ISSN 2078–5097. Вісн. Львів. ун-ту. Сер. пр. матем. та інф. 2012. Вип. 18. С. 222–228
Visnyk of the Lviv University. Series Appl. Math. and Informatics. Issue 18. P. 222–228

УДК 519.21

МОДЕЛЮВАННЯ ТРАНСАКЦІЙНИХ ВИТРАТ В УМОВАХ НЕВИЗНАЧЕНОСТІ

Я. Єлейко[*], Н. Куликовець[*], Б. Зброінська[**]

*[*]Львівський національний університет імені Івана Франка,
вул. Університетська, 1, Львів, 79000, e-mail: natalia.kulykovets@gmail.com
[**]Університет Яна Кохановського,
вул. Жеромського, 5, Кельце, 25-369, Польща e-mail: b.zbroinska@pn.kielce.pl*

Важливою проблемою на сучасному етапі розвитку економічних стосунків суб'єктів господарської діяльності є побудова методів і моделей оцінювання трансакційних витрат [3]. Дослідження провідних зарубіжних і вітчизняних вчених свідчать про те, що трансакційні витрати є важливою і водночас складною, багатогранною категорією [2].

Розглянуто декілька варіантів розвитку інвестиційного процесу при різних початкових умовах, всіляких можливих обставин.

Ключові слова: трансакційні витрати, випадкова величина, щільність, математичне сподівання, дисперсія випадкової величини та ризик.

ВСТУП

Вважаємо, що інвестиційна компанія інвестує певну суму X під деякий проект на k років з фіксованою відсотковою ставкою r. Для впевненості в поверненні інвестованої суми компанія наймає консалтингову фірму для перевірки платоспроможності фірми, в яку інвестується капітал.

Нехай x_1 – комісійні, які отримує консалтингова фірма за свої послуги, після сплати комісійних, компанія буде інвестувати фактично суму $(X - x_1)$. Якщо інвестиційна компанія не впевнена в достовірності перевірки, то наймаються інші консалтингові фірми, відповідно оплачуючи їхні послуги комісійними $x_2, x_3, \dots, x_m$, які називаються трансакційними витратами. Після m перевірок інвестована сума зміниться, що призведе до зміни відсоткової ставки. Якщо $X(1+r)^k$ – сума, яку потрібно повернути компанії в кінці терміну без врахування трансакційних витрат, то $\left(X - (x_1 + x_2 + \dots + x_m)\right)(1+\Delta)^k$ – сума після нарахування трансакційних витрат.

З рівняння еквівалентності

$$\left(X - (x_1 + x_2 + \dots + x_m)\right)(1+\Delta)^k = X(1+r)^k$$

отримаємо реальну відсоткову ставку Δ.

Оскільки відсоткові ставки можуть змінюватись залежно від ситуації, то вважаємо, що $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_m$ – випадкові величини, з деяким розподілом ймовірності.

Ми розглянули випадок, коли відсотки задаються Гамма розподілом, який зазвичай використовують для оцінки фінансових параметрів. Щільність розподілу набула вигляду

$$p(\Delta) = \frac{\Delta^{\alpha-1} e^{-\Delta\beta}}{\Gamma(\alpha)} \beta^{\alpha},$$

де $\alpha, \beta > 0$ – його параметри.

Скориставшись властивістю Гамма розподілу $\Gamma(\alpha+1)=\alpha\Gamma(\alpha)$, знайдемо середні доходи від інвестиції:

$$E\left(\left(X-\left(x_1+x_2+\ldots+x_m\right)\right)\left(1+\Delta_i\right)^k\right)=$$

$$\left(X-\left(x_1+x_2+\ldots+x_m\right)\right)E\left(\left(1+\Delta_i\right)^k\right)=$$

$$\left(X-\left(x_1+x_2+\ldots+x_m\right)\right)\int\limits_\Omega\left(1+\Delta_i\right)^k p(\Delta)d\Delta=$$

$$\left(X-\left(x_1+x_2+\ldots+x_m\right)\right)\int\limits_\Omega\left(1+\Delta_i\right)^k\frac{\Delta^{\alpha-1}e^{-\Delta\beta}}{\Gamma(\alpha)}\beta^\alpha d\Delta=$$

$$\left(X-\left(x_1+x_2+\ldots+x_m\right)\right)\frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_\Omega\left(1+\Delta_i\right)^k\Delta^{\alpha-1}e^{-\Delta\beta}d\Delta=$$

$$\left(X-\left(x_1+x_2+\ldots+x_m\right)\right)\frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)}\sum_{j=0}^k C_k^j\int\limits_0^\infty\Delta^{j+\alpha-1}e^{-\Delta\beta}d\Delta=$$

$$\left(X-\left(x_1+x_2+\ldots+x_m\right)\right)\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\sum_{j=0}^k C_k^j\int\limits_0^\infty\Delta^{j+\alpha-1}e^{-\Delta\beta}\beta^{\alpha+j-j}d\Delta=$$

$$\left(X-\left(x_1+x_2+\ldots+x_m\right)\right)\sum_{j=0}^k C_k^j\frac{\beta^{-j}}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_0^\infty\Delta^{j+\alpha-1}e^{-\Delta\beta}\beta^{\alpha+j}d\Delta=$$

$$\left(X-\left(x_1+x_2+\ldots+x_m\right)\right)\sum_{j=0}^k\frac{C_k^j}{\beta^j}\frac{\Gamma(\alpha+j)}{\Gamma(\alpha)}=$$

$$\left(X-\left(x_1+x_2+\ldots+x_m\right)\right)\sum_{j=0}^k\frac{C_k^j}{\beta^j}\frac{(\alpha+j-1)(\alpha+j-2)\cdot\ldots\cdot\alpha\Gamma(\alpha)}{\Gamma(\alpha)}=$$

$$\left(X-\left(x_1+x_2+\ldots+x_m\right)\right)\sum_{j=0}^k\frac{C_k^j}{\beta^j}\left[\alpha\cdot\ldots\cdot(\alpha+j-1)\right].$$

Використовуючи метод максимальної правдоподібності з теорії статистики, обчислимо параметри α,β

$$\hat{\mu}=E(\Delta)=\frac{\alpha}{\beta}$$

$$\hat{\sigma}^2=D(\Delta)=\frac{\alpha}{\beta^2}$$

$$\frac{E(\Delta)}{D(\Delta)}=\frac{\alpha}{\beta}\frac{\beta^2}{\alpha}=\beta.$$

Тепер розглянемо ситуацію, коли кількість перевірок платоспроможності L є дискретною випадковою величиною з деяким законом розподілу

$$P\{L=s\}=p_s,\ s=0,\ldots,m\ \sum_{s=0}^m p_s=1.$$

У цьому випадку середні виплати інвестиційній фірмі становитимуть

$$E\left(\left(X-x_1-x_2-\ldots-x_L\right)\left(1+\Delta\right)^k\mid L=s\right)=E\left(\left(X-x_1-x_2-\ldots-x_s\right)\left(1+\Delta\right)^k\right)=$$

$$\sum_{s=0}^m\left(X-x_1-x_2-\ldots-x_s\right)\left(1+\Delta\right)^k p_s=\left(1+\Delta\right)^k\sum_{s=0}^m\left(X-x_1-x_2-\ldots-x_s\right)p_s.$$

З рівняння еквівалентності $(X - x_1 - x_2 - ... - x_m)(1+\Delta)^k = X(1+r)^k$ отримаємо реальну відсоткову ставку

$$(1+\Delta)^k = \frac{X(1+r)^k}{X - x_1 - x_2 - ... - x_m}$$

$$\Delta = \sqrt[k]{\frac{X}{X - x_1 - x_2 - ... - x_m}}(1+r) - 1$$

Дисперсія виплат набуде вигляду

$$D\left((X - x_1 - x_2 - ... - x_L)(1+\Delta)^k\right) =$$
$$E\left((X - x_1 - x_2 - ... - x_L)(1+\Delta)^k \mid L = s\right)^2 - \left(E\left((X - x_1 - x_2 - ... - x_L)(1+\Delta)^k \mid L = s\right)\right)^2 =$$
$$E\left((X - x_1 - x_2 - ... - x_s)(1+\Delta)^k\right)^2 - \left(E\left((X - x_1 - x_2 - ... - x_s)(1+\Delta)^k\right)\right)^2 =$$
$$(1+\Delta)^{2k}\sum_{s=0}^{m}(X - x_1 - x_2 - ... - x_s)^2 p_s - \left((1+\Delta)^k\sum_{s=0}^{m}(X - x_1 - x_2 - ... - x_s)p_s\right)^2 =$$
$$(1+\Delta)^{2k}\left(\sum_{s=0}^{m}(X - x_1 - x_2 - ... - x_s)^2 p_s - \left(\sum_{s=0}^{m}(X - x_1 - x_2 - ... - x_s)p_s\right)^2\right).$$

Також визначено ризик R несплати інвестиції

$$R\left((X - x_1 - x_2 - ... - x_L)(1+\Delta)^k\right) =$$
$$\frac{\sqrt{D\left((X - x_1 - x_2 - ... - x_L)(1+\Delta)^k\right)}}{E\left((X - x_1 - x_2 - ... - x_L)(1+\Delta)^k\right)} =$$
$$= \frac{\sqrt{(1+\Delta)^{2k}\left(\sum_{s=0}^{m}(X - x_1 - x_2 - ... - x_s)^2 p_s - \left(\sum_{s=0}^{m}(X - x_1 - x_2 - ... - x_s)p_s\right)^2\right)}}{(1+\Delta)^k\sum_{s=0}^{m}(X - x_1 - x_2 - ... - x_s)p_s} =$$
$$= \frac{\sqrt{\sum_{s=0}^{m}(X - x_1 - x_2 - ... - x_s)^2 p_s - \left(\sum_{s=0}^{m}(X - x_1 - x_2 - ... - x_s)p_s\right)^2}}{\sum_{s=0}^{m}(X - x_1 - x_2 - ... - x_s)p_s}.$$

Надалі розглянемо випадок, коли початкова ситуація на ринку описується випадковими подіями $A_1, A_2 ... A_n$, які утворюють повну групу попарно несумісних подій, з розподілом ймовірностей

$$P(A_j) = p_j,\ j = 1,..,n\ \sum_{j=1}^{n} p_j = 1.$$

Кожній події відповідає певна кількість перевірок з розподілом

$$P\left\{L^{A_j} = i\right\} = p_i^{A_j},\ i = 1,..,m\ \sum_{i=1}^{m} p_i^{A_j} = 1,\ j = 1,..,n.$$

Тоді середнє значення інвестиції, за умови виконання події A_j, набуває вигляду

$$E\left(X \mid A_j\right)=\sum_{i=1}^{m}\left(X-x_i^{A_j}\right)p_i,\ j=1,...,n,$$

$$E^{A_j}\left(X\right)=\sum_{i=0}^{m}\left(X-x_i\right)P\left\{L^{A_j}=i\right\},\ \ j=1,...,n,$$

$$E\left(X\right)=\sum_{j=1}^{n}E^{A_j}\left(X\right)p_j=\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=0}^{m}\left(X-x_i\right)P\left\{L^{A_j}=i\right\}\right)p_j=\sum_{ij=1}^{n}\left(\sum_{i=0}^{m}\left(X-x_i\right)p_i^{A_j}\right)p_j,\ j=1,...,n.$$

Дисперсія виплат набуде вигляду

$$D\left(X\right)=\sum_{j=1}^{n}\left(E^{A_j}\left(X\right)\right)^2p_j-\left(\sum_{j=1}^{n}\left(E^{A_j}\left(X\right)\right)p_j\right)^2=$$

$$\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{m}\left(X-x_i\right)p_i^{A_j}\right)^2p_j-\left(\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{m}\left(X-x_i\right)p_i^{A_j}\right)p_j\right)^2.$$

Ризик несплати інвестиції, при виконанні подій A_j, та сукупний ризик відповідно, набудуть вигляду

$$R(X^{A_j})=\frac{\sqrt{D(X^{A_j})}}{E(X^{A_j})}=\frac{\sqrt{\sum_{i=0}^{m}\left(X-x_i\right)^2p_i^{A_j}-\left(\sum_{i=1}^{m}\left(X-x_i\right)p_i^{A_j}\right)^2}}{\sum_{i=1}^{m}\left(X-x_i\right)p_i^{A_j}}$$

$$R(X)=\frac{\sqrt{D(X)}}{E(X)}=\frac{\sqrt{\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{m}\left(X-x_i\right)p_i^{A_j}\right)^2p_j-\left(\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{m}\left(X-x_i\right)p_i^{A_j}\right)p_j\right)^2}}{\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{m}\left(X-x_i\right)p_i^{A_j}\right)p_j}.$$

Отримані результати будуть застосовані для розгляду випадку наявності кількох інвестиційних проектів.

$X_1, X_2, ..., X_n,\ X_i\cap X_j=\emptyset\ \ i\neq j$

$X_k\ \ k=1,...,n$ – інвестиційні суми

$x_{k_i}\ \ k=1,...,n\ \ \ i=1,..,m$ – трансакційні витрати для кожної з інвестиційних сум.

Врахувавши попередні міркування для кожної інвестиційної суми X_k, середні виплати набудуть вигляду

$$E\left(X_k \mid A_j\right)=\sum_{i=1}^{m}\left(X_k-x_{k_i}^{A_j}\right)p_i,\ j=1,...,n,\ k=1,...,n$$

$$E^{A_j}\left(X_k\right)=\sum_{i=1}^{m}\left(X_k-x_{k_i}\right)P\left\{L^{A_j}=i\right\},\ \ j=1,...,n,\ k=1,...,n\ .$$

$$E\left(X_k\right)=\sum_{j=1}^{n}E^{A_j}\left(X_k\right)p_j=\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{m}\left(X_k-x_{k_i}\right)P\left\{L^{A_j}=i\right\}\right)p_j=$$

$$=\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{m}\left(X_k-x_{k_i}\right)p_i^{A_j}\right)p_j,\ \ k=1,...,n\ .$$

Дисперсія та ризик для кожного інвестиційного процесу, відповідно, такі:

$$D(X_k)=\left(\sum_{j=1}^{n}E^{A_j}(X_k)\right)^2 p_j-\left(\sum_{j=1}^{n}E^{A_j}(X_k)p_j\right)^2=$$

$$\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{m}(X_k-x_{k_i})p_i^{A_j}\right)^2 p_j-\left(\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{m}(X_k-x_{k_i})p_i^{A_j}\right)p_j\right)^2,\quad k=1,...,n$$

$$R(X_k)=\frac{\sqrt{D(X_k)}}{E(X_k)}=\frac{\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{m}(X_k-x_{k_i})p_i^{A_j}\right)^2 p_j-\left(\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{m}(X_k-x_{k_i})p_i^{A_j}\right)p_j\right)^2}{\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{m}(X_k-x_{k_i})p_i^{A_j}\right)p_j}\ k=1,...,n\,.$$

Сукупний ризик у цьому випадку набуде такого вигляду

$$R(X)=\underset{k}{Min}\left\{\frac{\sqrt{D(X_k)}}{E(X_k)}\right\}=$$

$$=\frac{\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{m}(X_k-x_{k_i})p_i^{A_j}\right)^2 p_j-\left(\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{m}(X_k-x_{k_i})p_i^{A_j}\right)p_j\right)^2}{\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{m}(X_k-x_{k_i})p_i^{A_j}\right)p_j},\quad k=1,...,n.$$

Розглянемо надалі поведінку трансакційних витрат на ринку цінних паперів. Нехай маємо ситуацію, що компанія А купила k акцій за ціною x_1 та згодом мала намір продати іншій компанії протягом певного проміжку часу за сталою ціною x_2, очевидно, що за таку можливість компанія отримає додаткову плату a_{k_j} $j=1,...,n$. Кількість проданих акцій невідома, тому вважатимемо k – випадковою величиною з розподілом ймовірностей

$$P\{k=s\}=p_k\quad \sum_{k=1}^{s}p_k=1\,.$$

Середню кількість проданих акцій отримаємо з формули

$$E(k)=\sum_{k=1}^{s}kp_k\ .$$

Оскільки трансакційні витрати a_{k_j} вважатимемо дискретними випадковими величинами з розподілом

$$P\{j=n\}=q_j\quad \sum_{j=1}^{n}q_j=1\,,$$

то середні очікувані виплати від продажу k – акцій, за умови незалежності випадкових величин набудуть вигляду

$$E\left(k\left(x_2+a_{k_j}\right)\right)=E(k)\cdot E\left(x_2+a_{k_j}\right)=$$

$$=\sum_{k=1}^{s}kp_k\cdot\sum_{j=1}^{n}\left(x_2+a_{k_j}\right)p_j=\sum_{k=1}^{s}\sum_{j=1}^{n}k\left(x_2+a_{k_j}\right)p_kp_j\,.$$

Дисперсія та ризик для цього випадку, відповідно, такі:

$$D\left(k\cdot\left(x_2+a_{k_j}\right)\right)=E\left(k\cdot\left(x_2+a_{k_j}\right)\right)^2-\left(E\left(k\cdot\left(x_2+a_{k_j}\right)\right)\right)^2=$$

$$\sum_{k=1}^{s}k^2p_k\cdot\sum_{j=1}^{n}\left(x_2+a_{k_j}\right)^2p_j-\left(\sum_{k=1}^{s}kp_k\cdot\sum_{j=1}^{n}\left(x_2+a_{k_j}\right)p_j\right)^2=$$

$$\sum_{k=1}^{s}\sum_{j=1}^{n}k^2\left(x_2+a_{k_j}\right)^2p_kp_j-\left(\sum_{k=1}^{s}\sum_{j=1}^{n}k\left(x_2+a_{k_j}\right)p_kp_j\right)^2$$

$$R\left(k\cdot\left(x_2+a_{K_J}\right)\right)=\frac{\sqrt{D\left(k\cdot\left(x_2+a_{k_J}\right)\right)}}{E\left(k\cdot\left(x_2+a_{k_J}\right)\right)}=\frac{\sqrt{E\left(k\cdot\left(x_2+a_{k_J}\right)\right)^2-\left(E\left(k\cdot\left(x_2+a_{k_J}\right)\right)\right)^2}}{E\left(k\cdot\left(x_2+a_{k_J}\right)\right)}=$$

$$\frac{\sqrt{\sum_{k=1}^{s}k^2p_k\cdot\sum_{j=1}^{n}\left(x_2+a_{k_j}\right)^2p_j-\left(\sum_{k=1}^{s}kp_k\cdot\sum_{j=1}^{n}\left(x_2+a_{k_j}\right)p_j\right)^2}}{\sum_{k=1}^{s}\sum_{j=1}^{n}k\left(x_2+a_{k_j}\right)p_kp_j}\quad j=1,..,n.$$

Раніше ми розглянули випадки застосування трансакційних витрат за безінфляційних умов, якщо ж розглядати ситуацію в умовах інфляції, то алгоритм знаходження середніх очікуваних виплат, дисперсії та ризику в умовах невизначеності буде аналогічним, лише буде введено додаткову відсоткову ставку τ –річний темп інфляції, який визначають формулою

$$\tau=\frac{p_2-p_1}{p_1}\cdot 100\%=\frac{\Delta p}{p_1}\cdot 100\%,$$

де p_1, p_2 – ціни на споживчий кошик, товари необхідні для життя, на початку та вкінці першого періоду.

Сума, яку треба повернути інвестору за таких умов, звичайно, зміниться і набуде вигляду

$$X^*=\left(X-\left(x_1+x_2+...+x_m\right)\right)\left(1+\Delta\right)^k\left(1+\tau\right)^k /$$

ВИСНОВКИ

Трансакційні витрати є важливою, водночас складною та багатогранною категорією, тому нехтувати інформацією про них, означає не враховувати дію економічних законів ринкової економіки та не мати змоги приймати виважені управлінські рішення.

Ця категорія економічних стосунків відіграє досить важливу роль в економічній системі, оскільки здатна набагато поліпшити ситуацію в певній компанії, адже володіючи інформацією про початкову ситуацію в інвестиційній системі про компанію, в яку інвестуємо, чи про майбутній результат ситуації, можна зробити важливі висновки, аби не втратити, а навпаки здобути.

Список використаної літератури

1. *Бауерс Н.* Актуарна математика / Н. Бауерс, Ч. Гербер, Д. Джонс, С. Несбітт, Дж. Хикман / За ред. В.К. Малиновського. – М.: Янус-К, 2011. – 658 с.
2. *Данько М.* Теоретико-методологічний аспект визначення трансакційних витрат / М. Данько // Економічна теорія. – 2007.

3. *Шарп У.Ф.* Інвестиції: навч. посібник / У.Ф. Шарп, А.Дж. Гордон, Дж. В. Бейли. – М.: Інфра-М, 2001. – 1027 с.
4. *Ястремський О.* Основи теорії економічного ризику: навч. посібник / О. Ястремський / За ред. О.В. Мертенса. – К.: АртЕк, 1997. – 236 с.

Стаття: надійшла до редколегії 10.10.2011
доопрацьована 24.11.2011
прийнята до друку 08.12.2011

МОДЕЛИРОВАНИЕ ТРАНСАКЦИОННЫХ ИЗДЕРЖЕК В УСЛОВИЯХ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ

Я. Елейко*, Н. Куликовец*, Б. Зброинская**

**Львовский национальный университет имени Ивана Франко,*
ул. Университетская, 1, Львов, 79000, e-mail: natalia.kulykovets@gmail.com
***Университет имени Яна Кохановского,*
ул. Жеромського, 5, Кельце, 25-369, Польша, e-mail: B.zbroinska@pn.kielce.pl

Важной проблемой на современном этапе развития экономических отношений является построение методов и моделей оценки трансакционных издержек [3]. Исследования ведущих зарубежных и отечественных ученых показывают, что трансакционные издержки являются важной и одновременно сложной, многогранной категорией. Рассмотрим несколько вариантов развития инвестиционного процесса при разных начальных условиях всевозможных обстоятельств.

Ключевые слова: трансакционные издержки, случайная величина, плотность, математическое ожидание, дисперсия случайной величины и риск.

MODELLING TRANSACTION COSTS UNDER UNCERTAINTY

Ya. Yeleiko*, N. Kulykovets*, B. Zbroinska**

**Ivan Franko National University of Lviv,*
Universytetska str, 1, Lviv, 79000, e-mail: natalia.kulykovets@gmail.com
***Jan Kochanovski University,*
Jeromskogo str, 5, Keltse, 25-369, Poland, e-mail: B.zbroinska@pn.kielce.pl

One of the most important problems at the present stage of the development of economic relations is the development of methods and models of transaction costs evaluation [3].

Investigation of leading foreign and domestic scholars point out that transaction costs are important but also complex and multifaceted category [2]. This article consider several variations of the investment process with different initial conditions.

Key words: transaction costs, the random variable, density, mathematical expectation, variance of random variable and risk.