

УДК 517.9

ЧИСЕЛЬНЕ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ МІШАНОЇ НЕСТАЦІОНАРНОЇ ЗАДАЧІ ТЕПЛОПРОВІДНОСТІ В ЧАСТКОВО НЕОБМЕЖЕНІЙ ОБЛАСТІ

В. Вавричук

*Львівський національний університет імені Івана Франка,
вул. Університетська, 1, Львів, 79000, e-mail: vvavrychuk@gmail.com*

Для розв'язування нестационарної мішаної задачі теплопровідності у частково необмеженій області застосовано поєднання методу Рунге, функцій Гріна і непрямого методу інтегральних рівнянь. У підсумку вихідна задача зводиться до послідовності інтегральних рівнянь лише по границі включення, наближене розв'язування яких виконують методом квадратур. Для обчислення інтегралів використано квадратурні формули на основі тригонометричної інтерполяції, а також sinc-квадратури. Наведено результати чисельних експериментів.

Ключові слова: рівняння теплопровідності, частково необмежена область, функції Гріна, метод Рунге, граничні інтегральні рівняння.

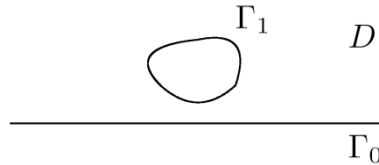
1. ВСТУП

Чисельне розв'язування прямих нестационарних мішаних задач – актуальна проблема обчислювальної математики. Необхідність у цьому виникає у разі застосування до оберненої задачі Коші деякого ітераційного регуляризуючого методу. Оскільки на кожному кроці ітераційного процесу треба розв'язувати одну або більше прямих задач, крім того, для досягнення необхідної точності часто доводиться виконувати велику кількість ітерацій, то важливим критерієм є ефективність методу розв'язування прямих задач. Якщо в формулюванні задачі неоднорідні вхідні дані задані тільки на границі області, то недоцільно використовувати методи, які вимагають дискретизації цілої області, натомість у разі використання граничних інтегральних рівнянь понижується розмірність задачі, що поліпшує швидкість методу.

Додаткові труднощі для застосування інтегральних рівнянь до нестационарної задачі становить наявність часу як незалежної змінної. Одним із підходів у цьому випадку є метод Рунге, його можна використовувати в поєднанні з граничними інтегральними рівняннями для розв'язування внутрішніх чи зовнішніх нестационарних задач у випадку, коли границя обмежена [1]. Після виконання часткової дискретизації одержують послідовність еліптичних задач. Згодом, за допомогою потенціалів простого чи подвійного шару ці задачі зводять до послідовності інтегральних рівнянь по границі області. Водночас у випадку канонічної частково необмеженої області ефективно використовувати техніку функцій Гріна, які дають змогу забезпечити граничну умову на нескінченній границі. Далі методи Рунге та функцій Гріна поширюються на випадок нестационарної задачі у частково необмеженій області. Потрібно зазначити, що альтернативою до цього підходу є використання нестационарних функцій Гріна. Проте нестационарна функція Гріна не відома для деяких областей (смуга, півсмуга тощо).

2. ФОРМУЛЮВАННЯ ЗАДАЧІ Й ФУНКЦІЇ ГРІНА

Нехай задано канонічну (півплощина, квадрант, смуга, півсмуга) частково необмежену область D з простору R^2 з границею Γ_0 без включення обмеженого кривою Γ_1 . Припускаємо, що границі достатньо гладкі, а також $T > 0$ деяка константа.



Розглянемо таку початкову мішану задачу:

$$\begin{cases} \frac{1}{c} \frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u & \text{в } D \times (0, T), \\ u = f_1 & \text{на } \Gamma_1 \times (0, T), \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} = f_0 & \text{на } \Gamma_0 \times (0, T), \\ u(x, 0) = 0 & \text{при } x \in D. \end{cases} \quad (1)$$

Тут f_0, f_1 – задані функції, які задовольняють умови погодженості. Параметр $c > 0$ – сталий коефіцієнт дифузії, ν – вектор зовнішньої нормалі. Шукатимемо класичний розв’язок $u \in C^2(\bar{D} \times (0, T))$, який двічі неперервно диференційований за просторовою змінною і один раз неперервно диференційований за часовою змінною.

У випадку різних канонічних частково необмежених областей границя Γ_0 матиме наперед відомий вигляд, а саме півплощина

$$\Gamma_0^{hp} = \{x_0(t) = (t, 0), t \in R\},$$

квадрант $\Gamma_0^q = \Gamma_{01}^q \cup \Gamma_{02}^q$

$$\Gamma_{01}^q = \{x_{01}(t) = (t, 0), t \in R\}, \Gamma_{02}^q = \{x_{02}(t) = (0, t), t \in R\},$$

смуга (для простоти ширина смуги дорівнює π) $\Gamma_0^s = \Gamma_{01}^s \cup \Gamma_{02}^s$

$$\Gamma_{01}^s = \{x_{01}(t) = (t, 0), t \in R\}, \Gamma_{02}^s = \{x_{02}(t) = (t, \pi), t \in R\},$$

півсмуга $\Gamma_0^{hs} = \Gamma_{01}^{hs} \cup \Gamma_{02}^{hs} \cup \Gamma_{03}^{hs}$

$$\Gamma_{01}^{hs} = \{x_{01}(t) = (t, 0), t \in R\},$$

$$\Gamma_{02}^{hs} = \{x_{02}(t) = (t, \pi), t \in R\},$$

$$\Gamma_{03}^{hs} = \{x_{03}(t) = (0, t), t \in (0, \pi)\}.$$

У праці [1, 2] описано метод Роте, який полягає у апроксимації початкової задачі послідовністю стаціонарних граничних задач. Для цього на $[0, T]$ вводиться рівновіддалений поділ $t_n = (n+1)h$, $h = T/(N+1)$, тоді $u_n(x) \approx u(x, t_n)$,

$f_{1n}(x) = f_1(x, t_n)$, $f_{0n}(x) = f_0(x, t_n)$, $n = 0, \dots, N-1$ і $u_{-1} = f_{1,-1} = f_{0,-1} = 0$. Після використання скінченнорізничевої апроксимації похідної за часом одержуємо послідовність еліптичних рівнянь

$$\Delta u_n - \gamma^2 u_n = \sum_{m=0}^{n-1} \beta_{n-m} u_m \text{ в } D, \quad (2)$$

де γ і β_i відомі коефіцієнти. Разом з граничними умовами $u_n = f_{1n}$ на Γ_1 і $\frac{\partial u_n}{\partial \nu} = f_{0n}$ на Γ_0 утворюється послідовність стаціонарних мішаних задач. Зазначимо, що у разі використання тих чи інших апроксимаційних співвідношень можна досягнути першого або другого порядку апроксимації за часовою змінною.

Означення 1. Послідовність функцій Φ_n , $n = 0, \dots, N-1$ називається фундаментальним розв'язком системи рівнянь (2), якщо

$$\Delta_x \Phi_n(x, y) - \sum_{m=0}^n \beta_{n-m} \Phi_m(x, y) = \delta(x - y). \quad (3)$$

Наступні поліноми використовують для побудови фундаментального розв'язку

$$v_n(r) = \sum_{m=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} a_{n,2m} r^{2m}, \quad w_n(r) = \sum_{m=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} a_{n,2m+1} r^{2m+1},$$

де a_{nm} відомі коефіцієнти, які рекурсивно визначають через γ , β_i (див. [2]).

Теорема 2. Функції

$$\Phi_n(x, y) = \frac{1}{2\pi} \{ K_0(\gamma|x-y|) v_n(|x-y|) + K_1(\gamma|x-y|) w_n(|x-y|) \} \quad (4)$$

$n = 0, \dots, N-1$ є фундаментальним розв'язком (2) у сенсі означення 1. Тут K_0 і K_1 модифіковані функції Бесселя другого роду.

На підставі цього фундаментального розв'язку можна побудувати аналоги потенціалів простого і подвійно шару і звести еліптичну задачу до інтегрального рівняння по межі області. Для того, щоб мати змогу одержати розв'язок у випадку частково необмеженої області, аналогічно, побудуємо послідовність функцій Гріна.

Означення 3. Функції $N_n(x, y)$ при $n = 0, \dots, N-1$ називають послідовністю функцій Гріна для задачі Неймана для системи еліптичних рівнянь (2) в області Ω , якщо

- $\forall x, y \in \Omega$, $N_n(x, y)$ – фундаментальний розв'язок у сенсі (3);
- $\forall x \in \Omega$ та $\forall y \in \partial\Omega$ справджується $\frac{\partial N_n}{\partial \nu(y)}(x, y) = 0$.

Теорема 4 (вигляд послідовності функцій Гріна).

Нехай Ω частково необмежена область, тоді функції Гріна для задачі Неймана набувають вигляду

$$N_n(x, y) = \Phi_n(x, y) + \varphi_n(x, y), \quad (5)$$

де Φ_n фундаментальні розв'язки, а φ_n неперервна в Ω функція, що визначається з задачі

$$\Delta_y \varphi_n(x, y) - \sum_{m=0}^n \beta_{n-m} \varphi_n(x, y) = 0 \quad \text{в } \Omega,$$

$$\frac{\partial \varphi_n(x, y)}{\partial \nu(y)} = - \frac{\partial \Phi_n(x, y)}{\partial \nu(y)} \quad \text{на } \partial \Omega.$$

Доведення. Очевидно, що для так побудованих функцій $N_n(x, y)$ виконуються умови означення 3.

Теорема 5 (подання розв'язку через послідовність функцій Гріна).

Для Φ_n з (4) виберемо функції Гріна N_n у формі (5). Тоді розв'язок u_n задачі Неймана для послідовності еліптичних рівнянь в області Ω виражається як

$$u_n(x) = \sum_{m=0}^n \int_{\partial \Omega} \left[\frac{\partial u_m}{\partial \nu}(y) - \frac{\partial u_{m-1}}{\partial \nu}(y) \right] N_{n-m}(x, y) ds(y). \quad (6)$$

Доведення. Застосувавши до u_n і N_n аналог другої формули Гріна і враховуючи той факт, що N_n є фундаментальним розв'язком у сенсі (3), а також поведінку $\Phi_n(x, y)$ при $x = y$, одержимо для $x \in \Omega$

$$\sum_{m=0}^n u_m(x) = \sum_{m=0}^n \int_{\Omega} \left\{ N_{n-m}(x, y) \frac{\partial u_m}{\partial \nu}(y) - u_m(y) \frac{\partial N_{n-m}(x, y)}{\partial \nu(y)} \right\} ds(y).$$

Твердження теореми випливає з другого пункту означення послідовності функцій Гріна.

Зокрема, для знаходження функцій Гріна можна використовувати метод відображень [5, 7], тоді вони набудуть такого вигляду.

Півплощина

$$\phi_n^{hp}(x, y) = \Phi_n(x, y^*), \quad y^* = (y_1, -y_2).$$

Квадрант

$$\phi_n^q(x, y) = \Phi_n(x, y^1) + \Phi_n(x, y^2) + \Phi_n(x, y^3),$$

де $y^1 = (y_1, -y_2)$, $y^2 = (-y_1, y_2)$, $y^3 = (-y_1, -y_2)$.

Смуга

$$\phi_n^s(x, y) = -\Phi_n(x, y) + \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \left[\Phi_n(x, y^k) + \Phi_n(x, y^{*k}) \right],$$

де $y^k = (y_1, y_2 + 2\pi k)$, $y^{*k} = (y_1, -y_2 + 2\pi k)$.

Півсмуга

$$\phi_n^{hs}(x, y) = -\Phi_n(x, y) + \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \left[\Phi_n(x, y^k) + \Phi_n(x, y^{*k1}) + \Phi_n(x, y^{*k2}) + \Phi_n(x, y^{*k3}) \right],$$

де $y^k = (y_1, y_2 + 2\pi k)$, $y^{*k1} = (y_1, -y_2 + 2\pi k)$, $y^{*k2} = (-y_1, y_2 + 2\pi k)$, $y^{*k3} = (-y_1, -y_2 + 2\pi k)$.

При обчисленнях функцій Гріна для смуги та півсмуги обмежуються деяким $(2N_{g_{\max}} + 1)$ числом членів ряду. Оскільки $K_0(z) = O(e^{-z})$ при $z \rightarrow \infty$, то у випадку рівняння (2) для досягнення необхідної точності достатньо невеликого $N_{g_{\max}}$.

3. ГРАНИЧНІ ІНТЕГРАЛЬНІ РІВНЯННЯ

Враховуючи теорему 5, функція

$$\omega_n(x) = \sum_{m=0}^n \int_{\Gamma_0} [f_{0m}(y) - f_{0,m-1}(y)] N_{n-m}(x, y) ds(y)$$

задовольняє рівняння (2), а також $\frac{\partial \omega_n}{\partial \nu} = f_{0n}$. Крім умови Неймана, треба забезпечити умову Діріхле на Γ_1 . Використаємо для цього непрямий метод інтегральних рівнянь. Отже, подамо розв'язок мішаної задачі як композицію потенціалу простого шару на Γ_1 та ω_n

$$u_n(x) = \sum_{m=0}^n \int_{\Gamma_1} \phi_m(y) N_{n-m}(x, y) ds(y) + \omega_n(x), \quad (7)$$

де ϕ_n невідома густина потенціалу. Після використання теореми про неперервність потенціалу простого шару при переході через границю одержимо систему інтегральних рівнянь

$$\int_{\Gamma_1} \phi_n(y) N_0(x, y) ds(y) = f_{1n}(x) - \omega_n(x) - \sum_{m=0}^{n-1} \int_{\Gamma_1} \phi_m N_{n-m}(x, y) ds(y).$$

Тут $x \in \Gamma_1$.

Припустимо, що границя включення є гладкою і має параметричне представлення

$$\Gamma_1 = \{x_1(s) = (x_{11}(s), x_{12}(s)), s \in [0, 2\pi]\}.$$

Використовуючи параметричне представлення і провівши адитивне виділення логарифмічної особливості з ядер, одержуємо таку послідовність інтегральних рівнянь:

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \mu_n(\sigma) \left[H_{00}(s, \sigma) \ln \frac{4}{e} \sin^2 \frac{s-\sigma}{2} + H_{01}(s, \sigma) \right] d\sigma = G_n(s), \quad (8)$$

де $\mu_n(\sigma) = \phi_n(x_1(\sigma)) |x_1'(\sigma)|$. Праві частини набувають вигляду

$$G_n(s) = f_{1n}(s) - \omega_n(s) - \frac{1}{2\pi} \sum_{m=0}^{n-1} \int_0^{2\pi} \mu_m(\sigma) \left[H_{n-m,0}(s, \sigma) \ln \frac{4}{e} \sin^2 \frac{s-\sigma}{2} + H_{n-m,1}(s, \sigma) \right] d\sigma,$$

$$f_{1n}(s) = f_{1n}(x_1(s)),$$

$$\omega_n(s) = \frac{1}{2\pi} \begin{cases} \sum_{m=0}^n \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{f}_{0m}(\sigma) H_{n-m}(s, \sigma) d\sigma & \text{для } \Gamma_0^{hp}, \\ \sum_{\ell=1}^2 \sum_{m=0}^n \int_0^{+\infty} \tilde{f}_{0\ell,m}(\sigma) H_{n-m}(s, \sigma) d\sigma & \text{для } \Gamma_0^q, \\ \sum_{\ell=1}^2 \sum_{m=0}^n \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{f}_{0\ell,m}(\sigma) H_{n-m}(s, \sigma) d\sigma & \text{для } \Gamma_0^s, \\ \sum_{\ell=1}^2 \sum_{m=0}^n \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{f}_{0\ell,m}(\sigma) H_{n-m}(s, \sigma) d\sigma + & \\ \sum_{m=0}^n \int_0^{\pi} \tilde{f}_{03,m}(\sigma) H_{n-m}(s, \sigma) d\sigma & \text{для } \Gamma_0^{hs}. \end{cases}$$

Ядра можна записати у такому вигляді:

$$H_n(s, \sigma) = 2\pi N_n(x_1(s), x_1(\sigma)),$$

$$H_{n0}(s, \sigma) = -\frac{1}{2} I_0(\gamma |r_{11}(s, \sigma)|) v_n(|r_{11}(s, \sigma)|) + \frac{1}{2} I_1(\gamma |r_{11}(s, \sigma)|) w_n(|r_{11}(s, \sigma)|),$$

$$H_{n1}(s, \sigma) = H(s, \sigma) - H_0(s, \sigma) \ln \frac{4}{e} \sin^2 \frac{s-\sigma}{2}, \text{ при } s \neq \sigma,$$

$$H_{n1}(s, s) = -0.5 \ln \frac{e\gamma^2 |x_1'(s)|^2}{4} - C_E + \frac{a_{n1}}{\gamma} + \phi_n(x_1(s), x_1(s)).$$

Тут $r_{11}(s, \sigma) = x_1(s) - x_1(\sigma)$ і C_E константа Ейлера. Коректність таких інтегральних рівнянь досліджена у просторах Гельдера у праці [3] і у просторах Соболева [4].

Як чисельний метод розв'язування інтегральних рівнянь застосуємо метод квадратур. Для цього введемо рівновіддалений поділ інтервалу $[0, 2\pi]$

$$s_i = \frac{i\pi}{M}, \quad i = 0, \dots, 2M - 1.$$

Для обчислення інтегралів використаємо такі квадратурні формули:

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\sigma) d\sigma \approx \frac{1}{2M} \sum_{j=0}^{2M-1} f(\sigma_j),$$

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\sigma) \log \frac{4}{e} \sin^2 \frac{s-\sigma}{2} d\sigma \approx \sum_{j=0}^{2M-1} R_j(s) f(\sigma_j),$$

з ваговими функціями

$$R_j(s) = -\frac{1}{2M} \left\{ 1 + 2 \sum_{m=1}^{M-1} \frac{1}{m} \cos m(s - s_j) + \frac{\cos(s - s_j)}{M} \right\}.$$

Для обчислення невластних інтегралів з безмежним інтервалом інтегрування застосовують sinc-квадратури [6]

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(\sigma) d\sigma \approx h_\infty \sum_{k=-M_\infty}^{M_\infty} f(kh_\infty), \quad h_\infty = \frac{c_\infty}{\sqrt{M_\infty}}, \quad c_\infty > 0.$$

Для інтегрування на інтервалах $(0, \infty)$ і $(0, \pi)$ спочатку застосовують відповідне конформне відображення ϕ , щоб перейти до інтеграла по R , після цього сім-квадратура набуде вигляду

$$\int_a^b f(\sigma) d\sigma \approx h_\infty \sum_{k=-M_\infty}^{M_\infty} \frac{f(\psi(kh_\infty))}{\phi'(\psi(kh_\infty))},$$

де $\psi = \phi^{-1} : R \rightarrow (a, b)$. Якщо $(a, b) = (0, \infty)$, то конформне відображення можна вибрати у вигляді $\phi(z) = \ln z$, $\psi(w) = \exp w$. У випадку скінченного інтервалу (a, b) використовують відображення $\phi(z) = \ln \frac{z-a}{b-z}$, $\psi(w) = \frac{a+be^w}{1+e^w}$.

Отже, остаточно одержимо повністю дискретну послідовність СЛАР

$$\sum_{j=0}^{2M-1} \tilde{\mu}_{nj} \left\{ R_{|j-k|} H_{00}(s_k, s_j) + \frac{1}{2M} H_{01}(s_k, s_j) \right\} = G_{nk}^1, \quad (9)$$

де $\tilde{\mu}_{nj} \approx \mu_n(s_j)$, $R_j = R_j(0)$, G_{nk}^1 – відомі праві частини.

Теорема 4. Якщо $\Gamma_1 \in C^{\ell+2}$, $\ell \geq 2$, $f_{1n} \in C^{\ell, \beta}[0, 2\pi]$, $f_{0n} \in C^{\ell-1, \beta}(-\infty, +\infty)$, то для достатньо великого M системи (8) мають єдиний розв'язок. Крім того, виконується оцінка похибки

$$\|\mu_n - \tilde{\mu}_{n,M}\|_{m, \alpha} \leq C_n \frac{\ln M}{M^{\ell-m+\beta-\alpha}} \|\tilde{\mu}_n\|_{\ell, \beta},$$

де $0 \leq m \leq \ell$, $0 < \alpha \leq \beta < 1$ і деяка константа C_n , яка не залежить від M .

Доведення. Теорему доводять, використовуючи оцінки похибки квадратурних формул (див [2]).

Цей метод можна поширити на випадок наявності кількох включень.

4. ЧИСЕЛЬНІ ЕКСПЕРИМЕНТИ

У поданих нижче прикладах виберемо параметри задачі (1) так: $T=1$, $c=1$. Параметри дискретизації M_∞ і $N_{g \max}$ виберемо так, щоб вони забезпечували хорошу точність, наприклад, $M_\infty = 1000$, $N_{g \max} = 10$.

Приклад 1. Нехай область D – це квадрант з включенням

$$r(s) = \sqrt{\cos s + 0.25 \sin s}, \quad (9)$$

$$x_1(s) = \{(r(s) \cos s + 1, r(s) \sin s + 1), s \in [0, 2\pi]\}.$$

Для того, щоб перевірити правильність розв'язування системи еліптичних рівнянь, виберемо граничні умови як звуження значень фундаментального розв'язку (5) на границю

$$\begin{aligned} f_{1n}(x, t) &= \Phi_n(x, \tilde{y}), \quad x \in \Gamma_1, \\ f_{0n}(x, t) &= \frac{\partial}{\partial \nu} \Phi_n(x, \tilde{y}), \quad x \in \Gamma_0, \end{aligned}$$

де $\tilde{y} = (1,1) \notin D$. В табл. 1 наведені абсолютні похибки для деяких елементів u_n розв'язку системи за різних значень частоти дискретизації M . Виміри зроблені в точці $x = (0.25, 0.25)$.

Таблиця 1

Абсолютні похибки розв'язку системи еліптичних рівнянь

	$n = 0$	$n = 5$	$n = 10$
$M = 16$	$5.60 \cdot 10^{-11}$	$2.75 \cdot 10^{-10}$	$3.42 \cdot 10^{-10}$
$M = 32$	$1.17 \cdot 10^{-16}$	$3.44 \cdot 10^{-15}$	$6.32 \cdot 10^{-15}$
$M = 64$	$1.04 \cdot 10^{-16}$	$1.88 \cdot 10^{-15}$	$8.99 \cdot 10^{-15}$

Приклад 2. Розглянемо смугу, яка містить включення $x_i(s) = (r(s) \cos s, r(s) \sin s + 1)$, де $r(s)$ з (9). Для перевірки розв'язування нестационарної задачі вибираємо граничні умови як звуження нестационарного фундаментального розв'язку

$$u(x, t) = \frac{1}{4\pi ct} \exp\left(\frac{-|x - \tilde{y}|}{4ct}\right), \quad \tilde{y} \notin D,$$

де $\tilde{y} = (0,1)$. Абсолютні похибки в точці $x = (0, 0.25)$ за різних значень часу і при різних параметрах дискретизації подано в табл. 2. Реалізовано схему з першим і другим порядком апроксимації за часом.

Таблиця 2

Чисельні результати розв'язування нестационарної задачі

		$O(h)$		$O(h^2)$	
M	M	$N = 10$	$N = 20$	$N = 10$	$N = 20$
0.20	16	$7.565 \cdot 10^{-2}$	$3.044 \cdot 10^{-2}$	$6.511 \cdot 10^{-2}$	$1.899 \cdot 10^{-2}$
	32	$7.565 \cdot 10^{-2}$	$3.044 \cdot 10^{-2}$	$6.511 \cdot 10^{-2}$	$1.899 \cdot 10^{-2}$
0.40	16	$2.890 \cdot 10^{-2}$	$9.986 \cdot 10^{-3}$	$2.433 \cdot 10^{-2}$	$1.125 \cdot 10^{-2}$
	32	$2.890 \cdot 10^{-2}$	$9.986 \cdot 10^{-3}$	$2.433 \cdot 10^{-2}$	$4.715 \cdot 10^{-3}$
0.60	16	$1.239 \cdot 10^{-2}$	$3.683 \cdot 10^{-3}$	$1.068 \cdot 10^{-2}$	–
	32	$1.239 \cdot 10^{-2}$	$3.683 \cdot 10^{-3}$	$1.068 \cdot 10^{-2}$	$2.325 \cdot 10^{-3}$
0.80	16	$5.976 \cdot 10^{-3}$	$1.524 \cdot 10^{-3}$	$5.130 \cdot 10^{-3}$	–
	32	$5.976 \cdot 10^{-3}$	$1.524 \cdot 10^{-3}$	$5.130 \cdot 10^{-3}$	$1.342 \cdot 10^{-3}$

Приклад 3. Нехай область D півсмугою, що містить два включення у формі квадрата з заокругленими кутами, які описують таким параметричним зображенням:

$$r(s) = \left((2 \cos s)^{100} + (2 \sin s)^{100} \right)^{0.01},$$

$$x_1(s) = \left\{ \left(r(s) \cos s + 1.5, r(s) \sin s + \frac{\pi}{2} \right), s \in [0, 2\pi] \right\},$$

$$x_2(s) = \left\{ \left(r(s) \cos s + 3.5, r(s) \sin s + \frac{\pi}{2} \right), s \in [0, 2\pi] \right\}.$$

Граничні умови вихідної задачі вибирають як звуження наступного точного розв'язку на границю області

$$u(x, t) = \operatorname{erf} \left(\frac{x_1 - \tilde{y}_1}{2\sqrt{ct}} \right) \operatorname{erf} \left(\frac{x_2 - \tilde{y}_2}{2\sqrt{ct}} \right) - 1,$$

де $\tilde{y} = (-0.1, -0.1)$, а $\operatorname{erf}(x)$ функція помилок. На рис. 1-4 зображено значення точного та наближеного розв'язків у різні моменти часу. У цьому разі параметри дискретизації такі: $N = 10$, $M = 64$.

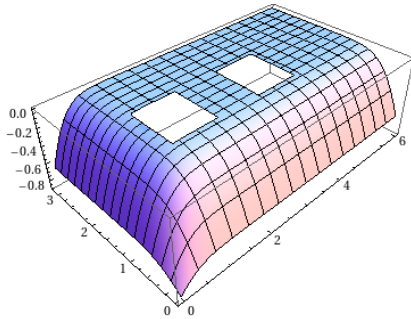


Рис. 1. Точний розв'язок $t = 0.1$

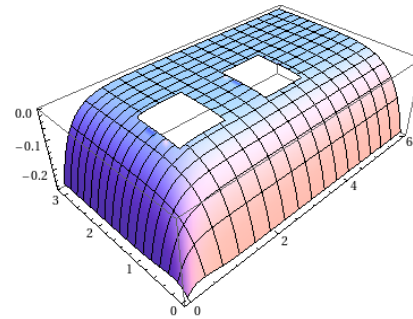


Рис. 2. Наближений розв'язок $t = 0.1$

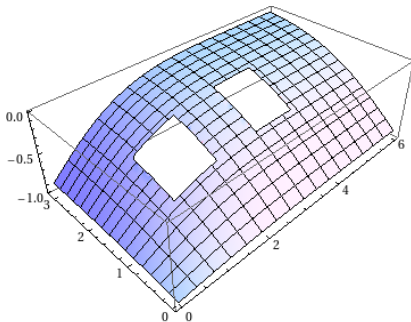


Рис. 3. Точний розв'язок $t = 1.0$

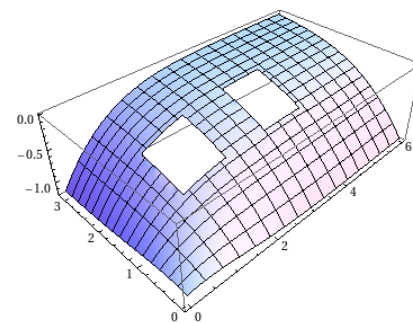


Рис. 4. Наближений розв'язок $t = 1.0$

5. ВИСНОВКИ

Отже, розглянуто чисельне розв'язування мішаної початково-крайової задачі в частково необмеженій області з включенням. Застосуванням методу Рунге за часовою змінною вихідну задачу звели до послідовності стаціонарних граничних задач. Використання побудованої послідовності функцій Гріна дало змогу одержати подання розв'язку, яке задовольняє умову Неймана на границі частково необмеженої області. За допомогою аналога потенціалу простого шару задачу звели до інтегрального рівняння по границі включення, яке розв'язується методом дискретної

колокації з використанням квадратурних формул на базі тригонометричної інтерполяції на $[0, 2\pi]$, а також sinc-квадратур. Чисельні результати підтверджують ефективність запропонованого методу та теоретичні оцінки похибки.

ЛІТЕРАТУРА

1. *Chapko R. S.* Rothe's Method for the Heat Equation and Boundary Integral Equations / Chapko R. S., Kress R. J. // *Integral Equations Appl.* 9, 1997. – P. 47–69.
2. *Chapko R. S.* On the numerical solution of a mixed initial boundary value problem for the heat equation in a double-connected planar domain. / Chapko R.S., Vavrychuk V.G // *Journal of Numerical and Applied Mathematics.* No. 97, 2009. – P. 26–38.
3. *Chapko R. S.* On a quadrature method for a logarithmic integral equation of the first kind / Chapko R., Kress R. // In Agarwal, ed.: *World Scientific Series in Applicable Analysis. Vol.2. Contributions in Numerical Mathematics.* 1993. – P.127.
4. *Kress R.* *Linear Integral Equations*, 2nd. ed. / Kress R. – Springer-Verlag, Heidelberg 1999.
5. *Polyanin A. D.* *Handbook of linear partial differential equations for engineers and scientists* / Polyanin A. D. – Chapman & Hall/CRC. 2002.
6. *Stenger F.* *Numerical methods based on sinc and analytic functions.* – Springer, 1993.
7. *Тихонов А.Н.* *Уравнения математической физики* / Тихонов А.Н., Самарский А.А. – М., 1972.

ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ СМЕШАННОЙ НЕСТАЦИОНАРНОЙ ЗАДАЧИ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ В ЧАСТИЧНО НЕОГРАНИЧЕННОЙ ОБЛАСТИ

В. Вавричук

*Львовский национальный университет имени Ивана Франко,
ул. Университетская, 1, Львов, 79000, e-mail: vvavrychuk@gmail.com*

Для решения нестационарной смешанной задачи теплопроводности в частично неограниченной области применяется сочетание метода Рунге, функций Грина и непрямого метода интегральных уравнений. В итоге исходная задача сводится к последовательности интегральных уравнений только по границе включения, приближенное решение которых осуществляется методом квадратур. Для вычисления интегралов использованы квадратурные формулы, основанные на тригонометрической интерполяции, а также sinc-квадратуры. Приводятся результаты численных экспериментов.

Ключевые слова: уравнение теплопроводности, частично неограниченная область, функции Грина, метод Рунге, граничные интегральные уравнения.

**NUMERICAL SOLVING MIXED NONSTATIONARY HEAT CONDUCTION
PROBLEM IN SEMI-INFINITE DOMAIN****V. Vavrychuk***Ivan Franko National University of Lviv,
Universytetska str, 1, Lviv, 79000, e-mail: vvavrychuk@gmail.com*

The combination of Rothe's method, Green functions and indirect integral equations method is applied to heat conduction problem in semi-infinite domain. As result the initial boundary value problem is reduced to the sequence of integral equations only by the inclusion's boundary. Quadrature formulas based on trigonometric interpolation and sinc-quadratures are used for calculating of the integrals. The numerical results are presented.

Key words: heat equation, semi-infinite domain, Green functions, Rothe's method, boundary integral equations.

*Стаття надійшла до редколегії 22.11.2010
Прийнята до друку 26.01.2011*