ВІСНИК ЛЬВІВ. УН-ТУ *VISNYK LVIV UNIV.*
Серія прикл. матем. інформ. *Ser. Appl. Math. Inform.*
2011. Вип. 17. С. 10–21 *2011. Is. 17. P. 10–21*

УДК 519.62

ТРИТОЧКОВІ РІЗНИЦЕВІ СХЕМИ ВИСОКОГО ПОРЯДКУ ТОЧНОСТІ ДЛЯ НЕЛІНІЙНИХ ЗВИЧАЙНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ДРУГОГО ПОРЯДКУ НА ПІВОСІ

М. Кутнів, О. Паздрій

Національний університет "Львівська політехніка",
вул. С. Бандери, 12, Львів, 79013, e-mail: oksanapazdriy@gmail.com

Розроблено алгоритмічну реалізацію точної триточкової різницевої схеми розв'язування нелінійної крайової задачі на півосі через триточкові різницеві схеми рангу $\overline{n} = 2[(n+1)/2]$ ($[\cdot]$ – ціла частина). Доведено існування та єдиність розв'язку триточкових різницевих схем рангу $\overline{n}$ та отримано оцінку їхньої точності.

Ключові слова: нелінійні звичайні диференціальні рівняння, крайова задача, триточкова різницева схема.

1. ВСТУП

Розглянемо нелінійну крайову задачу

$$\frac{d^2u}{dx^2} + m^2\frac{du}{dx} = -f(x,u), \quad x \in (0,\infty), \quad m = const > 0, \tag{1}$$

$$u(0) = \mu_1, \quad \lim_{x\to\infty} u(x) = 0, \tag{2}$$

за умов

$$f_u(x) \equiv f(x,u) \in Q^0[0,\infty), \left|f(x,u)\right| \le K(x) \in L_1[0,\infty) \; \forall x \in [0,\infty), u \in \Omega([0,\infty),r), \tag{3}$$

$$r = \max\left\{\frac{1}{m^2},1\right\}\int_0^\infty K(\xi)d\xi, \quad \lim_{x\to\infty}\exp(-m^2x)\int_0^x \exp(m^2\xi)K(\xi)d\xi = 0, \tag{4}$$

$$\left|f(x,u) - f(x,v)\right| \le L(x)\left|u - v\right| \quad \forall x \in [0,\infty), u,v \in \Omega([0,\infty),r), \tag{5}$$

$$L(x) \in L_1[0,\infty), \quad q = \max\left\{\frac{1}{m^2},1\right\}\int_0^\infty L(\xi)d\xi < 1, \tag{6}$$

де $Q^0[0,\infty)$ – клас кусково-неперервних функцій зі скінченною кількістю точок розриву першого роду; Ω – множина функцій

$$\Omega(D,\beta) = \left\{ u(x) : u(x) \in C^1[0,\infty), \; \left\|u - u^{(0)}\right\|_{1,\infty,D} \le \beta, \, D \subseteq [0,\infty)\right\},$$

$$\left\|u\right\|_{1,\infty,D} = \max\left\{\left\|u\right\|_{0,\infty,D}, \left\|\frac{du}{dx}\right\|_{0,\infty,D}\right\}, \quad \left\|u\right\|_{0,\infty,D} = \max_{x\in D}\left|u(x)\right|.$$

Зауважимо, що умови (3)–(6) є достатніми умовами існування та єдиності розв'язку задачі (1), (2).

Для нелінійних диференціальних рівнянь другого порядку з крайовими умовами першого роду на скінченному проміжку точну триточкову різницеву схему (ТТРС) та її алгоритмічну реалізацію через триточкові різницеві схеми (ТРС) високого порядку точності побудовано в [1,2]. У працях [3,4] для нелінійних диференціальних рівнянь

$$\frac{d^2u}{dx^2} - m^2 u = -f(x,u), \quad x \in (0,\infty), \quad m = const > 0,$$

з крайовими умовами (2) розроблено та обґрунтовано ТРС порядку точності $\overline{n}$.

У цій праці побудовано та обґрунтовано алгоритмічну реалізацію ТТРС, отриману в [5], для задачі (1), (2).

2. ТОЧНА ТРИТОЧКОВА РІЗНИЦЕВА СХЕМА

На інтервалі $[0,\infty)$ згідно з [3] введемо нерівномірну сітку $\hat{\overline{\omega}}_N = \left\{x_j \in [0,\infty),\ j = 0,1,\dots,N,\ x_0 = 0,\ h_j = x_j - x_{j-1} > 0,\ h_1 + h_2 + \dots + h_N = x_N\right\}$ так, щоб точки розриву функції $f(x,u)$ збігалися з вузлами сітки. Множину всіх точок розриву позначимо через ρ і будемо вважати, що N таке, що $\rho \subseteq \hat{\omega}_N$. На кроки h_j сітки $\hat{\overline{\omega}}_N$ накладемо такі обмеження $c_1 \le h_{\max}/h_{\min} \le c_2$, де c_1, c_2 – дійсні сталі. Для досягнення максимального порядку збіжності різницевої схеми треба, щоб $1/h_{\max} \le x_N \le 1/h_{\min}$. Звідси випливають нерівності $h_{\max} \le c_2/\sqrt{N}$, $h_{\min} \ge 1/c_2\sqrt{N}$, $\sqrt{N}/c_2 \le h_{\min} N \le x_N \le h_{\max} N \le c_2\sqrt{N}$. Отже, $h_{\max} \to 0,\ x_N \to \infty$ при $N \to \infty$.

ТТРС для задачі (1), (2) набуває вигляду

$$\left(a u_{\bar{x}}\right)_{\hat{x},j} = -\varphi(x_j,u),\ j = 1,2,\dots,N-1, \quad u_0 = \mu_1,\ -a_N u_{\bar{x},N} = \beta_2 u_N - \mu_2(x_N,u), \tag{7}$$

де

$$a_j = \frac{m^2 h_j}{\exp(-m^2 x_{j-1}) - \exp(-m^2 x_j)},\ j = 1,2,\dots,N,\ \beta_2 = m^2 \exp(m^2 x_N),$$

$$\varphi(x_j,u) = \frac{1}{\hbar_j}\Bigg[\exp(m^2 x_j)\left(Z_2^j(x_j,u) - Z_1^j(x_j,u)\right) + \frac{m^2\left(Y_1^j(x_j,u) - u_{j-1}\right)}{\exp(-m^2 x_{j-1}) - \exp(-m^2 x_j)} +$$

$$+ \frac{m^2\left(Y_2^j(x_j,u) - u_{j+1}\right)}{\exp(-m^2 x_j) - \exp(-m^2 x_{j+1})}\Bigg], \quad j = 1,2,\dots,N-1,$$

$$\mu_2(x_N,u) = \exp(m^2 x_N)\left(Z_2^N(x_N,u) - Z_1^N(x_N,u)\right) + m^2 \exp(m^2 x_N) Y_2^N(x_N,u) +$$

$$+ \frac{m^2\left(Y_1^N(x_N,u) - u_{N-1}\right)}{\exp(-m^2 x_{N-1}) - \exp(-m^2 x_N)},$$

а функції Y_α^j, Z_α^j є розв'язками задач Коші

$$\begin{gathered}\frac{dY_\alpha^j(x,u)}{dx} = Z_\alpha^j(x,u),\ \frac{dZ_\alpha^j(x,u)}{dx} + m^2 Z_\alpha^j(x,u) = -f\left(x, Y_\alpha^j(x,u)\right),\ x_{j-2+\alpha} < x < x_{j-1+\alpha},\\ Y_\alpha^j(x_{j+(-1)^\alpha},u) = u_{j+(-1)^\alpha},\ Z_\alpha^j(x_{j+(-1)^\alpha},u) = \left.\frac{du}{dx}\right|_{x = x_{j+(-1)^\alpha}},\ j = 2-\alpha,\dots,N+1-\alpha,\ \alpha = 1,2,\end{gathered} \tag{8}$$

Y_2^N, Z_2^N – розв'язок крайової задачі

$$\frac{dY_2^N(x,u)}{dx}=Z_2^N(x,u),\quad \frac{dZ_2^N(x,u)}{dx}+m^2Z_2^N(x,u)=-f\left(x,Y_2^N(x,u)\right),\quad x>x_N,$$
$$Y_2^N(x_N,u)=u(x_N),\quad \lim_{x\to\infty}Y_2^N(x,u)=0. \tag{9}$$

Отже, для побудови ТТРС (7) необхідно для $\forall x_j\in\hat{\omega}_N$ розв'язати дві задачі Коші (8) та крайову задачу (9).

3. ТРИТОЧКОВІ РІЗНИЦЕВІ СХЕМИ РАНГУ $\overline{n}$

Для побудови ТРС рангу $\overline{n}$ задачі Коші (8) будемо розв'язувати чисельно за допомогою однокрокового методу (розвинення в ряд Тейлора або Рунге – Кутта)

$$Y_\alpha^{(\overline{n})j}(x_j,u)=u_{j+(-1)^\alpha}+(-1)^{\alpha+1}h_{j-1+\alpha}\Phi_1(x_{j+(-1)^\alpha},u_{j+(-1)^\alpha},u'_{j+(-1)^\alpha},(-1)^{\alpha+1}h_{j-1+\alpha}),$$
$$Z_\alpha^{(n)j}(x_j,u)=u'_{j+(-1)^\alpha}+(-1)^{\alpha+1}h_{j-1+\alpha}\Phi_2(x_{j+(-1)^\alpha},u_{j+(-1)^\alpha},u'_{j+(-1)^\alpha},(-1)^{\alpha+1}h_{j-1+\alpha}), \tag{10}$$

де $\Phi_1\left(x,u,y,h\right),\Phi_2\left(x,u,y,h\right)$ – функції приросту. Значення наближеного розв'язку $Z_\alpha^{(n)j}(x_j,u)$ апроксимує значення $Z_\alpha^j(x_j,u)$ з порядком точності не менше n, $Y_\alpha^{(\overline{n})j}(x_j,u)$ апроксимує $Y_\alpha^j(x_j,u)$ з порядком точності $\overline{n}=2[(n+1)/2]$ ($[\cdot]$– ціла частина). Якщо права частина диференціального рівняння диференційована достатню кількість разів, то існують розвинення

$$Y_\alpha^j(x_j,u)=Y_\alpha^{(\overline{n})j}(x_j,u)+\psi_\alpha^j(x_{j+(-1)^\alpha},u)[(-1)^{\alpha+1}h_{j-1+\alpha}]^{\overline{n}+1}+O(h_{j-1+\alpha}^{\overline{n}+2}), \tag{11}$$

$$Z_\alpha^j(x_j,u)=Z_\alpha^{(n)j}(x_j,u)+\tilde{\psi}_\alpha^j(x_{j+(-1)^\alpha},u)[(-1)^{\alpha+1}h_{j-1+\alpha}]^{n+1}+O(h_{j-1+\alpha}^{n+2}). \tag{12}$$

Знайдемо наближений розв'язок задачі (9). Зробимо припущення:

(PI) $f(x,u)$ – аналітична в околі точки $(\infty,0)$;

(PII) $\lim\limits_{x\to\infty}f'_u(x,0)=0$.

Подамо точний розв'язок задачі (9) у вигляді

$$Y_2^N(x,u)=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{A_i}{x^i}+r(x),\quad Z_2^N(x,u)=-\sum_{i=1}^{\infty}\frac{iA_i}{x^{i+1}}+r'(x).$$

Тут $r(x)\in C^\infty[x_N,\infty)$ і $\lim\limits_{x\to\infty}x^kr(x)=0,\quad k=1,2,\ldots$. Після підстановки в (9) отримаємо

$$F(x,\{A\})=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{i(i+1)A_i}{x^{i+2}}-m^2\sum_{i=1}^{\infty}\frac{iA_i}{x^{i+1}}+f\left(x,\sum_{i=1}^{\infty}\frac{A_i}{x^i}+r(x)\right)+r''(x)+m^2r'(x)=0,$$

де $\{A\}=A_1,A_2,\ldots$ Зробимо заміну $t=1/x$ і введемо позначення $\tilde{F}(t,\{A\})=F\left(1/t,\{A\}\right)$. Тоді, враховуючи умови накладені на функцію $f(x,u)$, для визначення коефіцієнтів $A_i,\ i=1,2,\ldots$ одержимо явну рекурентну систему рівнянь

$$\left.\frac{d^k\tilde{F}(t,\{A\})}{dt^k}\right|_{t=0}=0,\quad k=1,2,\ldots \tag{13}$$

Зазначимо, що у випадку автономного диференціального рівняння (1) система (13) матиме лише нульові розв'язки.

Наближений розв'язок задачі (9) будемо шукати у вигляді

$$Y_2^{(\overline{n}-1)N}(x,u)=\frac{A_1}{x}+\frac{A_2}{x^2}+\ldots+\frac{A_{\overline{n}-1}}{x^{\overline{n}-1}},\quad Z_2^{(\overline{n}-1)N}(x,u)=-\frac{A_1}{x^2}-\frac{2A_2}{x^3}-\ldots-\frac{(\overline{n}-2)A_{\overline{n}-2}}{x^{\overline{n}-1}}.\quad (14)$$

Коефіцієнти $A_1, A_2, ..., A_{\overline{n}-1}$ послідовно знаходимо з (13). Зазначимо, що може виникнути два випадки. Перший – всі $A_1, A_2, ..., A_{\overline{n}-1}$ дорівнюють нулю. Тоді

$$Y_2^{(\overline{n}-1)N}(x,u)\equiv 0,\quad Z_2^{(\overline{n}-1)N}(x,u)\equiv 0.$$

Другий – хоча б один з коефіцієнтів $A_1, A_2, ..., A_{\overline{n}-1}$ не дорівнює нулю. Для цього необхідно і достатньо, щоб

$$f(x,0)=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{f_i}{x^i},\quad \sum_{i=1}^{\infty}\left|f_i\right|^2\neq 0.$$

Тоді наближений розв’язок набуде вигляду (14).

Справlжується твердження.

Лема 1. *Нехай*

$$f(x,u)\in\bigcup_{j=1}^{N}C^{n+1}\left([x_{j-1},x_j]\times\Omega([0,\infty),r+\Delta)\right)\bigcup C^{n+1}\left([x_N,\infty)\times\Omega([0,\infty),r+\Delta)\right),$$

виконуються припущення (PI), (PII), і для чисельного методу (10) існують розвинення (11), (12), тоді справджуються співвідношення

$$Y_\alpha^j(x_j,u)=Y_\alpha^{(\overline{n})j}(x_j,u)+(-1)^{\alpha+1}\psi_1^{j-1+\alpha}(x_{j+(-1)^\alpha},u)h_{j-1+\alpha}^{\overline{n}+1}+O(h_{j-1+\alpha}^{\overline{n}+2}),$$

$$Z_\alpha^j(x_j,u)=Z_\alpha^{(n)j}(x_j,u)+\tilde{\psi}_1^{j-1+\alpha}(x_{j+(-1)^\alpha},u)[(-1)^{\alpha+1}h_{j-1+\alpha}]^{n+1}+O(h_{j-1+\alpha}^{n+2}),$$

$$Y_2^N(x_N,u)=Y_2^{(\overline{n}-1)N}(x_N,u)+O\left(\frac{1}{x_N}\right)^{\overline{n}},\quad Z_2^N(x_N,u)=Z_2^{(\overline{n}-1)N}(x_N,u)+O\left(\frac{1}{x_N}\right)^{\overline{n}}.$$

Доведення аналогічне як у [3].

Замість ТТРС (7) можна тепер скористатися відсіченою ТРС $\overline{n}$ –го рангу вигляду

$$\begin{gathered}(ay_{\overline{x}}^{(\overline{n})})_{\hat{x},j}=-\varphi^{(\overline{n})}(x_j,y^{(\overline{n})}),\quad j=1,2,...,N-1,\\ y_0^{(\overline{n})}=\mu_1,\quad -a(x_N)y_{\overline{x},N}^{(\overline{n})}=\beta_2y_N^{(\overline{n})}-\mu_2^{(\overline{n})}(x_N,y^{(\overline{n})}),\end{gathered}\quad (15)$$

$$\varphi^{(\overline{n})}(x_j,u)=\frac{1}{\hbar_j}\Bigg[\exp(m^2x_j)\left(Z_2^{(n)j}(x_j,u)-Z_1^{(n)j}(x_j,u)\right)+$$
$$+\frac{m^2\left(Y_1^{(\overline{n})j}(x_j,u)-u_{j-1}\right)}{\exp(-m^2x_{j-1})-\exp(-m^2x_j)}+\frac{m^2\left(Y_2^{(\overline{n})j}(x_j,u)-u_{j+1}\right)}{\exp(-m^2x_j)-\exp(-m^2x_{j+1})}\Bigg],$$

$$\begin{gathered}\mu_2^{(\overline{n})}(x_N,u)=\left(\frac{m^2A_1}{x_N}+\frac{m^2A_2-A_1}{x_N^2}+\ldots+\frac{m^2A_{\overline{n}-1}-(\overline{n}-2)A_{\overline{n}-2}}{x_N^{\overline{n}-1}}\right)\exp(m^2x_N)-\\ -Z_1^{(n)N}(x_N,u)\exp(m^2x_N)+\frac{m^2\left(Y_1^{(\overline{n})N}(x_N,u)-u_{N-1}\right)}{\exp(-m^2x_{N-1})-\exp(-m^2x_N)},\end{gathered}\quad (16)$$

якщо хоча б один з коефіцієнтів $A_i, i=1,2,...,\overline{n}-1$ відмінний від нуля,

$$\mu_2^{(\overline{n})}(x_N,u)=-Z_1^{(n)N}(x_N,u)\exp(m^2x_N)+\frac{m^2\left(Y_1^{(\overline{n})N}(x_N,u)-u_{N-1}\right)}{\exp(-m^2x_{N-1})-\exp(-m^2x_N)},$$

якщо $A_i = 0, i = 1, 2, ..., \overline{n} - 1$. Для доведення існування та єдиності розв'язку ТРС (15), а також для визначення її точності потрібне твердження.

Лема 2. *Нехай виконані умови леми 1; тоді будуть справджуватися оцінки*

$$\varphi^{(\overline{n})}(x_j, u) - \varphi(x_j, u) = \left\{ h_j^{n+1} \left[\frac{m^2 h_j \, \psi_1^j(x,u)\big|_{x=x_j+0}}{\exp(-m^2 x_{j-1}) - \exp(-m^2 x_j)} - \right.\right.$$
$$\left.\left. - \exp(m^2 x_j) \tilde{\psi}_1^j(x,u)\big|_{x=x_j+0} \right]\right\}_{\hat{x}} + O\left(\frac{h_j^{n+2} + h_{j+1}^{n+2}}{\hbar_j} \right), \tag{17}$$

якщо n *непарне,*

$$\varphi^{(\overline{n})}(x_j, u) - \varphi(x_j, u) = \left\{ h_j^n \frac{m^2 h_j \, \psi_1^j(x,u)\big|_{x=x_j+0}}{\exp(-m^2 x_{j-1}) - \exp(-m^2 x_j)} \right\}_{\hat{x}} + O\left(\frac{h_j^{n+1} + h_{j+1}^{n+1}}{\hbar_j} \right), \tag{18}$$

якщо n *парне,*

$$\left| \mu_2^{(\overline{n})}(x_N, u) - \mu_2(x_N, u) \right| \le M \left(\max\left\{ |h|^{\overline{n}}, \left(\frac{1}{x_N} \right)^{\overline{n}} \right\} \right), \quad N \to \infty,$$

$$\left| \varphi^{(\overline{n})}(x_j, u) \right| \le K(x_j) + M|h| \quad \forall u \in \Omega(\hat{\overline{\omega}}_N, r + \Delta), \tag{19}$$

$$\left| \varphi^{(\overline{n})}(x_j, u) - \varphi^{(\overline{n})}(x_j, v) \right| \le \left(L(x_j) + M|h| \right) \|u - v\|_{1,\infty,\hat{\omega}_N^+} \quad \forall u, v \in \Omega(\hat{\overline{\omega}}_N, r + \Delta), \tag{20}$$

$$\left| \mu_2^{(\overline{n})}(x_N, u) \right| \le K(x_N) + M \max\left\{ |h|, \left(\frac{1}{x_N} \right) \right\} \quad \forall u \in \Omega(\hat{\overline{\omega}}_N, r + \Delta), \quad N \to \infty, \tag{21}$$

$$\left| \mu_2^{(\overline{n})}(x_N, u) - \mu_2^{(\overline{n})}(x_N, v) \right| \le \left(L(x_N) + M \max\left\{ |h|, \frac{1}{x_N} \right\} \right) \|u - v\|_{0,\infty,\hat{\omega}_N^+}$$
$$\forall v, u \in \Omega(\hat{\overline{\omega}}_N, r + \Delta), \quad N \to \infty \tag{22}$$

де стала M *не залежить від* $|h|$.

Доведення аналогічне як у [3].

На підставі попередніх тверджень доведемо теорему.

Теорема 1. *Нехай виконуються умови (3)–(6), леми 1 і функції* $K(x), L(x)$ *– монотонно спадні. Тоді* $\exists N_0 > 0$ *таке, що при* $N \ge N_0$ *ТРС (15) має єдиний розв'язок, точність якого характеризується оцінкою*

$$\left\| y^{(\overline{n})} - u \right\|_{1,\infty,\hat{\overline{\omega}}_N}^* = \max\left\{ \left\| y^{(\overline{n})} - u \right\|_{0,\infty,\hat{\overline{\omega}}_N}, \left\| \frac{dy^{(\overline{n})}}{dx} - \frac{du}{dx} \right\|_{0,\infty,\hat{\overline{\omega}}_N} \right\} \le M \max\left\{ |h|^{\overline{n}}, \left(\frac{1}{x_N} \right)^{\overline{n}} \right\} \le M N^{-\overline{n}/2},$$

де

$$\frac{dy^{(\overline{n})}(x_0)}{dx} = Z_2^{(n)0}(x_0, y^{(\overline{n})}) + \frac{m^2 (Y_2^{(\overline{n})0}(x_0, y^{(\overline{n})}) - y_0^{(\overline{n})})}{1 - \exp(-m^2 h_1)},$$

$$\frac{dy^{(\bar n)}(x_j)}{dx} = Z_1^{(n)j}(x_j, y^{(\bar n)}) + \frac{m^2(y_j^{(\bar n)} - Y_1^{(\bar n)j}(x_j, y^{(\bar n)}))}{\exp(m^2 h_j) - 1}, \quad j = 1, 2, ..., N,$$

сталі M *не залежать від* $|h|, 1/x_N$.

Доведення. Покажемо, що за умов теореми ТРС $\bar n$ –го рангу (15) має єдиний розв'язок $y_i^{(\bar n)}, i = 1, 2, ..., N$. Використаємо принцип стискувальних відображень. Розглянемо операторне рівняння

$$y_i^{(\bar n)} = \Re_h(x_i, y^{(\bar n)}) = \sum_{j=1}^{N-1} \hbar_j \tilde G(x_i, x_j) \varphi^{(\bar n)}(x_j, y^{(\bar n)}) + \mu^{(\bar n)}(x_N, y^{(\bar n)}) \tilde G(x_i, x_N) + u^{(0)}(x_i),$$

$$\tilde G(x, \xi) = \begin{cases} \dfrac{1 - \exp(-m^2 x)}{m^2} \exp(-m^2 \xi), & 0 \le x \le \xi, \\ \dfrac{1 - \exp(-m^2 \xi)}{m^2} \exp(-m^2 x), & x \ge \xi. \end{cases}$$

Оскільки $K(x), L(x)$ – монотонно спадні, то

$$\sum_{j=1}^{N-1} \hbar_j K(x_j) \tilde G(x_i, x_j) + K(x_N) \tilde G(x_i, x_N) = \frac{\exp(-m^2 x_i)}{2m^2} \sum_{j=1}^{i} h_j \left(1 - \exp(-m^2 x_j)\right) K(x_j) +$$

$$+ \frac{\exp(-m^2 x_i)}{2m^2} \sum_{j=1}^{i} h_{j+1} \left(1 - \exp(-m^2 x_j)\right) K(x_j) + \frac{1 - \exp(-m^2 x_i)}{2m^2} \sum_{j=i+1}^{N-1} h_j \exp(-m^2 x_j) K(x_j) +$$

$$+ \frac{1 - \exp(-m^2 x_i)}{2m^2} \sum_{j=i+1}^{N-1} h_{j+1} \exp(-m^2 x_j) K(x_j) + \frac{1 - \exp(-m^2 x_i)}{m^2} \exp(-m^2 x_N) K(x_N) \le$$

$$\le \frac{\exp(-m^2 x_i)}{2m^2} \left(1 - \exp(-m^2 x_i)\right) \left(\sum_{j=1}^{i} h_j K(x_j) + \sum_{j=1}^{i} h_{j+1} K(x_j) \right) +$$

$$+ \frac{1 - \exp(-m^2 x_i)}{2m^2} \exp(-m^2 x_i) \left(\sum_{j=i+1}^{N-1} h_j K(x_j) + \sum_{j=i+1}^{N-1} h_{j+1} K(x_j) \right) +$$

$$+ \frac{1 - \exp(-m^2 x_i)}{m^2} \exp(-m^2 x_N) K(x_N) \le \frac{\exp(-m^2 x_i)\left(1 - \exp(-m^2 x_i)\right)}{m^2} \int_0^\infty K(\eta) d\eta + M_1 |h|,$$

$$\sum_{j=1}^{N-1} \hbar_j K(x_j) \tilde G_{\bar x}(x_i, x_j) + K(x_N) \tilde G_{\bar x}(x_i, x_N) \le \exp(-m^2 x_i) \int_0^\infty K(\eta) d\eta + M_1 |h|.$$

Тоді на підставі (19), (21) отримаємо

$$\left\| \Re_h(x, v) - u^{(0)}(x) \right\|_{1,\infty,\hat{\bar\omega}_N} \le \left\| \frac{\exp(-m^2 x_i)\left(1 - \exp(-m^2 x_i)\right)}{m^2} \int_0^\infty K(\eta) d\eta + \right.$$

$$\left. + M_1 \max\left\{ |h|, \frac{1}{x_N} \right\} \right\|_{1,\infty,\hat{\bar\omega}_N} \le r + M_1 \max\left\{ |h|, \frac{1}{x_N} \right\} \le r + \Delta \quad \forall v \in \Omega(\hat{\bar\omega}_N, r + \Delta),$$

тобто оператор $\Re_h(x, v)$ переводить $\Omega(\hat{\bar\omega}_N, r + \Delta)$ в себе.

Крім того, враховуючи нерівності (20), (22),

$$\left\|\Re_h(x,u)-\Re_h(x,v)\right\|_{1,\infty,\hat{\bar{\omega}}_N} \le \left\| \frac{\exp(-m^2x_i)\left(1-\exp(-m^2x_i)\right)}{m^2}\int\limits_0^\infty L(\eta)d\eta + \right.$$

$$\left. +M_1\max\left\{|h|,\frac{1}{x_N}\right\}\right\|_{1,\infty,\hat{\bar{\omega}}_N} \|u-v\|_{1,\infty,\hat{\bar{\omega}}_N} \le q_2\|u-v\|_{1,\infty,\hat{\bar{\omega}}_N} \quad \forall u,v\in\Omega(\hat{\bar{\omega}}_N,r).$$

Якщо вибрати N_0 так, що $q_2=\max\left\{\frac{1}{m^2},1\right\}\int\limits_0^\infty L(\eta)d\eta + M\max\left\{|h|,\frac{1}{x_N}\right\}<1$, то відображення $\Re_h(x,u)$ стискувальне.

Для похибки $z_j=y_j^{(\bar{n})}-u(x_j),\ j=0,1,...,N$ отримаємо задачу

$$(az_{\bar{x}})_{\hat{x},j}=\varphi(x_j,u)-\varphi^{(\bar{n})}(x_j,y^{(\bar{n})}),\quad j=1,2,...,N-1,$$

$$z_0=0,\quad -a(x_N)z_{\bar{x},N}=\beta_2z_N+\mu_2(x_N,u)-\mu_2^{(\bar{n})}(x_N,y^{(\bar{n})}),$$

розв'язок якої і його різницеву похідну за допомогою функції Гріна можна подати у вигляді

$$z_i=\sum_{j=1}^{N-1}\hbar_j\tilde{G}(x_i,x_j)\left\{\varphi(x_j,u)-\varphi^{(\bar{n})}(x_j,y^{(\bar{n})})\right\}+ \\ +\tilde{G}(x_i,x_N)\left[\mu_2(x_N,u)-\mu_2^{(\bar{n})}(x_N,y^{(\bar{n})})\right],\quad i=1,2,...,N, \tag{23}$$

$$z_{\bar{x},i}=\sum_{j=1}^{N-1}\hbar_j\tilde{G}_{\bar{x}}(x_i,x_j)\left\{\varphi(x_j,u)-\varphi^{(\bar{n})}(x_j,y^{(\bar{n})})\right\}+ \\ +\tilde{G}_{\bar{x}}(x_i,x_N)\left[\mu_2(x_N,u)-\mu_2^{(\bar{n})}(x_N,y^{(\bar{n})})\right],\quad i=1,2,...,N. \tag{24}$$

Для непарного n з урахуванням (17), з (23), (24) одержимо

$$z_i=-\sum_{j=1}^{N}h_j\tilde{G}_{\bar{\xi}}(x_i,x_j)\left\{h_j^{n+1}\left[\frac{m^2h_j}{\exp(-m^2x_{j-1})-\exp(-m^2x_j)}\psi_1^j(x,u)\Big|_{x=x_j+0}-\right.\right.$$

$$\left.\left.-\exp(m^2x_j)\tilde{\psi}_1^j(x,u)\Big|_{x=x_j+0}\right]\right\}+\sum_{j=1}^{N-1}\hbar_j\tilde{G}(x_i,x_j)\left[\varphi^{(\bar{n})}(x_j,u)-\varphi^{(\bar{n})}(x_j,y^{(\bar{n})})+O(|h|^{n+1})\right]+$$

$$+\tilde{G}(x_i,x_N)\left[\mu_2(x_N,u)-\mu_2^{(\bar{n})}(x_N,u)\right]+\tilde{G}(x_i,x_N)\left[\mu_2^{(\bar{n})}(x_N,u)-\mu_2^{(\bar{n})}(x_N,y^{(\bar{n})})\right],$$

$$z_{\bar{x},i}=-\sum_{j=1}^{N}h_j\tilde{G}_{\bar{x}\bar{\xi}}(x_i,x_j)\times$$

$$\times\left\{h_j^{n+1}\left[\frac{m^2h_j}{\exp(-m^2x_{j-1})-\exp(-m^2x_j)}\psi_1^j(x,u)\Big|_{x=x_j+0}-\exp(m^2x_j)\tilde{\psi}_1^j(x,u)\Big|_{x=x_j+0}\right]\right\}+$$

$$+\frac{h_i^{n+1}}{a(x_i)}\left[\frac{m^2 h_i}{\exp(-m^2 x_{i-1})-\exp(-m^2 x_i)}\psi_1^i(x,u)\Big|_{x=x_i}-\exp(m^2 x_i)\tilde{\psi}_1^i(x,u)\Big|_{x=x_i}\right]+$$

$$+\sum_{j=1}^{N-1}\hbar_j\tilde{G}_{\bar{x}}(x_i,x_j)\left[\varphi^{(\bar{n})}(x_j,u)-\varphi^{(\bar{n})}(x_j,y^{(\bar{n})})+O(|h|^{n+1})\right]+$$

$$+\tilde{G}_{\bar{x}}(x_i,x_N)\left[\mu_2(x_N,u)-\mu_2^{(\bar{n})}(x_N,u)\right]+\tilde{G}_{\bar{x}}(x_i,x_N)\left[\mu_2^{(\bar{n})}(x_N,u)-\mu_2^{(\bar{n})}(x_N,y^{(\bar{n})})\right].$$

Звідси на підставі нерівностей

$$\sum_{j=1}^{N}h_j\tilde{G}_{\bar{\xi}}(x_i,x_j)=\frac{\exp(-mx_N)}{m^2}\left(1-\exp(-m^2 x_i)\right)\le M_3\,,$$

$$\sum_{j=1}^{N}h_j G_{\bar{x}\bar{\xi}}(x_i,x_j)=\exp(-mx_N)\frac{\exp(-m^2 x_{i-1})-\exp(-m^2 x_i)}{m^2 h_i}\le M_4$$

випливають оцінки

$$|z_i|\le M\max\left\{|h|^{n+1},\left(\frac{1}{x_N}\right)^{n+1}\right\}+q_2\|z\|_{1,\infty,\hat{\bar{\omega}}_N}\,,\quad |z_{\bar{x},i}|\le M_1\max\left\{|h|^{n+1},\left(\frac{1}{x_N}\right)^{n+1}\right\}+q_2\|z\|_{1,\infty,\hat{\bar{\omega}}_N}\,.$$

Якщо n – парне, то, враховуючи (18), рівність (24) запишемо у вигляді

$$z_i=-\sum_{j=1}^{N}h_j G_{\bar{\xi}}(x_i,x_j)\left\{h_j^n\frac{m^2 h_j}{\exp(-m^2 x_{j-1})-\exp(-m^2 x_j)}\psi_1^j(x,u)\Big|_{x=x_j+0}\right\}+$$

$$+\sum_{j=1}^{N-1}\hbar_j G(x_i,x_j)\left[\varphi^{(\bar{n})}(x_j,u)-\varphi^{(\bar{n})}(x_j,y^{(\bar{n})})+O(|h|^n)\right]+$$

$$+G(x_i,x_N)\left[\mu_2(x_N,u)-\mu_2^{(\bar{n})}(x_N,u)\right]+G(x_i,x_N)\left[\mu_2^{(\bar{n})}(x_N,u)-\mu_2^{(\bar{n})}(x_N,y^{(\bar{n})})\right],$$

$$z_{\bar{x},i}=-\sum_{j=1}^{N}h_j G_{\bar{x}\bar{\xi}}(x_i,x_j)\left\{h_j^n\frac{m^2 h_j}{\exp(-m^2 x_{j-1})-\exp(-m^2 x_j)}\psi_1^j(x,u)\Big|_{x=x_j+0}\right\}+$$

$$+\frac{h_i^n}{a(x_i)}\frac{m^2 h_i}{\exp(-m^2 x_{i-1})-\exp(-m^2 x_i)}\psi_1^i(x,u)\Big|_{x=x_i}+$$

$$+\sum_{j=1}^{N-1}\hbar_j G_{\bar{x}}(x_i,x_j)\left[\varphi^{(\bar{n})}(x_j,u)-\varphi^{(\bar{n})}(x_j,y^{(\bar{n})})+O(|h|^n)\right]+$$

$$+G_{\bar{x}}(x_i,x_N)\left[\mu_2(x_N,u)-\mu_2^{(\bar{n})}(x_N,u)\right]+G_{\bar{x}}(x_i,x_N)\left[\mu_2^{(\bar{n})}(x_N,u)-\mu_2^{(\bar{n})}(x_N,y^{(\bar{n})})\right].$$

Звідси

$$|z_i|\le M\max\left\{|h|^n,\left(\frac{1}{x_N}\right)^n\right\}+q_2\|z\|_{1,\infty,\hat{\bar{\omega}}_N}\,,\quad |z_{\bar{x},i}|\le M_1\max\left\{|h|^n,\left(\frac{1}{x_N}\right)^n\right\}+q_2\|z\|_{1,\infty,\hat{\bar{\omega}}_N}\,.$$

Отже, отримаємо оцінку

$$\|z\|_{1,\infty,\hat{\bar{\omega}}_N}\le M\max\left\{|h|^{\bar{n}},\left(\frac{1}{x_N}\right)^{\bar{n}}\right\}\left(1-q_2\right)^{-1},$$

з якої на підставі того, що $q_2 < 1$, випливає

$$\|z\|_{1,\infty,\hat{\bar{\omega}}_N} \le M_1 \max\left\{ |h|^{\bar{n}}, \left(\frac{1}{x_N}\right)^{\bar{n}} \right\}.$$

Оскільки $y_0^{(\bar{n})} = Y_2^0(x_0, y^{(\bar{n})}),\ y_j^{(\bar{n})} = Y_1^j(x_j, y^{(\bar{n})})$, то

$$\left|\frac{dz(x_0)}{dx}\right| \le \left|Z_2^{(n)0}(x_0, y^{(\bar{n})}) - Z_2^0(x_0, y^{(\bar{n})})\right| + \left|Z_2^0(x_0, y^{(\bar{n})}) - Z_2^0(x_0, u)\right| + \frac{m^2}{1-\exp(-m^2 h_1)} \times$$

$$\times \left|Y_2^{(\bar{n})0}(x_0, y^{(\bar{n})}) - Y_2^0(x_0, y^{(\bar{n})})\right| \le M_1 |h|^{\bar{n}} + \left|\frac{\partial}{\partial u} Z_2^0(x_0, u)\right|_{u=\tilde{u}} \|z\|_{0,\infty,\hat{\bar{\omega}}_N} \le M |h|^{\bar{n}},$$

$$\left|\frac{dz(x_j)}{dx}\right| \le \left|Z_1^{(n)j}(x_j, y^{(\bar{n})}) - Z_1^j(x_j, y^{(\bar{n})})\right| + \left|Z_1^j(x_j, y^{(\bar{n})}) - Z_1^j(x_j, u)\right| + \frac{m^2}{\exp(-m^2 h_j) - 1} \times$$

$$\times \left|Y_1^j(x_j, y^{(\bar{n})}) - Y_1^{(\bar{n})j}(x_j, y^{(\bar{n})})\right| \le M_1 |h|^{\bar{n}} + \left|\frac{\partial}{\partial u} Z_1^j(x_j, u)\right|_{u=\tilde{u}} \|z\|_{0,\infty,\hat{\bar{\omega}}_N} \le M |h|^{\bar{n}},$$

$$j = 1, 2, ..., N.$$

Звідси отримаємо $\|z\|^*_{1,\infty,\hat{\bar{\omega}}_N} \le M \max\left\{ |h|^{\bar{n}}, (1/x_N)^{\bar{n}} \right\}$. З урахуванням обмежень на сітку $1/x_N \le h_{\max} = |h| \le c_2 N^{-1/2}$. Отже, порядок точності схеми (15) буде $O\left(|h|^{\bar{n}}\right)$ або $O\left(N^{-\bar{n}/2}\right)$. Теорема доведена.

Розв'язок нелінійної ТРС $\bar{n}$ –го порядку точності (15) можна знайти методом послідовних наближень.

Теорема 2. *Нехай виконуються умови теореми 1, тоді розв'язок задачі (15) можна знайти за допомогою методу послідовних наближень*

$$\begin{gathered} (a y_{\bar{x}}^{(\bar{n},k)})_{\hat{x},j} = -\varphi^{(\bar{n})}(x_j, y^{(\bar{n},k-1)}), \quad j = 1, 2, ..., N-1, \\ y_0^{(\bar{n},k)} = \mu_1, \quad -a(x_N) y_{\bar{x},N}^{(\bar{n},k)} = \beta_2 y_N^{(\bar{n},k)} - \mu_2^{(\bar{n})}(x_N, y^{(\bar{n},k-1)}), \quad k = 1, 2, ..., \end{gathered} \tag{25}$$

$$y^{(\bar{n},0)}(x_j) = \mu_1 \exp(-m^2 x_j), \quad \frac{dy^{(\bar{n},0)}(x_j)}{dx} = -m^2 \mu_1 \exp(-m^2 x_j), \quad j = 0, 1, ..., N$$

і справджується оцінка

$$\left\| y^{(\bar{n},k)} - u \right\|^*_{1,\infty,\hat{\bar{\omega}}_N} \le M\left(|h|^{\bar{n}} + q_2^k \right), \tag{26}$$

де

$$\frac{dy^{(\bar{n},k)}(x_0)}{dx} = Z_2^{(n)0}(x_0, y^{(\bar{n},k)}) + \frac{m^2 (Y_2^{(\bar{n})0}(x_0, y^{(\bar{n},k)}) - y_0^{(\bar{n},k)})}{1 - \exp(-m^2 h_1)},$$

$$\frac{dy^{(\bar{n},k)}(x_j)}{dx} = Z_1^{(n)j}(x_j, y^{(\bar{n},k)}) + \frac{m^2 (y_j^{(\bar{n},k)} - Y_1^{(\bar{n})j}(x_j, y^{(\bar{n},k)}))}{\exp(m^2 h_j) - 1}, \qquad j = 1, 2, ..., N,$$

стала M не залежить від $|h|, n, k$, а величина $q_2 = q + M|h| < 1$.

Твердження теореми випливає з теореми 1.

4. ЧИСЕЛЬНІ ЕКСПЕРИМЕНТИ

Приклад. Розглянемо крайову задачу

$$\frac{d^2u}{dx^2}+2\frac{du}{dx}=2u^3+4u^2,\quad x\in(0,\infty),\quad u(0)=-1,\quad \lim_{x\to\infty}u(x)=0$$

з відомим точним розв'язком $u(x)=th(x)-1$. Задачу розв'язували чисельно за допомогою схеми (15) для $n=\overline{n}=4$. Функції $Z_\alpha^{(4)N}(x_N,u),\ Y_\alpha^{(4)N}(x_N,u),\ \alpha=1,2$ – чисельні розв'язки задач Коші (8), які отримали методом Рунге – Кутта четвертого порядку точності (див. [6], 144). Оскільки диференціальне рівняння автономне, то

$$\mu_2=-Z_1^{(n)N}(x_N,u)\exp(m^2x_N)+\frac{m^2\left(Y_1^{(\overline{n})N}(x_N,u)-u_{N-1}\right)}{\exp(-m^2x_{N-1})-\exp(-m^2x_N)}.$$

Для знаходження розв'язку $y_j^{(4)},\ j=1,\dots,N-1$ різницевої схеми використовували метод послідовних наближень (25). Розв'язок системи лінійних алгебричних рівнянь (25) з тридіагональною матрицею знаходили методом прогонки. Результати чисельного розв'язування задачі на рівномірній сітці $\overline{\omega}_N=\{x_j,\ j=0,1,\dots,N,\ h=1/\sqrt{N}\}$ наведено в табл. Для практичної оцінки швидкості збіжності введено величини

$$er=\|z\|^*_{1,\infty,\hat{\hat{\omega}}_N}=\left\|y^{(\overline{n})}-u\right\|^*_{1,\infty,\hat{\hat{\omega}}_N},\quad p=\log_2\frac{\|z\|^*_{1,\infty,\hat{\hat{\omega}}_N}}{\|z\|^*_{1,\infty,\hat{\hat{\omega}}_{4N}}}.$$

Результати розрахунків прикладу 1

N	***er***	***p***
32	$0{,}1751\cdot10^{-3}$	
128	$0{,}1103\cdot10^{-4}$	4,0
512	$0{,}6905\cdot10^{-6}$	4,0
2048	$0{,}4318\cdot10^{-7}$	4,0
8192	$0{,}2699\cdot10^{-8}$	4,0
32768	$0{,}1689\cdot10^{-9}$	4,0
8192	$0{,}3031\cdot10^{-6}$	4,0
32768	$0{,}1919\cdot10^{-7}$	4,0

5. ВИСНОВКИ

Отже, побудовано ТРС порядку точності $\overline{n}$ чисельного розв'язування нелінійної крайової задачі (1), (2) на півосі. Доведено існування та єдиність розв'язку ТРС та доведено, що вона має порядок точності $\overline{n}$. Результати теоретичних досліджень підтверджено на чисельних прикладах.

ЛІТЕРАТУРА

1. *Кутнив М. В.* Точные трехточечные разностные схемы для нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений 2-го порядка и их реализация / Кутнив М. В., Макаров В. Л., Самарский А. А. // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. – 1999. – Т. 39, № 1. – С. 45–60.
2. *Гнатив Л. Б.* Обобщенные трехточечные разностные схемы высокого порядка точности для систем нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка / Гнатив Л. Б., Кутнив М. В., Макаров В. Л. // Дифференциальные уравнения. – 2009. – Т. 45, № 7. – С. 980−1000.
3. *Gavrilyuk I. P.* Difference schemes for nonlinear BVPs on the semiaxis / Gavrilyuk I. P., Hermann M., Kutniv M. V., and Makarov V. L.// Computational Methods in Applied Mathematics (CMAM). – 2007. – Vol. 7, No. 1. – P. 25–47.
4. *Gavrilyuk I. P.* Adaptive algorithms based on exact difference schemes for nonlinear BVPs on the half-axis /Gavrilyuk I. P., Hermann M., Kutniv M. V., and Makarov V. L. // Applied Numerical Mathematics, Vol. 59, No. 7. – P. 1529–1536, 2009.
5. *Kutniv M. V.* Exact three-point difference schemes for nonlinear ordinary differential equations on the semiaxis / Kutniv M. V., Pazdriy O. I. // Журн. обчислювальної та прикладної математики. Серія “Обчислювальна математика”. − 2010. − № 100 (1). − С. 82−99.
6. *Хайрер Э.* Решение обыкновенных дифференциальных уравнений / Хайрер Э., Нерсет С., Ваннер Г. – М., 1990.

ТРЕХТОЧЕЧНЫЕ РАЗНОСТНЫЕ СХЕМЫ ВЫСОКОГО ПОРЯДКА ТОЧНОСТИ ДЛЯ НЕЛИНЕЙНЫХ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА НА ПОЛУОСИ

М. Кутнив, О. Паздрий

Национальный университет “Львовская политехника”,
ул. С. Бандеры, 12, Львов, 79013, e-mail: oksanapazdriy@gmail.com

Разработана алгоритмическая реализация точной трехточечной разностной схемы решения нелинейной краевой задачи на полуоси через трехточечные разностные схемы ранга $\overline{n} = 2[(n+1)/2]$ ($[\cdot]$ – целая часть). Доказаны существование и единственность решения трехточечных разностных схем ранга $\overline{n}$ и получена оценка их точности.

Ключевые слова: нелинейные обыкновенные дифференциальные уравнения, краевая задача, трехточечная разностная схема.

THREE-POINT DIFFERENCE SCHEMES OF HIGH-ORDER ACCURACY FOR NONLINEAR ORDINARY DIFFERENTIAL EQUATIONS OF THE SECOND ORDER ON THE SEMIAXIS

M. Kutniv, O. Pazdriy

Lviv Polytechnic National University,
Bandery str., 12, Lviv, 79013, e-mail: oksanapazdriy@gmail.com

Algorithmical implementation of exact three-point difference scheme for solution of nonlinear boundary value problem on semiaxis by three-point difference schemes of rang $\overline{n} = 2[(n+1)/2]$ ($[\cdot]$ is entire part expression in brackets) are constructed. We prove the existence and uniqueness for solution of the three-point difference schemes of rang $\overline{n}$ and estimate the accuracy this scheme.

Key words: Nonlinear ordinary differential equations, boundary value problem, three-point difference scheme.

Стаття надійшла до редколегії 16.03.2010
Прийнята до друку 26.01.2011