ВІСНИК ЛЬВІВ. УН-ТУ *VISNYK LVIV UNIV.*
Серія прикл. матем. інформ. *Ser. Appl. Math. Inform.*
2011. Вип. 17. С. 3–9 *2011. Is. 17. P. 3–9*

О Б Ч И С Л Ю В А Л Ь Н А   М А Т Е М А Т И К А

УДК 519.21

ГРАНИЧНА ЗАДАЧА ДЛЯ ГІЛЛЯСТОГО ПРОЦЕСУ

І. Єлейко, І. Базилевич, Г. Тимків

Львівський національний університет імені Івана Франка,
вул. Університетська, 1, Львів, 79000, e-mail: tumkiv_gala@mail.ru

Доведено граничну теорему для послідовності процесів гіллястого процесу Гальтона – Ватсона. Вона є узагальненням на випадок довільної кількості типів частинок теореми, яку довів Солтан Алієв для скінченної кількості типів частинок. Суть теореми полягає в тому, що за певних умов скінченновимірні розподіли послідовності процесів Гальтона – Ватсона, що залежить від деякого малого параметра ε, при $\varepsilon \to 0$ збігаються до скінченновимірних розподілів гіллястого процесу з неперервним фазовим простором. >

Ключові слова: гіллястий процес, неперервний фазовий простір, перехідні явища, критичний випадковий процес, твірний функціонал, функціонал Лапласа, випадкова міра.

1. ВСТУП

Ми можемо уявити собі гіллястий процес як математичну модель розвитку популяцій, що складається з частинок, які розмножуються і помирають за деякими випадковими законами. Частинки можуть бути різних типів залежно від їхнього віку, енергії, положення чи від інших чинників. Проте вони не можуть взаємодіяти одна з одною. Це обмеження, яке дає змогу побудувати єдину математичну теорію.

Ми розглянули послідовність гіллястих процесів для так званих перехідних явищ. Перехідні явища у гіллястих випадкових процесах з одним типом частинок за умови, що скінченні перші три моменти, для випадку неперервного часу вперше досліджено у праці Б. О. Севастьянова [2], а для випадку дискретного часу – С. В. Нагаєва [4]. Асимптотичні властивості гіллястих процесів Гальтона – Ватсона, які близькі до критичних, вивчав також В. М. Шуренков [3].

2. ЗАГАЛЬНА ТЕОРІЯ ДЛЯ ПРОЦЕСІВ З НЕПЕРЕРВНИМ ФАЗОВИМ ПРОСТОРОМ І ДОВІЛЬНОЮ КІЛЬКІСТЮ ТИПІВ ЧАСТИНОК

Будемо розглядати випадкові гіллясті процеси з неперервним фазовим простором і довільною кількістю типів частинок D.

Нехай у просторі D задана $\sigma-$ алгебра $\Im$, яка містить всі одно точкові множини, тобто, якщо $d \in D$, то $d \in \Im$.

Розглянемо гіллястий процес з довільною кількістю частинок D і нехай $S \in \Im$. Назвемо $\mu(t,S)-$ випадковою мірою, яка характеризує маси частинок, типи яких належать множині S, що $S \in \Im$ в момент часу t, який може бути дискретним і неперервним, тому можна вважати, що $t \in T$.

Спочатку розглядаємо процеси з неперервним фазовим простором в одновимірному випадку.

Нехай R_+ – множина невід'ємних дійсних чисел. Розглянемо в R_+ однорідний харківський процес $\mu(t)$, $t \in [0,\infty)$. Позначимо $F_t(x) = P\{\mu(t) \le x\}$, $x \in R_+$. Для

$\operatorname{Re}\lambda \le 0$ розглядаємо функцію

$$\phi_t(\lambda) = Me^{\lambda\mu(t)} = \int_0^\infty e^{\lambda x} F_t(dx)$$

Будемо говорити, що $\mu(t)$ є гіллястим процесом з неперервним фазовим простором, якщо

$$M[e^{\lambda\mu(t)} \mid \mu(0) = x] = e^{xK(t,\lambda)}, \quad x \in [0,\infty),$$

де $K(t,\lambda)$ при кожному $t \ge 0$ є логарифмом перетворення Лапласа деякого нескінченно – подільного розподілу в R_+, і отже, набуває вигляду

$$K(t,\lambda) = a_t\lambda + \int_0^\infty (e^{\lambda x} - 1)\Pi_t(dx),$$

де $a_t \ge 0,$ а міра Π_t така, що

$$\Pi_t\{0\} = 0, \quad \int_0^\infty (x \wedge 1)\Pi_t(dx) < \infty.$$

Безпосередньо з означення випливає, що $K(0,\lambda) = \lambda.$

Якщо процес $\mu(t)$ стохастично неперервний, то його можна задавати з допомогою кумулянти $K(t,\lambda)$, яка визначається так:

$$H(\lambda) = \lim_{\tau \downarrow 0} \frac{K(t,\lambda) - \lambda}{\tau}.$$

Якщо ми розглядаємо процес із скінченою кількістю типів частинок n, то $\mu(t)$ називається гіллястим випадковим процесом із скінченою кількістю типів частинок, позаяк

$$M[e^{(\lambda,\mu(t))} \mid \mu(0) = x] = e^{(x,K(t,\lambda))},$$

де $x \in R_+^n$, $\lambda \in C_-^n$, $(x,\lambda) = \sum_{i=1}^n x^i \lambda^i$,

$$K(t,\lambda) = (K^1(t,\lambda),...,K^n(t,\lambda)).$$

Функція $K(t,\lambda)$ задовольняє таке співвідношення:

$$K(t+s,\lambda) = K(t,K(s,\lambda)),$$

де $t,s \ge 0,$ $\lambda \in C_-^n$.

Функція $K(t,\lambda)$ і кумулянта пов'язані між собою за допомогою системи диференціальних рівнянь

$$\frac{\partial K(t,\lambda)}{\partial t} = H(K(t,\lambda)), \quad K(0,\lambda) = \lambda,$$

$$\frac{\partial K(t,\lambda)}{\partial t} = H(\lambda)\frac{\partial K(t,\lambda)}{\partial \lambda}, \quad K(0,\lambda) = \lambda,$$

де

$$H(\lambda) = (H^1(\lambda),...,H^n(\lambda)).$$

Для процесу з довільною кількістю типів частинок D випадковий гіллястий процес із неперервним фазовим простором можна визначити так:

$$M[e^{\int\limits_D \lambda(s)\mu(t,ds)} \mid \mu(0,A) = y(A)] = e^{\int\limits_D y(ds)K(s,t,\lambda(u))},$$

де $u \in D$, $t \geq 0$, $\operatorname{Re}\lambda(u) \leq 0$, $y(u) \geq 0$, $y(D) \leq \infty$, $\mu(t,A)$ - випадкова міра, яка позначає масу частинок в момент часу t, які належать множині A, де $A \in \Im$, $\Im$ - σ - алгебра на множині D.

Зважаючи на те, що σ - алгебра множини D містить всі одноточкові множини, міру в початковий момент часу можна задавати як деяку функцію. Логічно це можна пояснити так. У початковий момент часу є лише скінчена кількість частинок різного типу, кожна з яких має певну числову характеристику – дійсне додатне число. Тобто кількість значень u, для яких $y(u)$ є додатними – скінчена, максимум – злічена.

Вважаємо, що процес стохастично неперервний. Тому можна ввести кумулянту

$$H(u,\lambda(\cdot)) = \lim_{\tau \to 0} \frac{K(u,\tau,\lambda(\cdot)) - \lambda(u)}{\tau}, \ (u \in D, \ \lambda(u) \leq 0).$$

3. ГРАНИЧНА ТЕОРЕМА ДЛЯ ГІЛЛЯСТОГО ПРОЦЕСУ

Розглянемо послідовність гіллястих процесів Гальтона – Ватсона, що залежить від деякого малого параметра ε з довільною кількістю типів частинок D та дискретним часом. На множині D задана σ-алгебра $\mathcal{F}$, яка містить всі одноточкові множини. Нехай випадкова міра $\xi(t,\varepsilon,A)$ позначає кількість частинок процесу з параметром ε, що належить множині $A \in \mathcal{F}$.

Умовні ймовірності та умовні математичні сподівання за умови, що в початковий момент часу була одна частинка типу $d \in D$, позначатимемо відповідно P_d та M_d.

Введемо функціонал Лапласа

$$F(\varepsilon,d,t,\varphi(\cdot)) = M_d \exp\left\{-\int\limits_D \varphi(u)\xi(t,\varepsilon,du)\right\}$$

і твірний функціонал

$$h(\varepsilon,d,t,\varphi(\cdot)) = M_d \exp\left\{\int\limits_D \ln\varphi(u)\xi(t,\varepsilon,du)\right\},$$

де $\varphi(u)$ є $\mathcal{F}$ -вимірна.

Вважаємо, що процеси в нас однорідні. Відомо, що твірний (Лапласа) функціонал для однорідних процесів Гальтона – Ватсона із дискретним часом визначається через твірний функціонал цього ж процесу в момент часу $t = 1$, тому ще вводимо позначення

$$F(\varepsilon,d,\varphi(\cdot)) = F(\varepsilon,d,1,\varphi(\cdot)),$$
$$h(\varepsilon,d,\varphi(\cdot)) = h(\varepsilon,d,1,\varphi(\cdot)).$$

Відомо [2], що

$$F(\varepsilon,n+k,d,\varphi(\cdot)) = F(\varepsilon,n,d,F(\cdot,k,\varphi(\cdot))).$$

(Це означає, що для довільної кількості типів частинок правильне основне функціональне рівняння).

Математичне сподівання процесу з параметром ε кількості частинок, що належать множині $A \in \mathcal{F}$ за одиницю часу за умови, що в початковий момент часу була одна частинка типу $d \in D$, ми позначимо через $M_d(\varepsilon, A)$.

Норму оператора надалі позначатимемо $\|\cdot\|$.

Припускаємо, що для процесу з параметром ε правильне зображення

$$M_d(\varepsilon, A) = E + \varepsilon C + o(\varepsilon), \tag{1}$$

де E – одиничний оператор, C – обмежений оператор, який залежить від множини A та d. Припускаємо, що існує таке число C_0, що $\forall d \in D, \forall A \in \mathcal{F},$ справджується нерівність

$$\| C(d, A) \| \le C_0.$$

Розглянемо послідовність функцій $b_1(\varepsilon, u)$ $(u \in D)$ таких, що $b_1(\varepsilon, u) \to \infty$ $\forall u \in D$ при $\varepsilon \to 0$. Вважаємо, що існує деяка міра $q(A)$, що $b_1(\varepsilon, u)$ інтегрована стосовно цієї міри і $\int_A b_1(\varepsilon, u) q(du) = b(\varepsilon, A)$ $(A \in \mathcal{F})$ і $b(\varepsilon, A) \to \infty$ при $\varepsilon \to 0.$

Далі розглянемо випадкові міри

$$\mu(t, \varepsilon, A) = \frac{\xi([t/\varepsilon], \varepsilon, A)}{b(\varepsilon, A)},$$

$$\xi(0, \varepsilon, A) = \left[\int_A x(u) b(\varepsilon, du) \right],$$

де $[a]$ – ціла частина числа a, $x(u) - \mathcal{F}$ -вимірна функція.

Правильна така теорема.

Теорема. Нехай маємо розклад (1), і для $\lambda(s) \le 0$, $s \in D$ виконуються умови:

1) існує границя

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\varepsilon} b_1(\varepsilon, s)[F(\varepsilon, s, \exp(\lambda(\cdot)/b_1(\varepsilon, \cdot))) -$$
$$- \exp(\lambda(s)/b_1(\varepsilon, s))] = H(s, \lambda(\cdot)); \tag{2}$$

2) $\dfrac{\partial H(s, \lambda(u))}{\partial \lambda} = C(s, \lambda(u))$ – обмежена по всіх аргументах.

Тоді скінченновимірні розподіли гіллястого процесу, які відповідають випадковій мірі $\mu(t, \varepsilon)$, слабо збігаються при $\varepsilon \to 0$ до скінченновимірних розподілів стохастично неперервного гіллястого процесу, що визначається випадковою мірою $\mu(t, A)$ і $\mu(0) = x(A)$ з кумулянтою $H(s, \lambda(\cdot)),$ $s \in D$.

Доведення. Приймемо

$$H(\varepsilon, s, \lambda(\cdot)) =$$
$$= \frac{1}{\varepsilon} b_1(\varepsilon, s) \ln[F(\varepsilon, s, \exp(\lambda(\cdot)/b_1(\varepsilon, \cdot))) \exp(-\lambda(\cdot)/b_1(\varepsilon, \cdot))]. \tag{3}$$

Відомо, що [2]

$$F(d, t + \tau, \varphi(\cdot)) = F(d, t, F(\cdot, \tau, \varphi(\cdot))),$$

тому твірна функція однорідного процесу Гальтона – Ватсона на n кроці є n-ю ітерацією твірної функції цього ж процесу за один крок.

Враховуючи позначення (3), легко бачити, що

$$b_1(\varepsilon,s)\ln F(\varepsilon,n+1,s,\exp(\lambda(\cdot)/b_1(\varepsilon,\cdot)))=$$
$$=\varepsilon H(\varepsilon,s,b_1(\varepsilon,\cdot)\ln F(\varepsilon,n,\cdot,\exp(\lambda(\cdot)/b_1(\varepsilon,\cdot)))+$$
$$+b_1(\varepsilon,s)\ln F(\varepsilon,n,s,\exp(\lambda(\cdot)/b_1(\varepsilon,\cdot)))$$

Якщо позначити

$$k=[t/\varepsilon],$$
$$K(\varepsilon,t,d,\lambda(\cdot))=b_1(\varepsilon,u)\ln F[\varepsilon,[t/\varepsilon],d,\exp(\lambda(\cdot)/b_1(\varepsilon,\cdot))],$$

то з нашої рівності отримуємо

$$K(\varepsilon,t+\varepsilon,d,\lambda(\cdot))-K(\varepsilon,t,d,\lambda(\cdot))=\varepsilon H(\varepsilon,d,K(\varepsilon,t,\cdot,\lambda(\cdot))).$$

Підставляючи послідовно $t=0,\varepsilon,2\varepsilon,\ldots,(k-1)\varepsilon$, далі додаємо ці рівності й одержимо

$$K(\varepsilon,t,d,\lambda(u))=\sum_{i=0}^{[t/\varepsilon]-1}\varepsilon H(\varepsilon,d,K(\varepsilon,i\varepsilon,\cdot,\lambda(\cdot))). \tag{4}$$

Очевидно, що $K(\varepsilon,t,d,\lambda(u))$ при $t=0$ дорівнює $\lambda(d)$.

З диференціального рівняння для кумулянти гіллястого процесу з неперервним фазовим простором

$$\frac{\partial K(s,t,\lambda)}{\partial t}=H(s,K(\cdot,t,\lambda)),K(0,\lambda(u))=\lambda(u),u\in D$$

випливає

$$K(s,t,\lambda)-\lambda(s)=$$
$$\int_0^{[t/\varepsilon]\varepsilon}H(s,K(\cdot,u,\lambda))ds+\int_{[t/\varepsilon]\varepsilon}^{t}H(s,K(\cdot,u,\lambda))ds-$$
$$-\varepsilon\sum_{i=0}^{[t/\varepsilon]-1}H(s,K(\cdot,i\varepsilon,\lambda))+\varepsilon\sum_{i=0}^{[t/\varepsilon]-1}H(s,K(\cdot,i\varepsilon,\lambda)). \tag{5}$$

Якщо суму перших трьох доданків позначити через $\gamma_\varepsilon(t,\lambda(\cdot))$, то $\gamma_\varepsilon(t,\lambda(\cdot))\to 0$ при $\varepsilon\to 0$ рівномірно по $t,\lambda(\cdot)$ в кожному скінченному інтервалі $[0\le t\le T,\Lambda\le Re\lambda(\cdot)\le 0]$.

Далі

$$\Delta(\varepsilon,t,\lambda)=|K(\varepsilon,t,s,\lambda(\cdot))-K(t,s,\lambda(\cdot))|. \tag{6}$$

Тоді з (4) і (5) отримаємо

$$\Delta(d,\varepsilon,t,\lambda)\le$$
$$\le\gamma_\varepsilon(t,\lambda(\cdot))+\varepsilon\sum_{i=0}^{[t/\varepsilon]-1}|H(s,K(\cdot,u,\lambda))-H(\varepsilon,d,K(\varepsilon,i\varepsilon,\cdot,\lambda))|.$$

Розпишемо суму у другому доданку

$$\sum_{i=0}^{[t/\varepsilon]-1}|H(d,K(\cdot,u,\lambda))-H(\varepsilon,d,K(\varepsilon,i\varepsilon,\cdot,\lambda))|\le$$
$$\le\sum_{i=0}^{[t/\varepsilon]-1}|H(d,K(\cdot,u,\lambda))-H(d,K(\varepsilon,i\varepsilon,\cdot,\lambda(\cdot)))|+$$

$$+\sum_{i=0}^{[t/\varepsilon]-1} | H(d, K(\varepsilon, i\varepsilon, \cdot, \lambda)) - H(\varepsilon, d, K(\varepsilon, i\varepsilon, \cdot, \lambda(\cdot))) | .$$

Розглянемо перший доданок. З умови теореми функція диференційована, і її похідна обмежена. Тому для першого доданка правої частини правильна нерівність

$$| H(d, K(\cdot, u, \lambda)) - H(d, K(\varepsilon, i\varepsilon, \cdot, \lambda(\cdot))) | \leq$$

$$\leq \sup \frac{\partial H}{\partial \lambda} | K(\varepsilon, t, s, \lambda(\cdot)) - K(s, t, \lambda(\cdot)) | \leq C_0 \Delta(d, \varepsilon, t, \lambda).$$

З першого співвідношення умови (2) теореми випливає, що різниця у другому доданку не перевищує деяке $\delta(\varepsilon) \to 0$ рівномірно по λ у кожному скінченному інтервалі, тому другий доданок не перевищує $\varepsilon\delta(\varepsilon)[t/\varepsilon] \leq t\delta(\varepsilon)$, де $\delta(\varepsilon) \to 0$ при $\varepsilon \to 0$.

Отож, остаточно отримуємо

$$\Delta(\varepsilon, t, \lambda) \leq \gamma_\varepsilon(t, \lambda) + t\delta(\varepsilon) + \varepsilon C_0 \sum_{i=0}^{[t/\varepsilon]-1} \Delta(\varepsilon, i\varepsilon, \lambda).$$

Враховуючи, що $[0 \leq t \leq T, \lambda(u) \leq 0]$, $u \in D$ можна суму $\gamma_\varepsilon(t, \lambda) + t\delta(\varepsilon)$ оцінити зверху величиною $\alpha_\varepsilon \to 0$. Тоді з останнього співвідношення одержимо

$$\Delta(\varepsilon, t, \lambda) \leq \alpha_\varepsilon + \varepsilon C_0 \sum_{i=0}^{[t/\varepsilon]-1} \Delta(\varepsilon, i\varepsilon, \lambda).$$

Отримаємо

$$\Delta(\varepsilon, t, \lambda) \leq \alpha_\varepsilon e^{C_0 t} \to 0$$

або ж, що те саме $K(\varepsilon, t, s, \lambda(\cdot)) \to K(s, t, \lambda(\cdot))$ при $\varepsilon \to 0$. Звідси

$$\left\{F(\varepsilon, [t/\varepsilon]s, \exp(\lambda(\cdot)/b_1(\varepsilon, \cdot)))\right\}^{[x(A)b(\varepsilon, A)]} \to e^{\int_D x(ds)K(s,t,\lambda(\cdot))} \tag{7}$$

Ліва частина (7) дорівнює

$$M\left\{ e^{\int_D \lambda(u)\mu(t,\varepsilon,du)} \mid \xi(0, A\varepsilon) = [x(A)b(\varepsilon, A)] \right\}$$

і звідси випливає, що співвідношення (7) означає, що одновимірний розподіл випадкових процесів, які відповідають випадковій мірі $\mu(t, \varepsilon)$, слабо збігаються при $\varepsilon \to 0$ до скінченновимірних розподілів стохастично неперервного гіллястого процесу з неперервним фазовим простором, який визначається випадковою мірою $\mu(t, A)$ і з кумулянтою $H(s, \lambda(\cdot))$. З аналога основного функціонального рівняння за індукцією випливає збіжність скінченновимірних розподілів.

4. ВИСНОВКИ

Отже, результати, отримані для процесів зі скінченною кількістю типів частинок, можна узагальнити на випадок довільної кількості типів.

Ми використовували апарат твірних функціоналів, який є узагальненням апарату твірних функцій для процесів зі скінченною кількістю типів частинок. Доведено, що за певних умов послідовність процесів Гальтона – Ватсона, які набувають цілі невід'ємні значення і залежать від малого параметра ε, при $\varepsilon \to 0$ збігаються до процесу з неперервним фазовим простором.

ЛІТЕРАТУРА

1. *Алиев С.* Стохастический анализ некоторых классов ветвящихся процессов // Укр. матем. журн. – Т. 37, № 5. – 1985. – С. 665–668.
2. *Севастьянов Б. А.* Ветвящиеся процессы. М., 1971.
3. *Шуренков В. М.* Переходные явления теории восстановления в асимптотических задачах теории случайных процессов // Математический сборник. – 1980. – Т. 112, № 1. – С. 114–132.
4. *Нагаев С. В., Мухамеджанова Н. В.* Переходные явления в ветвящихся процессах с дискретным временем // Сб. Предельные теоремы и статистические выводы. – 1966. – С. 83–89.
5. *Елейко Я. И.* Переходные явления для ветвящихся процессов с произвольным числом типов частиц и дискретным временем // Укр. матем. журн. – Т. 34, № 2. – 1980. – С. 198–203.

ПРЕДЕЛЬНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ВЕТВЯЩИХСЯ ПРОЦЕССОВ

Я. Елейко, И. Базылевич, Г. Тымкив

Львовский национальный университет имени Ивана Франко,
ул. Университетская, 1, Львов, 79000, e-mail: tumkiv_gala@mail.ru

Доказана предельная теорема для последовательности ветвящихся процессов Гальтона – Ватсона. Она является обобщением для произвольного количества типов частиц теоремы, которую доказал Солтан Алиев для конечного числа типов частиц. Суть теоремы состоит в том, что при определенных условиях конечномерные распределения последовательности процессов Гальтона – Ватсона, зависящие от некоторого малого параметра ε, при $\varepsilon \to 0$ сходятся к конечномерным распределениям ветвящегося процесса с непрерывным фазовым пространством.

Ключевые слова: ветвящийся процесс, непрерывное фазовое пространство, переходные явления, критический случайный процесс, образующий функционал, функционал Лапласа, случайная мера.

LIMIT PROBLEMS FOR BRANCHING PROCESS

Ya. Yelejko, I. Bazylevych, G. Tymkiv

Ivan Franko National University of Lviv
Universytetska str, 1, Lviv, 79000, e-mail: tumkiv_gala@mail.ru

We proved the limit theorem for a sequence of process of Halton-Watson branching process. It is a generalization of the case with arbitrary number of types of particles, the theorem which was proved by Soltan Aliyev [1] for a finite number of types of particles. The essence of the theorem is that under certain conditions the sequence of distributions of finite Halton-Watson process that depend on some small parameter ε, for $\varepsilon \to 0$ converge to finite distributions of branching process with continuous phase space.

Key words: branching process, continuous phase space, transitional phenomena, critical random process, generator functional, Laplace functional, random measure.

Стаття надійшла до редколегії 11.10.2010
Прийнята до друку 26.01.2011