} (\partial G_v \cap \Gamma) = \partial\Omega^2$, $\cup_{v=V_2+1}^V (\partial G_v \cap \Gamma) = \partial\Omega^3$, $G_v \cap G_w = \emptyset$, $\Gamma_v^k \cap \Gamma_w^k = \emptyset$ при $v \neq w$, $\cup_{v=1}^V \Gamma_v = \Gamma$, $\cup_{v=1}^{V_1} \Gamma_v = \partial\Omega^1$, $\cup_{v=V_1+1}^{V_2} \Gamma_v = \partial\Omega^2$, $\cup_{v=V_2+1}^V \Gamma_v = \partial\Omega^3$. Зрозуміло, що кожен граничний елемент повинен повністю належати одній з ділянок $\partial\Omega^s$ ($s=1,2,3$), які дискретизовано відповідно на V_1, K_2, K_3 елементів, нумерація елементів починається з першої ділянки і продовжується на наступних, тобто $V_2 = V_1 + K_2$, $V = V_1 + K_2 + K_3$.

Після просторової дискретизації одержимо систему нелінійних алгебричних рівнянь (СНЛАР)

$$\mathbf{f}(\mathbf{d}) = 0, \quad (13)$$

де $\mathbf{d} = (d_1^\gamma, \dots, d_V^\gamma, C)$, $\mathbf{f}(\mathbf{d}) = (f_1(\mathbf{d}), f_2(\mathbf{d}), \dots, f_{V+1}(\mathbf{d}))^T$,

$$f_w(\mathbf{d}) = \sum_{v=1}^V A_v^\gamma(x^w, U) d_v^\gamma + C - \mathbf{K}(\theta_\Gamma(x^w)) + \mathbf{F}_\psi(x^w, U), \quad x^w \in \partial\Omega^1, \quad w = 1, \dots, V_1,$$

$$f_w(\mathbf{d}) = \sum_{v=1}^V A_v^\gamma(x^w, Q) d_v^\gamma - q_\Gamma(x^w) + \mathbf{F}_\psi(x^w, Q), \quad x^w \in \partial\Omega^2, \quad w = V_1 + 1, \dots, V_2,$$

$$f_w(\mathbf{d}) = \alpha(\mathbf{K}^{-1}(\sum_{v=1}^V A_v^\gamma(x^w, U) d_v^\gamma + C + \mathbf{F}_\psi(x^w, U))\mathbf{K}^{-1}(\sum_{v=1}^V A_v^\gamma(x^w, U) d_v^\gamma + C + \mathbf{F}_\psi(x^w, U)) +$$

$$+ \sum_{v=1}^V A_v^\gamma(x^w, Q) d_v^\gamma - \alpha (\mathbf{K}^{-1} (\sum_{v=1}^V A_v^\gamma(x^w, U) d_v^\gamma + C + \mathbf{F}_\psi(x^w, U)) \theta_c(x^w) + \mathbf{F}_\psi(x^w, Q)), \quad x^w \in \partial\Omega^3,$$

$$w = V_2 + 1, \dots, V,$$

$f_{V+1}(\mathbf{d}) = \sum_{v=1}^V A_v^\gamma(1,1) d_v^\gamma + \mathbf{F}_\psi(1,1)$, $x^w \in \Gamma_w$ ($w = 1, \dots, V$) – точка колокації, вибрана як “центр маси” граничного елемента.

Для розв’язування СНЛАР (13) розглянемо модифікований метод Ньютона [13]. Суть цієї модифікації полягає в тому, що на кожному кроці методу не треба обчислювати матрицю, обернену до матриці Якобі, у відповідній точці, натомість використовують ту саму обернену матрицю, обчислену у початковій точці.

Зобразимо (13) у вигляді

$$\mathbf{d}^T = \mathbf{F}(\mathbf{d}),$$

де $\mathbf{F}(\mathbf{d}) = \mathbf{d}^T - f_d^{-1}(\mathbf{d}^{(0)})\mathbf{f}(\mathbf{d})$, $\mathbf{d}^{(0)}$ – початкове наближення розв’язку, коли замість граничної умови третього роду візьмемо граничну умову першого роду, індекс “T” означає операцію транспонування; $f_d^{-1}(\mathbf{d})$ – матриця, обернена до матриці Якобі

$$f_d(\mathbf{d}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1(\mathbf{d})}{\partial d_1^\gamma} & \frac{\partial f_1(\mathbf{d})}{\partial d_2^\gamma} & \dots & \frac{\partial f_1(\mathbf{d})}{\partial d_V^\gamma} & \frac{\partial f_1(\mathbf{d})}{\partial C} \\ \frac{\partial f_2(\mathbf{d})}{\partial d_1^\gamma} & \frac{\partial f_2(\mathbf{d})}{\partial d_2^\gamma} & \dots & \frac{\partial f_2(\mathbf{d})}{\partial d_V^\gamma} & \frac{\partial f_2(\mathbf{d})}{\partial C} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_V(\mathbf{d})}{\partial d_1^\gamma} & \frac{\partial f_V(\mathbf{d})}{\partial d_2^\gamma} & \dots & \frac{\partial f_V(\mathbf{d})}{\partial d_V^\gamma} & \frac{\partial f_V(\mathbf{d})}{\partial C} \\ \frac{\partial f_{V+1}(\mathbf{d})}{\partial d_1^\gamma} & \frac{\partial f_{V+1}(\mathbf{d})}{\partial d_2^\gamma} & \dots & \frac{\partial f_{V+1}(\mathbf{d})}{\partial d_V^\gamma} & \frac{\partial f_{V+1}(\mathbf{d})}{\partial C} \end{pmatrix}.$$

Зрозуміло, що на першому кроці одержимо систему лінійних алгебричних рівнянь, для розв’язування якої використаємо метод Гауса. Далі послідовні наближення розв’язку в модифікованому методі Ньютона обчислимо за формулою

$$\mathbf{d}^{T(k+1)} = \mathbf{d}^{T(k)} - f_d^{-1}(\mathbf{d}^{(0)})\mathbf{f}(\mathbf{d}^{(k)}), \quad k = 0, 1, \dots$$

Розв’язавши систему (13), одержані $\mathbf{d}^{(K)} = (d_1^{K\gamma}, \dots, d_V^{K\gamma}, C_K)$ використаємо для знаходження змінної Кірхгофа та похідної від неї за нормаллю

$$\vartheta^{(\gamma)}(x) = \sum_{v=1}^V A_v^\gamma(x, U) d_v^{K\gamma} + C_K + \mathbf{F}_\psi(x, U), \quad \frac{\partial \vartheta^{(\gamma)}(x)}{\partial \mathbf{n}(x)} = \sum_{v=1}^V A_v^\gamma(x, Q_j) d_v^{K\gamma} + \mathbf{F}_\psi(x, Q), \quad (14)$$

де $A_v^G(x, \Phi) = \int_{G_v} \Phi(x, \xi) dG_v(\xi)$, $A_v^\Gamma(x, \Phi) = \int_{\Gamma_v} \Phi(x, \xi) d\Gamma_v(\xi)$. Інтеграли $A_v^G(x, U)$, $A_v^G(x, Q_j)$, $A_v^G(x, Q)$, $A_v^\Gamma(x, U)$ при $\xi = x$ містять усунуву особливість, а $A_v^\Gamma(x, Q_j)$, $A_v^\Gamma(x, Q)$ обчислені в сенсі Коші.

Далі за допомогою оберненого перетворення Кірхгофа (5) та (14) знайдемо шукані температуру та тепловий потік за формулами

$$\theta^{(\nu)}(x) = \mathbf{K}^{-1}(\vartheta^{(\nu)}(x)), \quad \lambda(\theta^{(\nu)}) \frac{\partial \theta^{(\nu)}(x)}{\partial \mathbf{n}(x)} = \frac{\partial \vartheta^{(\nu)}(x)}{\partial \mathbf{n}(x)}. \quad (15)$$

6. ЧИСЕЛЬНІ РЕЗУЛЬТАТИ

Розглянемо різні залежності коефіцієнтів теплопровідності та тепловіддачі від температури. У випадку **експоненціальної залежності** формула (1) набуває вигляду

$$\lambda(\theta) = \lambda_0 \exp\left(\frac{\beta_\lambda(\theta + \theta_0)}{\theta_0}\right), \quad \alpha(\theta) = \alpha_0 \exp\left(\frac{\beta_\alpha(\theta + \theta_0)}{\theta_0}\right). \quad (16)$$

Тоді для змінної Кірхгофа і для температури одержимо вирази

$$\vartheta = \lambda_0 \frac{\theta_0}{\beta_\lambda} \left(\exp\left(\frac{\beta_\lambda(\theta - \theta_0)}{\theta_0}\right) - 1 \right), \quad \theta = \theta_0 + \frac{\theta_0}{\beta_\lambda} \ln\left(\frac{\vartheta \beta_\lambda}{\lambda_0 \theta_0} + 1\right). \quad (17)$$

У випадку **степеневі залежності** формула (1) набуває вигляду

$$\lambda(\theta) = \lambda_0 \left(1 + \beta_\lambda \frac{\theta - \theta_0}{\theta_0}\right)^{n_\lambda}, \quad \alpha(\theta) = \alpha_0 \left(1 + \beta_\alpha \frac{\theta - \theta_0}{\theta_0}\right)^{n_\alpha}, \quad (18)$$

де n_λ, n_α – задані числа. Застосування перетворення Кірхгофа та температура в довільній точці набудуть вигляду

$$\begin{aligned} \vartheta &= \frac{\lambda_0 \theta_0}{(n+1)\beta_\lambda} \left(\left(1 + \frac{\beta_\lambda(\theta - \theta_0)}{\theta_0}\right)^{n_\lambda+1} - 1 \right), \\ \theta &= \theta_0 + \frac{\theta_0}{\beta_\lambda} \left(\left(1 + \frac{\vartheta(n+1)\beta_\lambda}{\lambda_0 \theta_0}\right)^{\frac{1}{n_\lambda+1}} - 1 \right). \end{aligned} \quad (19)$$

Задача 1. Досліджено температурне поле суцільного круглого диска радіусом $R_1=1$ м, на границі якого задана умова 3-го роду, у цьому разі $\theta_c(x) = x_2 + 2$, $\lambda_0 = 1$ Вт/(м °С), $\alpha_0 = 100$ Вт/(м² °С). Залежність коефіцієнта теплопровідності від температури описували формулою (18) для $\theta_0 = 2$, $n_\lambda = 3$, $\beta_\lambda = 1$ (рис. 1, а) та $n_\lambda = 2$, $\beta_\lambda = -1$ (рис. 1, б), коефіцієнт тепловіддачі вибирали постійним.

Як бачимо, зі зростанням коефіцієнта теплопровідності (рис. 1, а, коефіцієнт зростає у напрямі зростання x_2), екіпотенціальні лінії розташовані рідше (тіло ліпше проводить тепло і температура усталюється рівномірніше), а зі спаданням (рис. 1, б, коефіцієнт спадає у напрямку зростання x_2) – густіше.

Задача 2. Досліджено температурне поле суцільного круглого диска радіусом $R_1=1$ м, на границі якого задана умова 3-го роду, у цьому разі $\theta_c(x) = x_2 + 2$, $\lambda_0 = 1$ Вт/(м °С). Залежність коефіцієнта теплопровідності від температури описували формулою (16) для $\theta_0 = 2$, $\beta_\lambda = -1$, $\alpha_0 = 100$ Вт/(м² °С) (рис. 2, а), $\beta_\lambda = -0.5$, $\alpha_0 = 10$ Вт/(м² °С) (рис. 2, б)

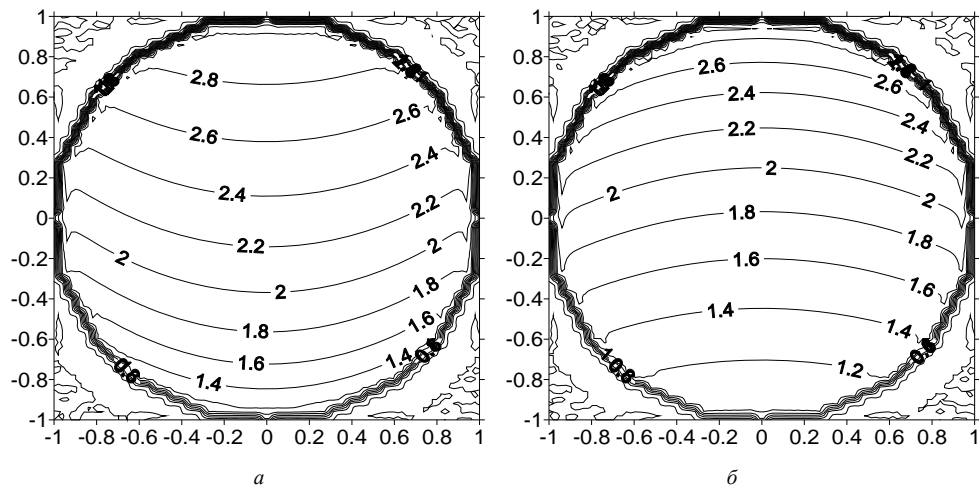


Рис. 1. Урахування впливу степеневі залежності коефіцієнта теплопровідності від температури на розподіл температурного поля у суцільному круглому диску за постійного коефіцієнта тепловіддачі

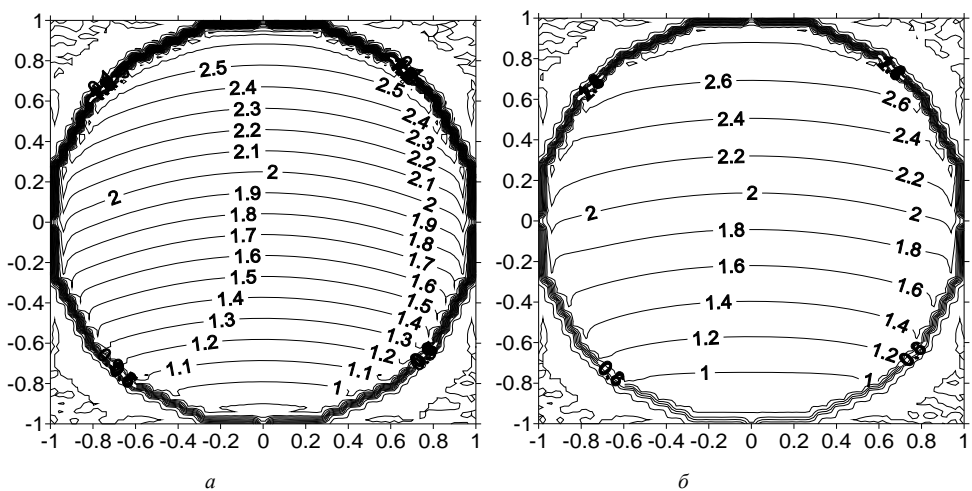


Рис. 2. Урахування впливу експоненціальної залежності коефіцієнта теплопровідності від температури та постійних коефіцієнтів тепловіддачі на розподіл температурного поля у суцільному круглому диску

Задача 3. Досліджено температурне поле суцільного круглого диска радіусом $R_1=1$ м, на границі якого задана умова 3-го роду, у цьому разі $\theta_c(x) = x_2 + 3$, $\lambda_0 = 1$ Вт/(м °C), $\alpha_0 = 10$ Вт/(м² °C). Розглянуто лінійні залежності від температури (формула (18), $n_\lambda = n_\alpha = 1$) коефіцієнтів теплопровідності для $\theta_0 = 2$ (рис. 3, а, • - $\beta_\lambda = 1$, ■ - $\beta_\lambda = 0.5$, ♦ - $\beta_\lambda = -0.5$) та тепловіддачі для $\theta_0 = 2$, (рис. 3, б, ■ - $\beta_\alpha = 4$, • - $\beta_\alpha = 1$).

Як бачимо, розглядаючи матеріали, в яких лінійну залежність коефіцієнта теплопровідності від температури можна описати з додатним температурним

коефіцієнтом β_λ (наприклад, азбест, газоскло, шамотна цегла [14]), отримуємо вищі значення температурного поля, ніж без урахування цієї залежності, тобто у припущенні сталості коефіцієнта теплопровідності. Натомість, розглядаючи матеріали, в яких цю залежність можна описати з від'ємним температурним коефіцієнтом β_λ (наприклад, цегла магnezитова, карборундові вироби, магnezіальний бетон, графіт промисловий [14]), отримуємо нижчі значення температурного поля, ніж вони були б без урахування цієї залежності.

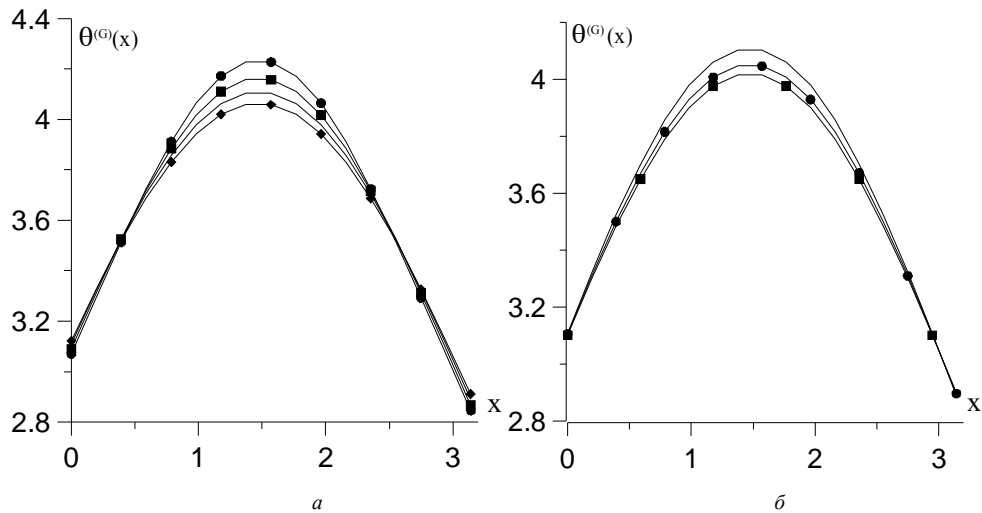


Рис. 3. Урахування впливу залежності від температури коефіцієнтів теплопровідності (а) та тепловіддачі (б) на значення температури на частині межі суцільного круглого диска (чорне – лінійна задача з незалежними від температури характеристиками)

Розглянуто випадок, коли і коефіцієнт теплопровідності, і коефіцієнт тепловіддачі лінійно залежать від температури (рис. 4).

7. ВИСНОВКИ

Для середовищ із залежними від температури коефіцієнтами теплопровідності та теплопередачі розроблена ефективна методика, за допомогою якої розраховують температуру і тепловий потік в об'єктах довільної форми. Вона ґрунтується на коректному комбінованому використанні переваг аналітичних і чисельних методів, охоплює фундаментальний розв'язок рівняння Лапласа, перетворення Кірхгофа, основні ідеї методів приграничних і граничних елементів, колокації та модифікованого методу Ньютона. Існування й достовірність розв'язків одержаної СНЛАР (13) забезпечується строгістю математичних перетворень і викладок при її побудові, доброю обумовленістю її матриці, що впливає з діагональної переваги її елементів, виконанням розрахунків з достатнім ступенем точності, та проведеними чисельними експериментами. Зазначимо таке: коли за початкове наближення $\mathbf{d}^{(0)}$ брали розв'язок лінійної задачі ($\lambda(\theta) \equiv \lambda_0, \alpha(\theta) \equiv \alpha_0$), то не завжди отримували збіжний ітераційний процес, а для певних значень $\beta_\lambda > 0$ і при непарному n_λ взагалі не було розв'язку у зв'язку з тим, що не існувало оберненого перетворення Кірхгофа

внаслідок від'ємності підкореневого виразу. Ці недоліки спонукали нас до пошуку іншого початкового наближення, тому за $\mathbf{d}^{(0)}$ ми вибрали розв'язок лінеаризованої задачі з крайовою умовою першого роду, похибка (тобто різниця між значеннями $\mathbf{d}^{(K-1)}$ та $\mathbf{d}^{(K)}$, одержаними на двох послідовних кроках розрахунку) порядку величини 10^{-4} була досягнута за 6-8 кроків. Оскільки під час знаходження змінної Кірхгофа непрямий МПГЕ давав вищу точність розрахунків, ніж непрямий МГЕ, всі результати всіх чисельних досліджень отримані саме цим методом.

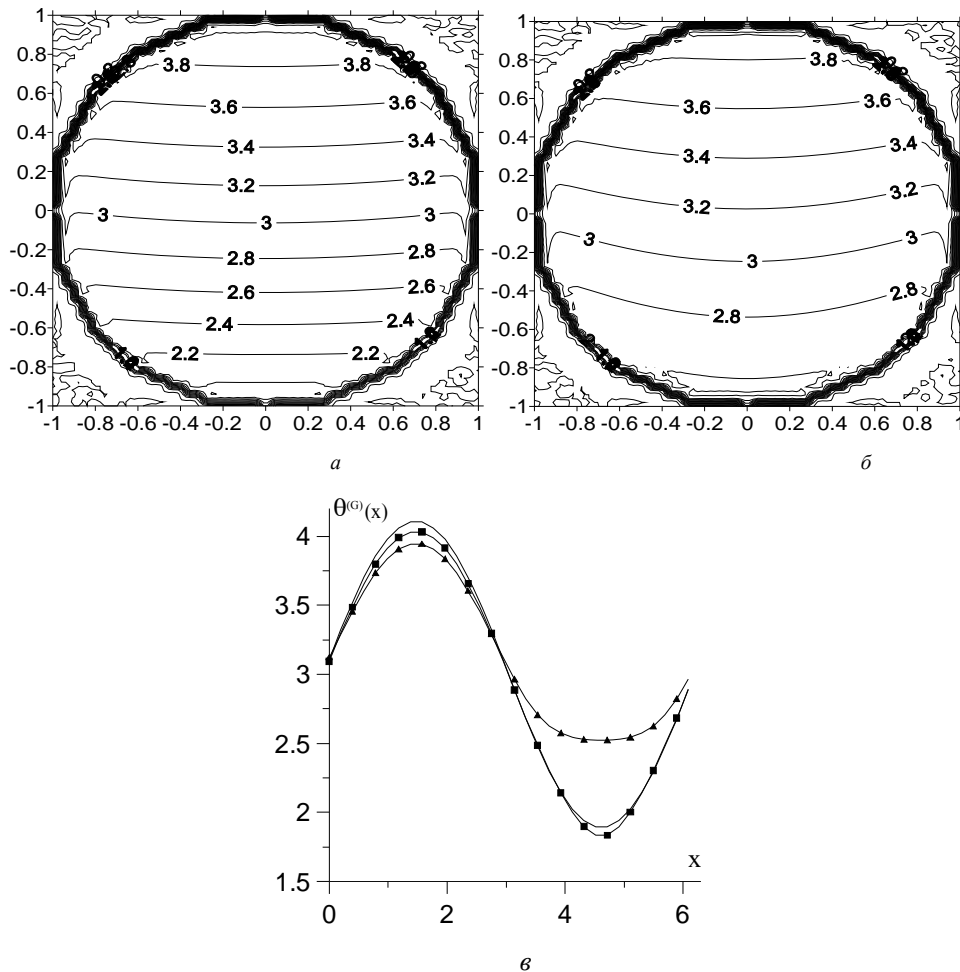


Рис. 4. Урахування взаємного впливу залежності від температури коефіцієнтів теплопровідності та тепловіддачі (а \blacksquare - $\beta_\alpha = 4$; б \blacktriangle - $\beta_\alpha = -4$, $\beta_\lambda = 1$ в обох випадках) на значення температури в суцільному круглому диску та на частині його межі (в)

Обчислювальні експерименти засвідчили доцільність поєднання непрямих МГЕ та МПГЕ з перетворенням Кірхгофа під час моделювання стаціонарних процесів теплопровідності в об'єктах з нелінійною поведінкою матеріалів, а також

підтвердили необхідність врахування залежностей коефіцієнтів теплопровідності та тепловіддачі матеріалу від температури, оскільки відносна похибка значень температурного поля, отриманих з врахуванням цих залежностей і без них, перебуває в межах від 5% (рис. 4.б) до 35% (рис. 4.г).

Цікавим є розвиток аналогічної методики стосовно моделювання розподілу стаціонарного температурного поля у кусково-однорідних середовищах із залежними від температури характеристиками, який плануємо зробити в наступних дослідженнях.

ЛІТЕРАТУРА

1. *Беляев Н. М., Рядно А. А.* Математические методы теплопроводности. – К., 1992.
2. *Кушнір Р. М., Попович В. С., Гарматій Г. Ю.* Аналітико-чисельне розв'язування контактних задач термопружності для термочутливих тіл // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 2001. – № 6. – С. 39–44.
3. *Попович В. С., Сулим Г. Т.* Центральнo-симетрична квазістатична задача термопружності термочутливого тіла // Там же. – 2004. – **40**, № 3. – С. 62–68.
4. *Журавчак Л. М.* Розв'язування просторової нестационарної задачі теплопровідності для зонально-однорідного термочутливого тіла // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2002. – **45**, № 1. – С. 137–142.
5. *Журавчак Л. М.* Розв'язування просторової задачі термопружності для зонально-однорідного термочутливого тіла довільної форми // Доп. НАН України – 2002. – № 8. – С. 37–41.
6. *Аккуратов Ю. Н., Михайлов В. Н.* Метод граничных интегральных уравнений и решение нелинейных задач теплопроводности / Журн. вычислит. мат. и математической физики. – 1980. – Т. 20, № 3. – С. 656–663.
7. *Bialecki R. and Nowak A. J.* Boundary value problems for nonlinear material and nonlinear boundary conditions // Applied Mathematical Modelling. – 1981. – № 5. – С. 417–421.
8. *Бреббия К., Теллес Ж., Вроубел Л.* Методы граничных элементов. – М., 1987.
9. *Журавчак Л. М., Михаськів В. В., Фітель Г. В.* Розв'язування нестационарної задачі теплопровідності для термочутливого многокутника методами граничних та приграничних елементів // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. прикл. мат. та інформ. 2003. – Вип. 6. – С.151–156.
10. *Подстригач Я. С., Ломакин В. А., Коляно Ю. М.* Термоупругость тел неоднородной структуры. – М., 1984.
11. *Бенерджи П., Баттерфилд Р.* Метод граничных элементов в прикладных науках. – М., 1984.
12. *Журавчак Л. М., Грицько С. Г.* Метод приграничних елементів у прикладних задачах математичної фізики. – Львів, 1996.
13. *Цегелик Г. Г.* Чисельні методи. – Львів, 2004.
14. *Теплотехнический справочник / Под общ. ред. В. Н. Юрьева и П. Д. Лебедева.* – М., 1976. – Т. 2.

**МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ
ТЕМПЕРАТУРЫ В СРЕДЕ С НЕЛИНЕЙНЫМ ПОВЕДЕНИЕМ МАТЕРИАЛА****Б. Грыцько^{*}, Р. Гудзь^{*}, Л. Журавчак^{**}**

^{*}Львовский национальный университет имени Ивана Франко,
ул. Университетская, 1, Львов, 79000, e-mail: kafprog@franko.lviv.ua
^{**}Карпатское отделение Института геофизики им. С. И. Субботина НАН
Украины,
ул. Научная, 3-б, Львов, 79060, e-mail: lzhuravchak@ukr.net

Рассмотрена смешанная краевая стационарная задача теплопроводности в плоской односвязной области с границей Липшица при зависимых от температуры теплофизических характеристиках. На частях границы области задана температура, тепловой поток и условие конвективного теплообмена с внешней средой. Проведен разносторонний анализ разработанной методики комбинированного использования методов граничных и приграничных элементов, преобразования Кирхгофа и модифицированного метода Ньютона решения систем нелинейных уравнений.

Ключевые слова: стационарное температурное поле, непрямой метод приграничных элементов, непрямой метод граничных элементов, преобразование Кирхгофа, зависимые от температуры теплофизические характеристики.

**MODELING OF TEMPERATURE DISTRIBUTION IN MEDIA WITH
NONLINEAR BEHAVIOR OF MATERIALS****B. Hrytsko^{*}, R. Gudz^{*}, L. Zhuravchak^{**}**

^{*}Ivan Franko National University of Lviv,
Universytetska str., 1, Lviv, 79000, e-mail: kafprog@franko.lviv.ua
^{**}Carpathian Branch of Subbotin Institute of Geophysics of NASU,
Naukova Str., 3-B, Lviv, 79060, e-mail: lzhuravchak@ukr.net

The solid of the any shape that occupies bi-dimensional area, where physical characteristics depend on temperature is considered. On a boundary of solid conditions of the first, second and third type are set. For finding of a stationary temperature field is written down a initial-boundary problem (2), (3). The technique of the decision will consist in construction of integral representation of Kirchhof variable and its derivative on normal (9) which use convolution of the fundamental solution of the Laplace equation with entered on boundary or near-boundary domain sources of unknown intensity.

For construction of decisions problem (6), (7) it is used indirect boundary element method (IBEM) and indirect near-boundary element method (INBEM) with the purpose of comparison of results. In external near-boundary domain and on boundary of solid it is entered accordingly near-boundary and boundary elements with sources of heat of unknown intensity. We approximate unknown "fictitious" intensity of sources by constants and construct a system of the non-linear algebraic equations (SNLAE) (13) which it is received to satisfy in sense of a collocation of boundary conditions (7). The solution of this system obtained by modified Newton method is used in (14), and the thermal field for points of observation, internal and on boundary of a solid, is found by (15).

With the purpose of approbation the offered technique it is considered a stationary problem for a solid circle. Separate and total influence coefficients of heat conductivities and a heat emission from boundary solid is investigated to find a stationary temperature field in the circle.

The feasible researches have shown that INBEM provides the maximum accuracy of calculations temperature in comparison with IBEM at use of identical quantity of elements and an identical degree of approximation of unknown intensity of heat sources. It is proved by that near-boundary domain smooth influence of the functions entered into it. Calculating experiments has showed expediency of using near-boundary element methods with Kirchhof transformation in solving stationary heat conductivity problems in domains with nonlinear material behavior.

Key words: the stationary temperature field, the indirect near-boundary element method, the indirect boundary element method, Kirchhof transformation, depended on temperature thermal characteristics.

Стаття надійшла до редколегії 20.02.2010

Прийнята до друку 26.01.2011