

МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ

УДК 519.6:517.925

ЧАСТИНАМИ КВАДРАТИЧНІ ТА КУБІЧНІ АПРОКСИМАЦІЇ h – АДАПТИВНОГО МСЕ ДЛЯ ОДНОВИМІРНИХ КРАЙОВИХ ЗАДАЧ

Є. Абрамов*, Г. Квасниця*, Г. Шинкаренко**

*Львівський національний університет імені Івана Франка,
вул. Університетська, 1, Львів, 79000, e-mail: gashynk@lnu.edu.ua

**Політехніка Опольська, вул. Любомицька, 5, Ополье, 45043, Польща
e-mail: h.shynkarenko@po.opole.pl

Для крайових задач з лінійними диференціальними рівняннями другого порядку побудовано h -адаптивні схеми методу скінченних елементів (МСЕ) з використанням частинами квадратичних і частинами кубічних апроксимацій розв'язку. Наведено результати аналітичних обчислень складників системи лінійних алгебричних рівнянь МСЕ з такими наближеннями на скінченному елементі. Головну увагу приділено побудові частинами поліноміальних апостеріорних оцінювачів похибок вжитих вище апроксимацій, подано вирази для обчислення розподілів їхніх енергетичних норм на скінченних елементах, які, зрештою, покладено в основу системи адаптування сіток з метою відшукування наближень із наперед заданою точністю. Ефективність розроблених адаптивних схем ілюструється аналізом числових розв'язків модельної сингулярно збуреної крайової задачі.

Ключові слова: варіаційна задача, нерівномірна сітка, метод скінченних елементів, квадратичні та ермітові кубічні апроксимації, апостеріорний оцінювач похибки, критерій адаптування сітки, гарантована точність обчислення апроксимацій.

1. ВСТУП

У різноманітних застосуваннях комп'ютерного моделювання все більше уваги приділяють надійним критеріям оцінки обчислених характеристик досліджуваних об'єктів та явищ. Особливу цінність такі критерії становлять у виконанні обчислювальних експериментів із сингулярно збуреними крайовими та/чи початково-крайовими задачами, див., наприклад, [6]. З огляду на цю важливу обставину теорія числових методів останнім часом була доповнена потужним інструментарієм: апостеріорні оцінювачі похибок (АОП) апроксимацій МСЕ, див. огляди [7,8] та монографії [5,6,9].

Детальна побудова АОП частинами лінійних апроксимацій МСЕ для крайових задач із звичайними диференціальними рівняннями другого порядку та побудова h – адаптивної схеми на їхній основі нещодавно виконана в праці [1]. За допущення, що така апроксимація $u_h = u_h(x)$ з достатньою точністю відтворює значення шуканого розв'язку $u = u(x)$ у вузлах x_i використаної сітки $\mathfrak{S}_h = \{K_{i+1/2}\}$, наближення до похибки $e := u - u_h$ на кожному скінченному елементі $K_{i+1/2} = (x_i, x_{i+1})$ перебувають у вигляді частинами квадратичної функції бульбашкової структури

$$e(x) \cong b_{i+1/2}(x) \lambda_{i+1/2} := 4 \frac{(x-x_i)(x_{i+1}-x)}{(x_{i+1}-x_i)^2} \lambda_{i+1/2} \quad \forall x \in K_{i+1/2}. \quad (1.1)$$

Шуканий коефіцієнт $\lambda_{i+1/2}$ апостеріорного оцінювача (1.1) подає наближене значення похибки апроксимації МСЕ у центрі ваги $x_{i+1/2}$ скінченого елемента $K_{i+1/2}$ і незалежно від решти скінченних елементів поділу обчислюється з лишку варіаційного рівняння

$$\lambda_{i+1/2} = \frac{\langle l_{i+1/2}, b_{i+1/2} \rangle - c_{i+1/2}(u_h, b_{i+1/2})}{c_{i+1/2}(b_{i+1/2}, b_{i+1/2})}, \quad (1.2)$$

де $c_{i+1/2}(\cdot, \cdot)$ та $\langle l_{i+1/2}, \cdot \rangle$ – складові білінійної форми та лінійного функціонала варіаційного рівняння розглядуваної задачі, визначені на скінченному елементі $K_{i+1/2}$. На цьому шляху обчислюється розподіл похибок між скінченними елементами сітки \mathfrak{S}_h і приймаються рішення щодо її згущення/розрідження з метою досягнення рівномірного розподілу похибки наперед заданого рівня.

Подібний підхід до побудови АОП розвинено в статтях [2,3] для апроксимацій МСЕ в задачах еластостатики, а також [4] – в задачі дифузії-конвекції-реакції.

Ми продовжуємо цитоване вище дослідження [1] для випадку частинами квадратичних і частинами кубічних апроксимацій МСЕ. З огляду на цю мету текст статті побудовано так. У пп. 2 і 3 формулюється модельна крайова та відповідна їй варіаційна задачі і достатні умови однозначної її розв'язуваності. В п. 4 ми описуємо частинами квадратичну апроксимацію МСЕ на кожному скінченному елементі поділу з використанням локальної змінної і за певних допущень стосовно наближеного інтегрування на скінченному елементі будуємо відповідну систему дискретизованих рівнянь МСЕ. Далі з використанням поліноміальної функції бульбашкової структури будуємо АОП для цих частинами квадратичних апроксимацій МСЕ. Такий АОП є поліномом третього порядку, який набуває нульових значень у вузлах скінченного елемента, і його відшукання вимагає розв'язування лише одного алгебричного рівняння. Ми подаємо його розв'язок у замкненому вигляді на підставі безпосередніх обчислень. Матеріал п. 5 повністю повторює щойно описаний шлях дослідження для випадку апроксимацій МСЕ, які ґрунтуються на кубічних поліномах Ерміта, та побудову АОП, який сконструйовано за допомогою частинами визначеного полінома четвертого порядку бульбашкової структури. У п. 6 розглянуто стратегію адаптування сітки скінченних елементів, а останній п. 7 доповнює теоретичний аналіз результатами числових експериментів.

2. ФОРМУЛЮВАННЯ КРАЙОВОЇ ЗАДАЧІ

Розглянемо крайову задачу: знайти функцію $u = u(x)$, яка є розв'язком диференціального рівняння

$$-[\mu(x)u'(x)]' + \beta(x)u'(x) + \sigma(x)u(x) = f(x) \quad \forall x \in (0, L) \quad (2.1)$$

і задовольняє крайові умови

$$u(0) = 0, \quad -\mu(L)u'(L) = \alpha[u(L) - \bar{u}]. \quad (2.2)$$

Тут $\mu = \mu(x)$, $\beta = \beta(x)$, $\sigma = \sigma(x)$ та $f = f(x)$ – задані функції такі, що

$$\begin{cases} \mu(x) \geq \mu_0 = \text{const} > 0, & \sigma(x) \geq 0, \\ \mu, \beta, \sigma \in L^\infty(\Omega), & f \in L^2(\Omega), \end{cases} \quad (2.3)$$

а $\alpha \geq 0$, \bar{u} – задані сталі.

3. ВАРІАЦІЙНЕ ФОРМУЛЮВАННЯ КРАЙОВОЇ ЗАДАЧІ

Крайова задача (2.4) допускає варіаційне формулювання вигляду

$$\begin{cases} \text{знайти } u \in V := \{v \in H^1(0, L) : v(0) = 0\} \text{ таку, що} \\ c(u, v) = \langle l, v \rangle \quad \forall v \in V \end{cases} \quad (3.1)$$

з такими білінійною формою та лінійним функціоналом

$$\begin{cases} c(u, v) := \int_0^L (\mu u'v' + \beta u'v + \sigma uv) dx + \alpha u(L)v(L), \\ \langle l, v \rangle := \int_0^L f v dx + \alpha \bar{u}v(L) \quad \forall u, v \in V. \end{cases} \quad (3.2)$$

З огляду на теорему Лакса-Мільграма-Вишика можна переконалися, що варіаційна задача (3.1) коректно сформульована, якщо її дані задовольняють умови регулярності (2.3) і

$$\sigma - \frac{1}{2}\beta' \geq 0 \quad \forall x \in (0, L), \quad \alpha - \frac{1}{2}\beta(L) \geq 0. \quad (3.3)$$

За цих умов білінійна форма $c(\dots) : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ варіаційної задачі утворює на просторі допустимих функцій V норму (відому під назвою енергетичної норми задачі)

$$\|v\|_V := \sqrt{c(v, v)} \quad \forall v \in V. \quad (3.4)$$

4. ЧАСТИНАМИ КВАДРАТИЧНІ АПРОКСИМАЦІЇ МСЕ

4.1. Локальні незалежні змінні на скінченних елементах

Зафіксувавши натуральне N , поділимо відрізок $[0, L]$ на скінченні елементи

$K_{i+1/2} := (x_i, x_{i+1})$ довжини $h_{i+1/2} := x_{i+1} - x_i$, $i = 0, \dots, N-1$ так, що $x_0 = 0 < x_1 < \dots < x_{N-1} < x_N = L$. Тут і далі дробовим індексом будемо позначати номер скінченного елемента і певні його характеристики, скажімо, $x_{i+1/2} := (x_{i+1} + x_i) / 2$ – це центр ваги скінченного елемента $K_{i+1/2} = (x_i, x_{i+1})$.

На кожному скінченному елементі $K_{i+1/2}$ введемо локальну координату ξ згідно з правилом

$$\begin{cases} x = x(\xi) := \frac{1}{2}(1-\xi)x_i + \frac{1}{2}(1+\xi)x_{i+1} = \theta(\xi)x_i + \omega(\xi)x_{i+1} \\ = x_{i+1/2} + \frac{1}{2}h_{i+1/2}\xi \quad \forall \xi \in [-1, 1]. \end{cases} \quad (4.1)$$

У визначенні (4.1) використано такі позначення:

$$\theta(\xi) := \frac{1}{2}(1-\xi), \quad \omega(\xi) := \frac{1}{2}(1+\xi). \quad (4.2)$$

Введення локальних координат на скінченних елементах створює, з одного боку, передумови для однотипного опису їхніх, скажімо, геометричних характеристик, а з іншого – дає змогу підготуватися, наприклад, до обчислення основних співвідношень МСЕ з використанням числового інтегрування квадратурами Гауса.

4.2. Квадратичний поліном на скінченному елементі

На кожному скінченному елементі виберемо квадратичну апроксимацію шуканого розв'язку варіаційної задачі (3.1) у вигляді

$$\begin{cases} u[x(\xi)] \equiv u_h(\xi) := \{2\theta(\xi)[\theta(\xi) - \frac{1}{2}]\}u_i + \\ \quad + \{2\omega(\xi)[\omega(\xi) - \frac{1}{2}]\}u_{i+1} + \{4\omega(\xi)\theta(\xi)\}u_{i+1/2}, \\ x(\xi) = \theta(\xi)x_i + \omega(\xi)x_{i+1} \quad \forall \xi \in [-1, +1], \quad i = 0, \dots, N-1. \end{cases} \quad (4.3)$$

Отже, з огляду на диференціювання складених функцій та апроксимацію (4.3) ми одержуємо правило обчислення похідних вигляду

$$u' \equiv \frac{du}{dx} = \frac{d\xi}{dx} \frac{d}{d\xi} u[x(\xi)] \equiv \frac{2}{h} \frac{du_h}{d\xi} \quad \forall K_{i+1/2}, \quad i = 0, \dots, N-1. \quad (4.4)$$

Зауваження 4.1. Тут і далі, щоб описати квадратичну апроксимацію з (4.3) як функцію глобальної змінної $x \in K_{i+1/2}$, достатньо замінити визначення (4.2) функцій $\theta = \theta(\xi)$ і $\omega = \omega(\xi)$ такими, як $\theta = \theta(x) := h_{i+1/2}^{-1}(x_{i+1} - x)$, $\omega = \omega(x) := h_{i+1/2}^{-1}(x - x_i) \quad \forall x \in K_{i+1/2}$.

4.3. Обчислення на скінченному елементі

З огляду на застосування класичних схем нам будуть потрібні обчислення складових варіаційного рівняння (3.1) вигляду

$$\begin{cases} c_{i+1/2}(u, v) := \int_{x_i}^{x_{i+1}} \{\mu u'v' + \beta u'v + \sigma uv\} dx + \alpha u(L)v(L)\delta_{N_{i+1}}, \\ \langle l_{i+1/2}, v \rangle := \int_{x_i}^{x_{i+1}} f v dx + \alpha \bar{u}v(L)\delta_{N_{i+1}}, \quad i = 0, \dots, N-1. \end{cases} \quad (4.5)$$

Як і в попередній статті [1], будемо виконувати інтегрування в (4.5) наближено з вживанням теореми про середнє

$$\begin{cases} c_{i+1/2}(u, v) \equiv \mu_{i+1/2} \int_{x_i}^{x_{i+1}} u'v' dx + \beta_{i+1/2} \int_{x_i}^{x_{i+1}} u'v dx + \sigma_{i+1/2} \int_{x_i}^{x_{i+1}} uv dx \\ \quad + \alpha u(L)v(L)\delta_{N_{i+1}}, \\ \langle l_{i+1/2}, v \rangle \equiv f_{i+1/2} \int_{x_i}^{x_{i+1}} v dx + \alpha \bar{u}v(L)\delta_{N_{i+1}}, \quad i = 0, \dots, N-1, \end{cases} \quad (4.6)$$

де

$$\mu_{i+1/2} := \mu(x_{i+1/2}), \quad \beta_{i+1/2} := \beta(x_{i+1/2}), \quad \sigma_{i+1/2} := \sigma(x_{i+1/2}).$$

4.4. Система дискретизованих рівнянь на скінченному елементі

Твердження 4.1 про структуру рівнянь МСЕ з квадратичною апроксимацією.

Нехай апроксимація u_h розв'язку варіаційної задачі (3.1) відшуковується методом Гальоркіна з використанням квадратичних апроксимацій, які на кожному скінченному елементі поділу вибрано у вигляді (4.3).

Тоді система лінійних алгебричних МСЕ, побудована на скінченному елементі $K_{i+1/2} = (x_i, x_{i+1})$, має таку структуру:

$$\left\{ \frac{\mu}{3h} \begin{bmatrix} 7 & 1 & -8 \\ 1 & 7 & -8 \\ -8 & -8 & 16 \end{bmatrix} + \frac{\beta}{6} \begin{bmatrix} -3 & 1 & -4 \\ -1 & 3 & 4 \\ 4 & -4 & 0 \end{bmatrix} + \frac{\sigma h}{30} \begin{bmatrix} 4 & -1 & 2 \\ -1 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 16 \end{bmatrix} \right\}_{i+1/2} \times$$

$$\times \begin{bmatrix} u_i \\ u_{i+1} \\ u_{i+1/2} \end{bmatrix} = \left\{ \frac{fh}{6} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix} \right\}_{i+1/2} \quad \forall K_{i+1/2} = (x_i, x_{i+1}), \quad i = 0, 1, \dots, N-1. \quad (4.7)$$

Доведення. Вибираючи в кожному з доданків (4.6) послідовно за допустимі функції $\{v_m\}_{m=1}^3 := \{2\theta(\theta - \frac{1}{2}), 2\omega(\omega - \frac{1}{2}), 4\theta\omega\}$ і приймаючи за u апроксимацію з (4.3), після безпосередніх обчислень інтегралів від добутків поліноміальних функцій, одержуємо, що

$$\left\{ \int_{x_i}^{x_{i+1}} u_h v_m dx \right\}_{m=1}^3 = \frac{h_{i+1/2}}{30} \begin{bmatrix} 4 & -1 & 2 \\ -1 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 16 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_i \\ u_{i+1} \\ u_{i+1/2} \end{bmatrix} \quad (4.8)$$

$$\left\{ \int_{x_i}^{x_{i+1}} u'_h v_m dx \right\}_{m=1}^3 = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} -3 & 1 & -4 \\ -1 & 3 & 4 \\ 4 & -4 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_i \\ u_{i+1} \\ u_{i+1/2} \end{bmatrix} \quad (4.9)$$

$$\left\{ \int_{x_i}^{x_{i+1}} u'_h v'_m dx \right\}_{m=1}^3 = \frac{1}{3} \frac{1}{h_{i+1/2}} \begin{bmatrix} 7 & 1 & -8 \\ 1 & 7 & -8 \\ -8 & -8 & 16 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_i \\ u_{i+1} \\ u_{i+1/2} \end{bmatrix} \quad (4.10)$$

$$\left\{ \int_{x_i}^{x_{i+1}} v_m dx \right\}_{m=1}^3 = \frac{h_{i+1/2}}{6} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}. \quad (4.11)$$

Після виконання належних алгебричних обчислень з векторами (4.8)-(4.11) згідно з правилами (4.6) прийдемо до системи задекларованих лінійних алгебричних рівнянь (4.7).

За добре відомими правилами з систем рівнянь вигляду (4.7) укладається система лінійних алгебричних рівнянь для відшукування вузлових значень частинами квадратичної апроксимації МСЕ на довільних нерівномірних сітках.

Зауваження 4.2. Систему рівнянь (4.7) ми впорядкували так, щоб попередньо на кожному скінченному елементі $K_{i+1/2}$ зручно було виконати конденсацію його внутрішнього параметра $u_{i+1/2}$, вилучивши таким способом одне з трьох рівнянь системи (4.7). За цих умов, подібно як із частинами лінійними апроксимаціями, формується результуюча система дискретизованих рівнянь з тридіагональною матрицею, за деталями див., наприклад, [9].

4.5. Апостеріорний оцінювач похибки частинами квадратичних апроксимацій

У випадку квадратичних апроксимацій вигляду (4.3) похибку їхнього наближення $e(x) = u(x) - u_h(x)$ на кожному скінченному елементі будемо апроксимувати кубічним поліномом вигляду

$$\begin{cases} e[x(\xi)] \equiv e_{i+1/2}(\xi) := \lambda_{i+1/2} b_{i+1/2}(\xi) \\ \quad \equiv \{\omega(\xi)\theta(\xi)[\theta(\xi) - \omega(\xi)]\} \lambda_{i+1/2}, \\ x(\xi) = \theta(\xi)x_i + \omega(\xi)x_{i+1} \quad \forall \xi \in [-1, +1], \quad i = 0, \dots, N-1. \end{cases} \quad (4.12)$$

Теорема 4.1 про апостеріорний оцінювач похибки частинами квадратичних апроксимацій МСЕ.

Нехай $\mathfrak{S}_h = \{K_{i+1/2}\}$ – деякий поділ відрізка $[0, L]$ на скінченні елементи $K_{i+1/2} = (x_i, x_{i+1})$, $h_{i+1/2} = x_{i+1} - x_i$, $i = 0, \dots, N-1$, $h := \max h_{i+1/2}$, на кожному з яких обчислено квадратичну апроксимацію u_h вигляду (4.3). Нехай на додаток до цього для оцінки точності знайденої апроксимації використовується частинами визначений апостеріорний оцінювач похибки у вигляді розвинення

$$e_h(x) := \sum_{i=0}^{N-1} e_{i+1/2}(x) \equiv \sum_{i=0}^{N-1} \lambda_{i+1/2} b_{i+1/2}(x), \quad (4.13)$$

де $\text{supp } e_{i+1/2} \equiv \text{supp } b_{i+1/2} := K_{i+1/2} \quad i = 0, \dots, N-1$.

Тоді будуть правильними такі твердження.

1. Коефіцієнти $\lambda_{i+1/2}$ розвинення (4.13) обчислюють за правилами

$$\lambda_{i+1/2} \equiv e_h(x_{i+1/2}) = \frac{7}{2} \left\{ h \frac{4\beta(u_{i+1} - 2u_{i+1/2} + u_i) + h\sigma(u_{i+1} - u_i)}{42\mu + \sigma h^2} \right\}_{i+1/2}. \quad (4.14)$$

2. Норму апостеріорного оцінювача похибки (4.12) та її розподіл між скінченними елементами визначають таким способом:

$$\|e_h\|_V^2 = \sum_{i=0}^{N-1} c_{i+1/2}(e_{i+1/2}, e_{i+1/2}) = \frac{1}{210} \sum_{i=0}^{N-1} \lambda_{i+1/2}^2 \left\{ \frac{1}{h} (42\mu + h^2\sigma) \right\}_{i+1/2}. \quad (4.15)$$

Доведення. З огляду на задачу про апостеріорний оцінювач похибки та класичну схему Гальоркіна її розв'язування, за деталями див. [1], знаходимо, що

$$\lambda_{i+1/2} = \frac{\langle l_{i+1/2}, b \rangle - c_{i+1/2}(u_h, b)}{c_{i+1/2}(b, b)}. \quad (4.16)$$

Зрештою, безпосередні обчислення приводять нас до таких значень складових останнього дробу:

$$\begin{cases} c_{i+1/2}(b, b) = \frac{1}{210} \left\{ \frac{42}{h} \mu + h\sigma \right\}_{i+1/2}, \\ c_{i+1/2}(u_h, b) = -\frac{1}{60} \left\{ 4\beta(u_{i+1} - 2u_{i+1/2} + u_i) + \right. \\ \quad \left. + h\sigma(u_{i+1} - u_i) \right\}_{i+1/2}, \\ \langle l_{i+1/2}, b \rangle = 0. \end{cases} \quad (4.17)$$

5. ЧАСТИНАМИ КУБІЧНІ АПРОКСИМАЦІЇ МСЕ

5.1. Ермітові кубічні поліноми на скінченному елементі

На кожному скінченному елементі виберемо кубічну апроксимацію шуканого розв'язку варіаційної задачі (3.1) у вигляді

$$\begin{cases} u[x(\xi)] \approx u_h(\xi) := \theta^2(\xi)[2\omega(\xi)+1]u_i + h\theta^2(\xi)\omega(\xi)u'_i + \\ \quad + \omega^2(\xi)[2\theta(\xi)+1]u_{i+1} - h\omega^2(\xi)\theta(\xi)u'_{i+1}, \\ x(\xi) = \theta(\xi)x_i + \omega(\xi)x_{i+1} \quad \forall \xi \in [-1, +1], \quad i = 0, \dots, N-1. \end{cases} \quad (5.1)$$

5.2. Основні співвідношення МСЕ на скінченному елементі

Твердження 5.1 про структуру рівнянь МСЕ з кубічною апроксимацією.

Нехай апроксимація u_h розв'язку варіаційної задачі (3.1) відшукуюється методом Гальоркіна з використанням кубічних поліномів Ерміта, які на кожному скінченному елементі поділу вибрано у вигляді (5.1).

Тоді система лінійних алгебричних МСЕ, побудована на скінченному елементі $K_{i+1/2} = (x_i, x_{i+1})$, має таку структуру:

$$\begin{aligned} & \left\{ \frac{\mu}{10h} \begin{bmatrix} 36 & 3h & 3h & -36 \\ 3h & 4h^2 & -h^2 & -3h \\ 3h & -h^2 & 4h^2 & -3h \\ -36 & -3h & -3h & 36 \end{bmatrix} + \frac{\beta}{20} \begin{bmatrix} -30 & 6h & -6h & 30 \\ -6h & 0 & -h^2 & 6h \\ 6h & h^2 & 0 & -6h \\ -30 & -6h & 6h & 30 \end{bmatrix} + \right. \\ & \left. + \frac{\sigma h}{140} \begin{bmatrix} 156 & 22h & -13h & 54 \\ 22h & 4h^2 & -3h^2 & 13h \\ -13h & -3h^2 & 4h^2 & -22h \\ 54 & 13h & -22h & 156 \end{bmatrix} \right\}_{i+1/2} \begin{bmatrix} u_i \\ u'_i \\ u'_{i+1} \\ u_{i+1} \end{bmatrix} = \\ & = \left\{ \frac{fh}{2} \begin{bmatrix} 3 \\ h/2 \\ -h/2 \\ 3 \end{bmatrix} \right\}_{i+1/2} \quad \forall K_{i+1/2}, \quad i = 0, 1, \dots, N-1. \end{aligned} \quad (5.2)$$

Доведення.

Як і раніше, вибираючи в кожному з доданків (4.6) послідовно за допустимі функції множини $\{v_i\}_{m=1}^4 := \{\theta^2(2\omega+1), 2\theta^2\omega, -2\omega^2\theta, \omega^2(2\theta+1)\}$ і підставляючи до них апроксимацію з (5.1), після подібних обчислень одержимо, що

$$\left\{ \int_{x_i}^{x_{i+1}} u_h v_m dx \right\}_{m=1}^4 = \frac{h}{420} \begin{bmatrix} 156 & 22h & -13h & 54 \\ 22h & 4h^2 & -3h^2 & 13h \\ -13h & -3h^2 & 4h^2 & -22h \\ 54 & 22h & -22h & 156 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_i \\ u'_i \\ u'_{i+1} \\ u_{i+1} \end{bmatrix}, \quad (5.3)$$

$$\left\{ \int_{x_i}^{x_{i+1}} u'_h v_m dx \right\}_{m=1}^4 = \frac{1}{60} \begin{bmatrix} -30 & 6h & -6h & 30 \\ -6h & 0 & -h^2 & 6h \\ 6h & h^2 & 0 & -6h \\ -30 & -6h & 6h & 30 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_i \\ u'_i \\ u'_{i+1} \\ u_{i+1} \end{bmatrix}, \quad (5.4)$$

$$\left\{ \int_{x_i}^{x_{i+1}} u'_h v'_m dx \right\}_{m=1}^4 = \frac{1}{30} \frac{1}{h} \begin{bmatrix} 36 & 3h & 3h & -36 \\ 3h & 4h^2 & -h^2 & -3h \\ 3h & -h^2 & 4h^2 & -3h \\ -36 & -3h & -3h & 36 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_i \\ u'_i \\ u'_{i+1} \\ u_{i+1} \end{bmatrix}, \quad (5.5)$$

$$\left\{ \int_{x_i}^{x_{i+1}} f v_m dx \right\}_{m=1}^4 = \frac{h}{12} f_{i+1/2} \begin{bmatrix} 6 \\ h \\ -h \\ 6 \end{bmatrix}. \quad (5.6)$$

5.3. Апостеріорний оцінювач похибок частинами кубічних апроксимацій МСЕ

Оцінювач похибок апроксимацій МСЕ, обчислених з використанням ермітових кубічних поліномів вигляду (5.1), будуватимемо на кожному скінченному елементі з використанням поліномів четвертого порядку, а саме

$$e_h(\xi) := \lambda_{i+1/2} b(\xi) \equiv 16\theta_i^2(\xi)\omega_i^2(\xi)\lambda_{i+1/2} \quad \forall K_{i+1/2}, \quad i = 0, \dots, N-1. \quad (5.7)$$

Теорема 5.1 про апостеріорний оцінювач похибки частинами кубічних апроксимацій МСЕ.

Нехай $\mathfrak{S}_h = \{K_{i+1/2}\}$ – деякий поділ відрізка $[0, L]$ на скінченні елементи $K_{i+1/2} = (x_i, x_{i+1})$, $h_{i+1/2} = x_{i+1} - x_i$, $i = 0, \dots, N-1$, $h := \max h_{i+1/2}$, на кожному з яких обчислено кубічну апроксимацію u_h вигляду (5.1). Нехай на додаток до цього для оцінки точності знайденої апроксимації використовується частинами визначений апостеріорний оцінювач похибки у вигляді розвинення

$$e_h(x) := \sum_{i=0}^{N-1} e_{i+1/2}(x) \equiv \sum_{i=0}^{N-1} \lambda_{i+1/2} b_{i+1/2}(x), \quad (5.8)$$

$$\begin{cases} b_{i+1/2}(\xi) := 16[\omega(\xi)\theta(\xi)]^2 = (1-\xi^2)^2 \\ \text{supp } e_{i+1/2} \equiv \text{supp } b_{i+1/2} := K_{i+1/2} \quad i = 0, \dots, N-1. \end{cases}$$

Тоді будуть правильними такі твердження.

1. Коефіцієнти $\lambda_{i+1/2}$ розвинення (5.7) подають наближені значення похибки апроксимації $u_h(x)$ в центрах ваг кожного скінченного елемента; правило його обчислення набуває вигляду

$$\lambda_{i+1/2} = e_h(x_{i+1/2}) = \frac{\langle l_{i+1/2}, b_{i+1/2} \rangle - c_{i+1/2}(u_h, b_{i+1/2})}{c_{i+1/2}(b_{i+1/2}, b_{i+1/2})}, \quad (5.9)$$

де

$$\left\{ \begin{array}{l} c_{i+1/2}(u_h, b_{i+1/2}) = \frac{2}{105} \left\{ 7(2\sigma h - 3\beta)u_i + h\left(\frac{28}{h}\mu - 4\beta + 3h\sigma\right)u'_i \right. \\ \left. + 7(2\sigma h + 3\beta)u_{i+1} - h\left(\frac{28}{h}\mu - 4\beta + 3h\sigma\right)u'_{i+1} \right\}_{i+1/2}, \\ c_{i+1/2}(b_{i+1/2}, b_{i+1/2}) = \frac{128}{315} \left\{ \frac{4}{h}\mu + h\sigma \right\}_{i+1/2}, \\ \langle l_{i+1/2}, b_{i+1/2} \rangle = \frac{8}{15} \{hf\}_{i+1/2}, \quad i = 0, \dots, N-1. \end{array} \right. \quad (5.10)$$

2. Норму апостеріорного оцінювача похибки (5.7) та її розподіл між скінченними елементами обчислюють так:

$$\|e_h\|_V^2 = \sum_{i=0}^{N-1} c_{i+1/2}(e_{i+1/2}, e_{i+1/2}) = \frac{128}{315} \sum_{i=0}^{N-1} \lambda_{i+1/2}^2 \left\{ \left(4\frac{\mu}{h} + h\sigma \right) \right\}_{i+1/2}. \quad (5.11)$$

6. СТРАТЕГІЯ АДАПТУВАННЯ СІТКИ

Виведені вище вирази для апостеріорних оцінювачів похибки на скінченному елементі ми використовували для побудови рекурсивного алгоритму адаптування розрахункової сітки так, щоб результуюча апроксимація МСЕ була знайдена на кожному скінченному елементі з наперед гарантованою точністю.

Детальніше, ми вибираємо за якість знайденої на сітці $\mathcal{S}_h = \{K_{i+1/2}\}$ частинами визначеної квадратичної або частинами кубічної апроксимації u_h послідовність індикаторів

$$\eta_{i+1/2} := \sqrt{\frac{c_{i+1/2}(e_h, e_h)N}{\|u_h\|_V^2 + \|e_h\|_V^2}} 100\%, \quad i = 0, \dots, N-1. \quad (6.1)$$

Індикатори похибки (6.1) визначають, який відсоток становить норма похибки від середнього значення норми розв'язку на кожному скінченному елементі. Якщо це число більше від заданого допустимого рівня похибки, то скінченний елемент поділяється на два нових додаванням нового вузла сітки в його центр ваги. Коли ж індикатор похибки певного скінченного елемента не перевищує допустимого рівня, то такий елемент без змін входить до нової розрахункової сітки. Процес уточнення апроксимацій МСЕ завершується за умови, що під час перегляду біжучої сітки не відбулося поділу жодного з її скінченних елементів.

7. АНАЛІЗ ЧИСЛОВИХ РЕЗУЛЬТАТІВ

Розглянемо крайову задачу (2.1), (2.2) з такими коефіцієнтами: $\mu = 1$, $\beta(x) = 3000(\frac{2}{3}L - x)$, $\sigma = 0$, $f = 3000$, $\alpha = 100000$, $\bar{u} = 0$. Початкова сітка – рівномірний поділ відрізка на $N_0 = 4$ скінченні елементи, допустимий рівень похибки $\varepsilon = 5\%$. Наближені розв'язки цієї задачі були побудовані описаною вище процедурою h -адаптування з використанням лінійних, квадратичних і кубічних ермітових апроксимацій МСЕ. Скрізь далі вжито такі позначення: m – номер біжучого кроку адаптування; N_m – загальна кількість скінченних елементів поділу \mathcal{S}_h ; p_i – порядок швидкості збіжності схеми МСЕ в середньоквадратичній

нормі $|\cdot|_H$ ($i=0$) та в енергетичній нормі $\|\cdot\|_V$ ($i=1$) відповідно, δ_{\max} – максимальна відносна похибка на біжучій сітці

$$\delta_{\max} = \max_{K_{i+1/2} \in \mathcal{S}_h} \sqrt{\frac{\|e_{i+1/2}\|_V^2 N_m}{\|u_h\|_V^2 + \|e_h\|_V^2}} \times 100\%. \quad (7.1)$$

За допущення, що показники збіжності апроксимацій МСЕ на нерівномірних поділах близькі до апіорних оцінок стосовно параметра дискретизації $h_m := \frac{1}{N_m}$,

їхні порядки швидкості збіжності обчислювали згідно з правилом [3]

$$p := \frac{\ln \|e^0\| - \ln \|e^m\|}{\ln N_m - \ln N_0}, \quad m = 1, 2, \dots, \quad (7.2)$$

де $\|\cdot\|$ – одна з норм $|\cdot|_H$ або $\|\cdot\|_V$.

7.1 *Результати h -адаптування з частинами лінійними апроксимаціями* зображено на рис. 7.1, 7.2 та табл. 7.1. З таблиці добре видно, що перші три кроки адаптування зводяться до рівномірного згущення сіток з подвоєнням кількості їхніх елементів. Головна причина такого поведіння криється у високому рівні похибок наближення, зумовлених наявністю у структурі задачі точки повороту $x = 2L/3$.

Лише після належного пониження рівня похибок з четвертого кроку починається локальне згущення сіток саме в околі точки повороту. Ефективність цієї стратегії виражається у дещо завищених порівняно з передбачуваними теорією порядках збіжності в обох нормах.

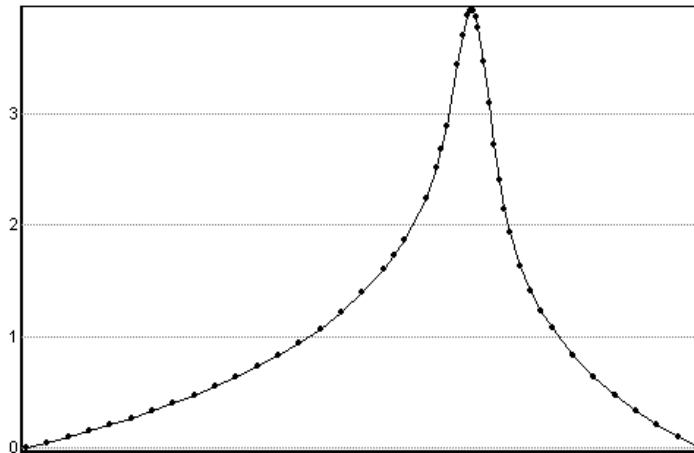


Рис. 7.1. Частинами лінійна апроксимація. Точками відзначено її значення у вузлах знайденого поділу з 47 елементів

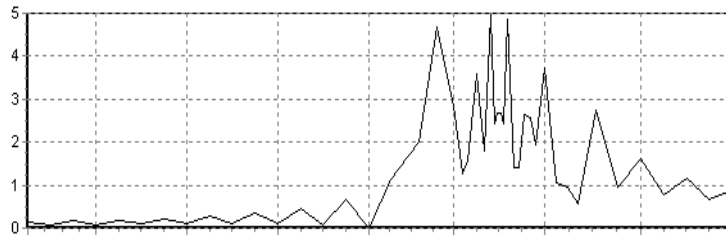


Рис. 7.2. Розподіл відносних похибок частинами лінійної апроксимації на скінченних елементах після останнього кроку алгоритму

Таблиця 7.1

Характеристики покрокової збіжності h -адаптування з частинами лінійними апроксимаціями МСЕ

m	N	$\ e_h\ _V$	$\ u_h\ _V$	p_1	$ e_h _H$	$ u_h _H$	p_0	δ_{\max}
0	4	69.8644	57.6909		1.71475	1.47796		106.98
1	8	84.1026	57.2641	-0.267	1.81804	1.45028	-0.084	118.22
2	16	40.3459	54.7685	0.396	0.633193	1.37752	0.719	60.42
3	32	5.0289	54.7226	1.265	0.046413	1.37488	1.736	39.90
4	37	2.37515	54.7439	1.520	0.014489	1.37594	2.146	18.81
5	44	1.47607	54.7475	1.609	0.007021	1.3763	2.293	9.66
6	47	1.08745	54.7475	1.690	0.005556	1.37637	2.327	4.95

7.2. Результати h -адаптування з частинами квадратичними апроксимаціями показано на рис. 7.3, 7.4 та табл. 7.2. Характер збіжності дуже подібний до попереднього випадку, але з огляду на вищий степінь вжитих поліномів є монотонним і потребує меншої кількості кроків адаптування. Зазначимо також, що на останньому кроці рівень максимальної відносної похибки з 7% зменшився до 2%.

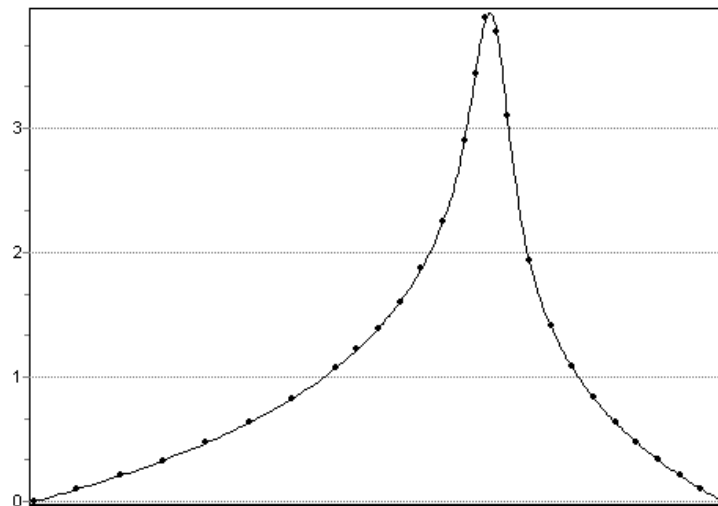


Рис. 7.3. Графік чисельного розв'язку (квадратичні апроксимації, 27 елементів)

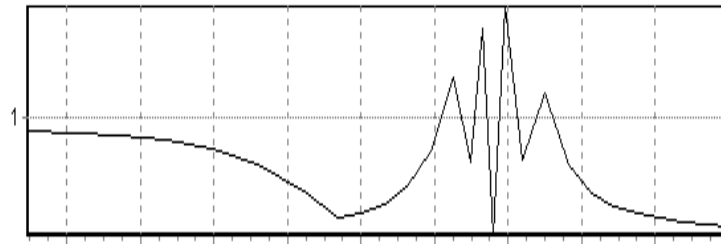


Рис. 7.4. Розподіл відносних похибок частинами квадратичних апроксимацій на скінченних елементах, обчислений після останнього кроку алгоритму

Таблиця 7.2

Характеристики h -адаптивного МСЕ з частинами квадратичними апроксимаціями

m	N	$\ e_h\ _V$	$\ u_h\ _V$	p_1	$ e_h _H$	$ u_h _H$	p_0	δ_{\max}
0	4	89.2692	59.1331		1.91545	1.50004		123.58
1	8	39.7882	54.9451	1.166	0.614825	1.38325	1.639	72.34
2	16	3.37218	54.6502	2.363	0.030465	1.37365	2.987	17.67
3	22	1.98262	54.6967	2.233	0.015793	1.37505	2.815	7.04
4	27	0.42426	54.7219	2.801	0.002306	1.37575	3.521	1.92

7.3 Результати h -адаптування з частинами кубічними апроксимаціями зображено на рис. 7.5, 7.6 та табл. 7.3. Зауважимо, що збільшення порядку поліноміальної апроксимації поряд із зменшенням кількості кроків адаптування приводить до суттєвого зменшення енергетичної норми похибки.

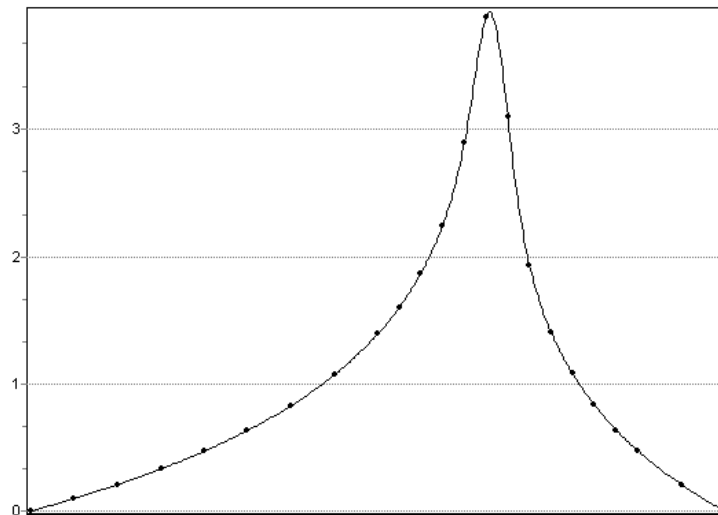


Рис. 7.5. Графік побудованої ермітової апроксимації МСЕ, точками відзначено її величини у вузлах знайденої сітки

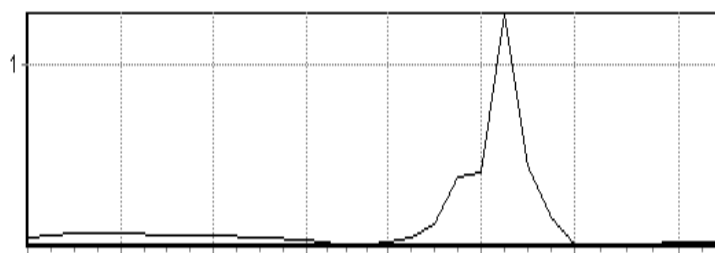


Рис. 7.6. Розподіл відносних похибок ермітових апроксимацій між скінченними елементами після останнього кроку адаптування

Таблиця 7.3

Збіжність характеристик ермітових апроксимацій МСЕ в процесі адаптування

m	N	$\ e_h\ _V$	$\ u_h\ _V$	p_1	$ e_h _H$	$ u_h _H$	p_0	δ_{\max}
0	4	17.2437	58.2447		0.419208	1.48196		51.23
1	6	14.2349	56.1691	0.473	0.331512	1.41588	0.579	36.36
2	12	3.93944	55.0118	1.344	0.071125	1.38339	1.615	9.95
3	22	0.17562	54.7327	2.691	0.001516	1.37604	3.298	1.28

8. ВИСНОВКИ

Ми побудували адаптивні схеми МСЕ для розв'язування лінійних крайових задач зі звичайними диференціальними рівняннями другого порядку. Основу цих схем становить класична процедура Гальоркіна з просторами апроксимацій, що породжуються локально визначеними квадратичними або кубічними базисними функціями на кожному зі скінченних елементів нерівномірних сіток. Враховуючи теорему про середнє для обчислення інтеграла від добутку неперервних функцій сформульовано правила аналітичного обчислення складників системи лінійних алгебричних рівнянь МСЕ на скінченному елементі i в твердженнях 4.1 та 5.1 подано їхні значення, які є точними у випадку частинами постійних даних задачі для квадратичних і кубічних базисних функцій. Зауважимо, що на підставі цих співвідношень із застосуванням конденсації внутрішніх параметрів результуючі матриці кожної системи рівнянь МСЕ можна трансформувати до тридіагонального вигляду, притаманному випадку використання базисних функцій Куранта.

Щоб мати змогу обчислювати апроксимації МСЕ з наперед гарантованою точністю, кожна з запропонованих схем доповнена апостеріорними оцінювачами їхніх похибок, значення енергетичних норм яких обчислюються на кожному скінченному елементі незалежно від решти складових сітки. З огляду на задачу про лишок біжучої апроксимації МСЕ та допущення стосовно її достатньо точних вузлових значень сконструйовані АОП визначаються поліномом третього або четвертого порядків на скінченному елементі, коефіцієнти та норми яких подано у теоремах 4.1 та 5.1.

Зрештою, маючи за мету досягнення рівномірного розподілу норм похибок апроксимації на всіх скінченних елементах, тут запозичено стратегію локального згущення сіток із праць [1].

Апробація обчислювальних властивостей обох вище описаних числових схем засвідчила, що послідовне уточнення апроксимацій МСЕ із вжитою стратегією

локального адаптування сіток здатне монотонно поліпшувати структури шуканих розв'язків із асимптотичними показниками порядків швидкості збіжності їхніх похибок до нульових значень енергетичних норм.

ЛІТЕРАТУРА

1. Абрамов Є., Ліпіна О., Шинкаренко Г., Ямелинець А. Кусково лінійні апроксимації h -адаптивного методу скінченних елементів для одновимірних крайових задач // Вісн. Львів ун-ту. Сер. прикл. матем. інформ. – 2005. – Вип. 11. – С. 3–18.
2. Квасниця Г., Шинкаренко Г. Адаптивні апроксимації методу скінченних елементів для задач еластостатики // Вісн. Львів ун-ту. Сер. прикл. матем. інформ. – 2002. – Вип. 5. – С. 95–106.
3. Квасниця Г., Шинкаренко Г. Порівняння простих апостеріорних оцінювачів похибок методу скінченних елементів для задач еластостатики // Вісн. Львів ун-ту. Сер. прикл. матем. інформ. – 2005. – Вип. 7. – С. 162–174.
4. Козаревська Ю., Шинкаренко Г. Регуляризація чисельних розв'язків варіаційних задач міграції домішок: h -адаптивний метод скінченних елементів. Частина 1. // Вісник Львів. ун-ту. Сер. прикл. мат. інформ. – 2002. – Вип. 5. – С. 153–164.
5. Ainsworth M., Oden J.T. A Posteriori Error Estimation in Finite Element Analysis. – New York: John Wiley & Sons, 2000.
6. Bangerth W., Rannacher R. Adaptive Finite Element Methods for Differential Equations. – Basel: Birkhauser, 2003.
7. Stynes M. Steady-state convection-diffusion problems // Acta Numerica. – 2005. – P. 445–508.
8. Verfurth R. A review of a posteriori error estimation and adaptive mesh-refinement technique. – Stuttgart: Wiley-Teubner, 1996.
9. Zienkiewicz, O.C., Taylor, R.L. The Finite Element Method, Vol. 1: The Basis, fifth ed., Butterworth-Heinemann. – Oxford, 2000.

КВАДРАТИЧЕСКИЕ И КУБИЧЕСКИЕ АППРОКСИМАЦИИ h – АДАПТИВНОГО МКЭ В ОДНОМЕРНЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧАХ

Є. Абрамов*, Г. Квасниця*, Г. Шинкаренко**

*Львовский национальный университет имени Ивана Франко,
ул. Университетская, 1, Львов, 79000, e-mail: gashynk@lnu.edu.ua
**Политехника Опольская, ул. Любошицкая, 5, Ополе, 45043, Польша
e-mail: h.shynkarenko@po.opole.pl

Для краевых задач с линейными дифференциальными уравнениями второго порядка построены h -адаптивные схемы метода конечных элементов (МКЭ) с использованием кусочно квадратических и кусочно кубических аппроксимаций решения. Приводятся результаты аналитических вычислений составляющих системы линейных алгебраических уравнений МКЭ с такими приближениями на конечных элементах. Основное внимание уделяется построению кусочно полиномиальных апостериорных оценщиков погрешностей принятых выше аппроксимаций, приводятся выражения для вычисления распределений их энергетических норм на конечных элементах, которые в конечном итоге ложатся в основу системы адаптации сеток с целью отыскания приближений с наперед заданной точностью. Эффективность разработанных адаптивных схем иллюстрируется анализом числовых решений модельной сингулярно возмущенной краевой задачи.

Ключевые слова: вариационная задача, неравномерная сетка, метод конечных элементов, квадратические и кубические аппроксимации Эрмита, апостериорная оценка погрешности, критерий адаптации сетки, гарантированная точность вычисления аппроксимаций.

***h*—ADAPTIVE FINITE ELEMENTS METHOD WITH PIECEWISE QUADRATIC AND CUBIC APPROXIMATIONS FOR ONE-DIMENSIONAL BOUNDARY VALUE PROBLEMS**

Y. Abramov^{*}, H. Kvasnytsya^{*}, H. Shynkarenko^{*,}**

^{}Ivan Franko National University of Lviv,
Universytetska str, 1, Lviv, 79000, e-mail: gashynk@lmu.edu.ua*

*^{**}Politechnika Opolska, Luboszycka 5, Opole, 45036, Polska,
e-mail: h.shynkarenko@po.opole.pl*

This article considers the construction of *h*-adaptive finite element method (FEM) scheme for boundary value problems with second degree linear differential equation, with the use of piecewise quadratic and piecewise cubic solution approximations. Analytical calculation results are given for the components of FEM system of algebraic equations with such approximations on finite element. The main attention is paid to the construction of piecewise polynomial a posteriori error estimators of the above approximations, the expressions are given for calculating the distribution of their energy norm among finite elements. These expressions form a basis of mesh refinement algorithm used for finding solution approximations with a priori set accuracy. The effectiveness of the suggested adaptive schemes is illustrated through the numerical solution analysis for a model singular perturbed boundary value problem.

Key words: variational problem, irregular mesh, finite element method, quadratic and Hermit's cubic approximations, a posteriori error estimator, mesh refinement criterion, guaranteed approximation accuracy.

Стаття надійшла до редколегії 18.02.2010

Прийнята до друку 26.01.2011