ISSN 2078–5097. Вісн. Львів. ун-ту. Сер. пр. матем. та інф. 2012. Вип. 18. С. 197–207
Visnyk of the Lviv University. Series Appl. Math. and Informatics. Issue 18. P. 197–207

УДК 519.6

АНАЛІЗ МАТЕМАТИЧНОЇ МОДЕЛІ ТИМОШЕНКА

І. Муха[*], Н. Савула[**], А. Стягар[*]

[*]*Львівський національний університет імені Івана Франка,*
вул. Університетська, 1, Львів, 79000, e-mail: kpm@franko.lviv.ua
[**]*HP Ukraine, e-mail: kpm@franko.lviv.ua*

Подано доведення існування та єдиності слабкого розв'язку математичної моделі згину пластини Тимошенка. Крім того, наведено числові результати розв'язування цієї задачі в одновимірному випадку, отримані на підставі функцій-бульбашок. Одержані числові результати дають підстави для використання функцій-бульбашок і у випадку нелінійної задачі моделі Тимошенка.

Ключові слова: модель Тимошенка, згин пластини, існування і єдиність.

1. ВСТУП

У задачах механіки деформівного твердого тіла часто використовують модель Тимошенка [3, 4], яка описує згин пластини, до якої прикладено певне відоме навантаження. З математичного погляду ця модель є системою еліптичних рівнянь. Виникає необхідність у дослідженні цієї задачі у теоретичному плані (обґрунтування існування та єдиності розв'язку) і в побудові коректного алгоритму числового аналізу.

У [1] подано доведення коректності формулювання першої крайової задачі для оболонок типу Тимошенка. Звідси випливає коректність формулювання цієї задачі і для пластин, що описуються моделлю Тимошенка. Ми подали інше доведення коректності першої крайової задачі для моделі Тимошенка, провели аналіз застосування схем МСЕ, побудованих на підставі ієрархічного базису [5].

2. ФОРМУЛЮВАННЯ КРАЙОВОЇ ЗАДАЧІ

Нехай серединна площина пластинки займає область $\Omega = \{x_1, x_2\}$ з ліпшицевою границею Γ. Позначимо через $w(x)$, $\gamma_1(x)$, $\gamma_2(x)$, $x = (x_1, x_2)$ відповідно прогин точки x серединної площини та кути повороту нормалі в точці x у напрямі координатних осей x_1 та x_2, відповідно.

Відомо [3, 4], що деформації серединної площини прийнято характеризувати величинами ε_{13}, ε_{23}, κ_{11}, κ_{22}, κ_{12}, які можуть бути описані через прогин w та кути поворотів γ_1, γ_2 так:

$$\varepsilon_{13} = \frac{\partial w}{\partial x_1} + \gamma_1,$$

$$\varepsilon_{23} = \frac{\partial w}{\partial x_2} + \gamma_2,$$

$$\kappa_{11} = \frac{\partial \gamma_1}{\partial x_1},$$

$$\kappa_{22} = \frac{\partial \gamma_2}{\partial x_2},$$

$$\kappa_{12} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \gamma_1}{\partial x_2} + \frac{\partial \gamma_2}{\partial x_1}\right).$$

Відомо також, що перерізуючі сили Q_1, Q_2 та моменти M_1, M_2, H, які діють на пластину у точках серединної площини, можна знайти за формулами

$$Q_1 = k'G'\left(\frac{\partial w}{\partial x_1} + \gamma_1\right),$$

$$Q_2 = k'G'\left(\frac{\partial w}{\partial x_2} + \gamma_2\right),$$

$$M_1 = D\left(\frac{\partial \gamma_1}{\partial x_1} + \nu \frac{\partial \gamma_2}{\partial x_2}\right), \tag{1}$$

$$M_2 = D\left(\frac{\partial \gamma_2}{\partial x_2} + \nu \frac{\partial \gamma_1}{\partial x_1}\right),$$

$$H = D\frac{1-\nu}{2}\left(\frac{\partial \gamma_1}{\partial x_2} + \frac{\partial \gamma_2}{\partial x_1}\right),$$

де

$$D = \frac{Eh^3}{12\left(1-\nu^2\right)},$$

E – модуль Юнга; ν – коефіцієнт Пуассона; k' – коефіцієнт зсуву; G' – модуль зсуву. У випадку ізотропного матеріалу отримаємо

$$k' = \frac{5}{6},\ G' = \frac{E}{2(1+\nu)}.$$

Рівняння рівноваги, записані через зусилля і моменти, набувають вигляду

$$\frac{\partial Q_1}{\partial x_1} + \frac{\partial Q_2}{\partial x_2} = -p_n,$$

$$\frac{\partial M_1}{\partial x_1} + \frac{\partial H}{\partial x_2} - Q_1 = -m_1, \tag{2}$$

$$\frac{\partial M_2}{\partial x_2} + \frac{\partial H}{\partial x_1} - Q_2 = -m_2.$$

Уведемо позначення

$$G = k'G',\ \vec{\gamma} = \{\gamma_1, \gamma_2\}.$$

Підставляючи співвідношення (1) у перше рівняння (2), отримаємо

$$G\nabla \bullet \left(\nabla w + \vec{\gamma}\right) = -p_n. \tag{3}$$

Аналогічно, підставляючи співвідношення (1) у друге та третє рівняння (2), одержимо

$$-G\left(\nabla w + \vec{\gamma}\right) + \frac{1}{2}D\left(\Delta\vec{\gamma} + (1+\nu)\nabla\left(\nabla \bullet \vec{\gamma}\right)\right) = -\vec{m}, \tag{4}$$

де $\vec{m} = \{m_1, m_2\}$.

Надалі будемо вважати, що функції навантаження на пластинку задовольнять такі умови гладкості: $w \in L_2(\Omega)$, $m_1 \in L_2(\Omega)$, $m_2 \in L_2(\Omega)$.

Припустимо, що на границі Γ області Ω задано граничні умови

$$w = 0\,,\ \gamma_1 = 0\,,\ \gamma_2 = 0 \ \text{ на } \Gamma\,, \tag{5}$$

які відповідають жорсткому защемленню краю пластини.

Отож, крайова задача теорії пластин Тимошенка полягає у знаходженні функцій w, $\vec{\gamma}$, які задовольняють рівняння (3)-(4) і належать області визначення задачі, тобто множині

$$D_A = \left\{w, \vec{\gamma} : w \in W_2^2(\Omega), \vec{\gamma} \in W_2^2(\Omega); w = 0, \vec{\gamma} = 0, x \in \Omega\right\}. \tag{6}$$

3. СЛАБКЕ ФОРМУЛЮВАННЯ ЗАДАЧІ

Запишемо слабке формулювання задачі (3)-(5). Для цього домножимо рівняння (3) на деяку довільну функцію $\widetilde{w}$ та рівняння (4) на довільний вектор $\vec{\beta}$ (скалярно), зінтегруємо по області Ω та додамо одне до одного. Вважаємо, що $\widetilde{w}$, $\vec{\beta}$ належать області визначення оператора задачі (6). Одержимо

$$a\left(w, \vec{\gamma}, \widetilde{w}, \vec{\beta}\right) = l\left(\widetilde{w}, \vec{\beta}\right). \tag{7}$$

Тут

$$a\left(w, \vec{\gamma}, \widetilde{w}, \vec{\beta}\right) = -\int_\Omega \left(G\nabla \bullet (\nabla w)\widetilde{w} + G\nabla \bullet \vec{\gamma}\widetilde{w}\right) d\Omega +$$

$$`+\int_\Omega \left(G\vec{\gamma}\vec{\beta} + G\nabla w\vec{\beta} - \frac{1}{2} D\Delta\vec{\gamma}\vec{\beta} - \frac{1+\nu}{2} D\nabla\left(\nabla \bullet \vec{\gamma}\right)\vec{\beta} \right) d\Omega\,, \tag{8}$$

$$l\left(\widetilde{w}, \vec{\beta}\right) = \int_\Omega \left(p_n\widetilde{w} + \vec{m}\vec{\beta}\right) d\Omega\,.$$

Перетворимо вираз у правій частині білінійної форми $a\left(w, \vec{\gamma}, \widetilde{w}, \vec{\beta}\right)$ у (8).

Застосовуючи формулу Гріна для оператора Лапласа до першого доданку першого рядка та урахувавши граничні умови (5), отримаємо

$$-\int_\Omega G\nabla \bullet (\nabla w)\widetilde{w}\, d\Omega = G\int_\Omega \nabla w \nabla \widetilde{w}\, d\Omega\,.$$

Другий доданок першого рядка може бути перетворений з використанням формули Гауса-Остроградського так:

$$-\int_\Omega G\nabla \bullet \vec{\gamma}\widetilde{w}\, d\Omega = G\int_\Omega \vec{\gamma}\nabla\widetilde{w}\, d\Omega\,.$$

Третій доданок другого рядка формули (8) подамо у вигляді

$$-\int_\Omega \frac{1}{2} D\Delta\vec{\gamma}\vec{\beta}\, d\Omega = -\frac{1}{2} D\int_\Omega \left(\Delta\gamma_1\beta_1 + \Delta\gamma_2\beta_2\right) d\Omega\,.$$

Перетворимо праву частину цього виразу з використанням формули Гріна для оператора Лапласа. Отримаємо

$$-\int_\Omega \frac{1}{2} D\Delta\vec{\gamma}\vec{\beta}\, d\Omega = \frac{1}{2} D\int_\Omega \left(\nabla\gamma_1\nabla\beta_1 + \nabla\gamma_2\nabla\beta_2\right) d\Omega\,.$$

Розглянемо тепер четвертий доданок другого рядка виразу (8). З використанням формули Гауса-Остроградського одержимо

$$-\int_\Omega \frac{1+\nu}{2} D\nabla\left(\nabla \bullet \vec{\gamma}\right)\vec{\beta}\, d\Omega = \frac{1+\nu}{2} D\int_\Omega \left(\nabla \bullet \vec{\gamma}\right)\left(\nabla \bullet \vec{\beta}\right) d\Omega\,.$$

З урахуванням вигляду перетворених доданків перепишемо остаточно формулу для білінійної форми (8)

$$a\left(w,\vec{\gamma},\tilde{w},\vec{\beta}\right)=G\int_{\Omega}\nabla w\nabla\tilde{w}d\Omega+G\int_{\Omega}\left(\vec{\gamma}\nabla\tilde{w}+\vec{\beta}\nabla w\right)d\Omega+G\int_{\Omega}\vec{\gamma}\vec{\beta}d\Omega+$$

$$+\frac{1+\nu}{2}D\int_{\Omega}\left(\nabla\bullet\vec{\gamma}\right)\left(\nabla\bullet\vec{\beta}\right)d\Omega+\frac{1}{2}D\int_{\Omega}\left(\nabla\gamma_1\nabla\beta_1+\nabla\gamma_2\nabla\beta_2\right)d\Omega\,. \quad (9)$$

4. ЄДИНІСТЬ ТА ІСНУВАННЯ СЛАБКОГО РОЗВ'ЯЗКУ ЗАДАЧІ

Єдиність та існування слабкого розв'язку задачі (3)-(5) залежить від властивостей лінійної та білінійної форм $l\left(\tilde{w},\vec{\beta}\right)$ та $a\left(w,\vec{\gamma},\tilde{w},\vec{\beta}\right)$, відповідно. Якщо виявиться, що білінійна форма $a\left(w,\vec{\gamma},\tilde{w},\vec{\beta}\right)$ симетрична та додатно визначена, то на запитання про єдиність та існування слабкого розв'язку легко дати позитивну відповідь [2].

Розпочнемо з властивості симетрії білінійної форми. Правильна така лема.

Лема 1. *Білінійна форма* $a\left(w,\vec{\gamma},\tilde{w},\vec{\beta}\right)$ *є симетричною в області визначення* D_A (6) *оператора задачі* (8).

Доведення. Випливає з того факту, що до області визначення D_A оператора задачі (6)-(7) входять функції з множини C_0^{∞} та запису білінійної форми (9).

Доведемо таку теорему.

Теорема 2. *Білінійна форма* $a\left(w,\vec{\gamma},\tilde{w},\vec{\beta}\right)$ *додатно визначена в області визначення* D_A *оператора задачі* (6)-(7).

Доведення. Для доведення треба довести, що

$$a\left(w,\vec{\gamma},w,\vec{\gamma}\right)\geq\tilde{\alpha}^2\left\{\left\|w\right\|_{L_2}^2+\left\|\vec{\gamma}\right\|_{L_2}^2\right\},$$

де $\tilde{\alpha}$ – деяка постійна;

$$\left\|w\right\|^2=\int_{\Omega}w^2d\Omega\,,\ \left\|\vec{\gamma}\right\|^2=\int_{\Omega}\left(\gamma_1^2+\gamma_2^2\right)d\Omega\,.$$

Запишемо вираз для білінійної фоми з використанням формули (9)

$$a\left(w,\vec{\gamma},w,\vec{\gamma}\right)=G\int_{\Omega}\left(\nabla w\right)^2d\Omega+2G\int_{\Omega}\vec{\gamma}\nabla wd\Omega+G\int_{\Omega}\vec{\gamma}^2d\Omega+$$

$$+\frac{1+\nu}{2}D\int_{\Omega}\left(\nabla\bullet\vec{\gamma}\right)^2d\Omega+\frac{1}{2}D\int_{\Omega}\left(\left(\nabla\gamma_1\right)^2+\left(\nabla\gamma_2\right)^2\right)d\Omega\,. \quad (10)$$

Оцінимо знизу доданки попередньої формули.

Запишемо другий доданок формули (10) у скалярній формі

$$2G\int_{\Omega}\vec{\gamma}\nabla wd\Omega=2G\int_{\Omega}\left(\gamma_1\frac{\partial w}{\partial x_1}+\gamma_2\frac{\partial w}{\partial x_2}\right)d\Omega\,.$$

Використовуючи відому нерівність

$$2ab\geq-\varepsilon a^2-\frac{1}{\varepsilon}b^2\,,\ \forall a,b,\varepsilon\in R,\varepsilon>0\,, \quad (11)$$

оцінимо його знизу. Одержимо

$$2G\int_{\Omega}\vec{\gamma}\nabla wd\Omega\geq-G\int_{\Omega}\left(\varepsilon_1\gamma_1^2+\frac{1}{\varepsilon_1}\left(\frac{\partial w}{\partial x_1}\right)^2\right)d\Omega-G\int_{\Omega}\left(\varepsilon_2\gamma_2^2+\frac{1}{\varepsilon_2}\left(\frac{\partial w}{\partial x_2}\right)^2\right)d\Omega\,. \quad (12)$$

Четвертий доданок формули (10) подамо у вигляді

$$\frac{1+\nu}{2}D\int_\Omega(\nabla\bullet\vec{\gamma})^2\,d\Omega=\frac{1+\nu}{2}D\int_\Omega\left(\left(\frac{\partial\gamma_1}{\partial x_1}\right)^2+2\frac{\partial\gamma_1}{\partial x_1}\frac{\partial\gamma_2}{\partial x_2}+\left(\frac{\partial\gamma_2}{\partial x_2}\right)^2\right)d\Omega\,.$$

Для оцінки знизу подвоєного добутку у правій частині попередньої формули знову використаємо нерівність (11). Отримаємо

$$\int_\Omega 2\frac{\partial\gamma_1}{\partial x_1}\frac{\partial\gamma_2}{\partial x_2}\,d\Omega\ge-\int_\Omega\left(\varepsilon_3\left(\frac{\partial\gamma_1}{\partial x_1}\right)^2+\frac{1}{\varepsilon_3}\left(\frac{\partial\gamma_2}{\partial x_2}\right)^2\right)d\Omega\,.$$

Оцінимо тепер четвертий доданок (10) знизу нерівністю

$$\frac{1+\nu}{2}D\int_\Omega(\nabla\bullet\vec{\gamma})^2\,d\Omega\ge\frac{1+\nu}{2}D(1-\varepsilon_3)\int_\Omega\left(\frac{\partial\gamma_1}{\partial x_1}\right)^2d\Omega+\frac{1+\nu}{2}D\left(1-\frac{1}{\varepsilon_3}\right)\int_\Omega\left(\frac{\partial\gamma_2}{\partial x_2}\right)^2d\Omega\,. \tag{13}$$

Врахуємо нерівності (12)-(13) та оцінимо праву частину співвідношення (10) знизу. Одержимо

$$\begin{aligned}a(w,\vec{\gamma},w,\vec{\gamma})\ge{}&G\int_\Omega(\nabla w)^2\,d\Omega+G(1-\varepsilon_1)\int_\Omega\gamma_1^2d\Omega+G(1-\varepsilon_2)\int_\Omega\gamma_2^2d\Omega-G\frac{1}{\varepsilon_1}\int_\Omega\left(\frac{\partial w}{\partial x_1}\right)^2d\Omega-G\frac{1}{\varepsilon_2}\int_\Omega\left(\frac{\partial w}{\partial x_2}\right)^2d\Omega+\\&+\frac{1+\nu}{2}D(1-\varepsilon_3)\int_\Omega\left(\frac{\partial\gamma_1}{\partial x_1}\right)^2d\Omega+\frac{1+\nu}{2}D\left(1-\frac{1}{\varepsilon_3}\right)\int_\Omega\left(\frac{\partial\gamma_2}{\partial x_2}\right)^2d\Omega+\\&+\frac{1}{2}D\int_\Omega(\nabla\gamma_1)^2\,d\Omega+\frac{1}{2}D\int_\Omega(\nabla\gamma_2)^2\,d\Omega\,.\end{aligned} \tag{14}$$

Використаємо далі у процесі оцінювання нерівність Фрідріхса

$$\int_\Omega(\nabla\gamma_1)^2\,d\Omega\ge\alpha\int_\Omega\gamma_1^2d\Omega\,.$$

Оцінимо перший доданок в останньому рядку попередньої формули за допомогою цієї нерівності. Одержимо

$$\frac{1}{2}D\int_\Omega\left\{\left(\frac{\partial\gamma_1}{\partial x_1}\right)^2+\left(\frac{\partial\gamma_1}{\partial x_2}\right)^2\right\}d\Omega\ge\frac{1}{4}D\int_\Omega\left\{\left(\frac{\partial\gamma_1}{\partial x_1}\right)^2+\left(\frac{\partial\gamma_1}{\partial x_2}\right)^2\right\}d\Omega+\frac{1}{4}D\alpha\int_\Omega\gamma_1^2d\Omega\,.$$

Аналогічно оцінимо другий доданок останнього рядка цієї ж формули

$$\frac{1}{2}D\int_\Omega\left\{\left(\frac{\partial\gamma_2}{\partial x_1}\right)^2+\left(\frac{\partial\gamma_2}{\partial x_2}\right)^2\right\}d\Omega\ge\frac{1}{4}D\int_\Omega\left\{\left(\frac{\partial\gamma_2}{\partial x_1}\right)^2+\left(\frac{\partial\gamma_2}{\partial x_2}\right)^2\right\}d\Omega+\alpha\frac{1}{4}D\int_\Omega\gamma_2^2d\Omega\,.$$

Запишемо тепер нерівність (14) у вигляді

$$\begin{aligned}a(w,\vec{\gamma},w,\vec{\gamma})\ge{}&G\int_\Omega(\nabla w)^2\,d\Omega+G(1-\varepsilon_1)\int_\Omega\gamma_1^2d\Omega+G(1-\varepsilon_2)\int_\Omega\gamma_2^2d\Omega-G\frac{1}{\varepsilon_1}\int_\Omega\left(\frac{\partial w}{\partial x_1}\right)^2d\Omega-G\frac{1}{\varepsilon_2}\int_\Omega\left(\frac{\partial w}{\partial x_2}\right)^2d\Omega+\\&+\frac{1+\nu}{2}D(1-\varepsilon_3)\int_\Omega\left(\frac{\partial\gamma_1}{\partial x_1}\right)^2d\Omega+\frac{1+\nu}{2}D\left(1-\frac{1}{\varepsilon_3}\right)\int_\Omega\left(\frac{\partial\gamma_2}{\partial x_2}\right)^2d\Omega+\\&+\frac{1}{4}D\int_\Omega(\nabla\gamma_1)^2\,d\Omega+\frac{1}{4}D\int_\Omega(\nabla\gamma_2)^2\,d\Omega+\frac{1}{4}D\alpha\int_\Omega\gamma_1^2d\Omega+\frac{1}{4}D\alpha\int_\Omega\gamma_2^2d\Omega\,.\end{aligned}$$

Запишемо далі коефіцієнти при γ_1^2 та при $\left(\dfrac{\partial w}{\partial x_1}\right)^2$ і припускатимемо, що вони є більшими за нуль. Отримаємо умови

$$G(1-\varepsilon_1)+\frac{1}{4}D\alpha>0$$

та

$$G-\frac{G}{\varepsilon_1}>0\,.$$

Звідси знайдемо, що

$$1<\varepsilon_1<1+\frac{1}{4}\frac{D}{G}\alpha\,.$$

Аналогічно, записуючи коефіцієнти при γ_2^2 та при $\left(\frac{\partial w}{\partial x_2}\right)^2$ і припускаючи, що вони є більшими від нуля, одержимо

$$1<\varepsilon_2<1+\frac{1}{4}\frac{D}{G}\alpha\,.$$

Зрештою, зберемо коефіцієнти при $\left(\frac{\partial\gamma_1}{\partial x_1}\right)^2$ та при $\left(\frac{\partial\gamma_2}{\partial x_2}\right)^2$ і записуючи умови їхньої додатності, отримаємо

$$\frac{1+\nu}{2}D(1-\varepsilon_3)+D\frac{1}{4}>0\,,$$

$$\frac{1+\nu}{2}D\left(1-\frac{1}{\varepsilon_3}\right)+D\frac{1}{4}>0\,.$$

Звідси одержимо

$$1-\frac{1}{2(1+\nu)+1}<\varepsilon_3<1+\frac{1}{2(1+\nu)}\,.$$

З урахуванням отриманих співвідношень оцінимо білінійну форму знизу

$$a(w,\vec{\gamma},w,\vec{\gamma})\geq\int\limits_\Omega\left\{a_1\left(\frac{\partial w}{\partial x_1}\right)^2+a_2\left(\frac{\partial w}{\partial x_2}\right)^2+a_3\gamma_1^2+a_4\gamma_2^2\right\}d\Omega+$$

$$+\int\limits_\Omega\left\{a_5\left(\frac{\partial\gamma_1}{\partial x_1}\right)^2+a_6\left(\frac{\partial\gamma_1}{\partial x_2}\right)^2+a_7\left(\frac{\partial\gamma_2}{\partial x_1}\right)^2+a_8\left(\frac{\partial\gamma_2}{\partial x_2}\right)^2\right\}d\Omega\,. \qquad (15)$$

Зазначимо, що з огляду на проведені дослідження коефіцієнти у правій частині нерівності (15) строго додатні.

Очевидно, що з нерівності (15), враховуючи нерівність Фрідріхса, можемо легко отримати таку оцінку:

$$a(w,\vec{\gamma},w,\vec{\gamma})\geq\tilde{\alpha}^2\left\{\|w\|_{L_2}^2+\|\vec{\gamma}\|_{L_2}^2\right\}.$$

Теорему доведено.

Доведемо тепер оцінку для оператора задачі

$$m^2\|u\|_{W_2^{(1)}}^2\leq\|u\|_A^2\leq M^2\|u\|_{W_2^{(1)}}^2\,,$$

де

$$u=(w,\vec{\gamma}),$$

$$\|u\|_A^2 = a(u,u)\,,$$

$$\|u\|^2_{W_2^{(1)}} = \int_\Omega \left(w^2 + \gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial x_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial \gamma_1}{\partial x_1}\right)^2 + \right.$$
$$\left. + \left(\frac{\partial \gamma_1}{\partial x_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial \gamma_2}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial \gamma_2}{\partial x_2}\right)^2 \right) d\Omega.$$

Очевидно, що з нерівності (15), враховуючи нерівність Фрідріхса, можемо легко отримати таку оцінку:

$$m^2 \|u\|^2_{W_2^{(1)}} \le \|u\|_A^2\,.$$

Залишається довести, що

$$\|u\|_A^2 \le M^2 \|u\|^2_{W_2^{(1)}}\,.$$

Запишемо ще раз вираз для білінійної форми.

$$a\left(w,\vec\gamma,w,\vec\gamma\right) = G\int_\Omega (\nabla w)^2 d\Omega + 2G\int_\Omega \vec\gamma \nabla w d\Omega + G\int_\Omega \vec\gamma^{\,2} d\Omega +$$
$$+ \frac{1+\nu}{2} D \int_\Omega (\nabla \bullet \vec\gamma)^2 d\Omega + \frac{1}{2} D \int_\Omega \left((\nabla\gamma_1)^2 + (\nabla\gamma_2)^2\right) d\Omega\,. \tag{16}$$

Розглянемо другий доданок першого рядка і застосуємо до нього нерівність Коші-Шварца. Одержимо

$$2G\int_\Omega \vec\gamma\nabla w d\Omega = 2G\int_\Omega \left(\gamma_1 \frac{\partial w}{\partial x_1} + \gamma_2 \frac{\partial w}{\partial x_2}\right) d\Omega \le$$
$$\le 2G\left(\left(\int_\Omega \gamma_1^2 d\Omega\right)^{\frac12} \left(\int_\Omega \left(\frac{\partial w}{\partial x_1}\right)^2 d\Omega\right)^{\frac12} + \left(\int_\Omega \gamma_2^2 d\Omega\right)^{\frac12} \left(\int_\Omega \left(\frac{\partial w}{\partial x_2}\right)^2 d\Omega\right)^{\frac12} \right).$$

Використаємо тепер нерівність

$$2ab \le a^2 + b^2\,,\ a,b \in R\,. \tag{17}$$

Отримаємо

$$2G\left(\left(\int_\Omega \gamma_1^2 d\Omega\right)^{\frac12} \left(\int_\Omega \left(\frac{\partial w}{\partial x_1}\right)^2 d\Omega\right)^{\frac12} + \left(\int_\Omega \gamma_2^2 d\Omega\right)^{\frac12} \left(\int_\Omega \left(\frac{\partial w}{\partial x_2}\right)^2 d\Omega\right)^{\frac12} \right) \le$$
$$\le G\left(\int_\Omega \gamma_1^2 d\Omega + \int_\Omega \left(\frac{\partial w}{\partial x_1}\right)^2 d\Omega + \int_\Omega \gamma_2^2 d\Omega + \int_\Omega \left(\frac{\partial w}{\partial x_2}\right)^2 d\Omega \right).$$

У підсумку одержимо

$$2G\int_\Omega \vec\gamma\nabla w d\Omega \le G\left(\int_\Omega \gamma_1^2 d\Omega + \int_\Omega \left(\frac{\partial w}{\partial x_1}\right)^2 d\Omega + \int_\Omega \gamma_2^2 d\Omega + \int_\Omega \left(\frac{\partial w}{\partial x_2}\right)^2 d\Omega \right). \tag{18}$$

Розглянемо тепер передостанній доданок у виразі білінійної форми (16). Розписавши його по компонентах та застосувавши почергово нерівності Коші-Шварца та (17), отримаємо

$$\frac{1+\nu}{2}D\int_{\Omega}\left(\nabla\bullet\vec{\gamma}\right)^2 d\Omega=\frac{1+\nu}{2}D\int_{\Omega}\left(\frac{\partial\gamma_1}{\partial x_1}+\frac{\partial\gamma_2}{\partial x_2}\right)^2 d\Omega=$$

$$=\frac{1+\nu}{2}D\int_{\Omega}\left(\left(\frac{\partial\gamma_1}{\partial x_1}\right)^2+\left(\frac{\partial\gamma_2}{\partial x_2}\right)^2+2\frac{\partial\gamma_1}{\partial x_1}\frac{\partial\gamma_2}{\partial x_2}\right)d\Omega=$$

$$=(1+\nu)D\int_{\Omega}\frac{\partial\gamma_1}{\partial x_1}\frac{\partial\gamma_2}{\partial x_2}d\Omega+\frac{1+\nu}{2}D\int_{\Omega}\left(\left(\frac{\partial\gamma_1}{\partial x_1}\right)^2+\left(\frac{\partial\gamma_2}{\partial x_2}\right)^2\right)d\Omega\le$$

$$\le(1+\nu)D\left(\int_{\Omega}\left(\frac{\partial\gamma_1}{\partial x_1}\right)^2 d\Omega\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_{\Omega}\left(\frac{\partial\gamma_2}{\partial x_2}\right)^2 d\Omega\right)^{\frac{1}{2}}+\frac{1+\nu}{2}D\int_{\Omega}\left(\left(\frac{\partial\gamma_1}{\partial x_1}\right)^2+\left(\frac{\partial\gamma_2}{\partial x_2}\right)^2\right)d\Omega\le \tag{19}$$

$$\le\frac{1+\nu}{2}D\left(\int_{\Omega}\left(\frac{\partial\gamma_1}{\partial x_1}\right)^2 d\Omega+\int_{\Omega}\left(\frac{\partial\gamma_2}{\partial x_2}\right)^2 d\Omega\right)+\frac{1+\nu}{2}D\int_{\Omega}\left(\left(\frac{\partial\gamma_1}{\partial x_1}\right)^2+\left(\frac{\partial\gamma_2}{\partial x_2}\right)^2\right)d\Omega=$$

$$=(1+\nu)D\int_{\Omega}\left(\left(\frac{\partial\gamma_1}{\partial x_1}\right)^2+\left(\frac{\partial\gamma_2}{\partial x_2}\right)^2\right)d\Omega\,.$$

Враховуючи нерівності (18)-(19), можемо оцінити зверху білінійну форму так:

$$a(w,\vec{\gamma},w,\vec{\gamma})\le G\int_{\Omega}\left(\left(\frac{\partial w}{\partial x_1}\right)^2+\left(\frac{\partial w}{\partial x_2}\right)^2\right)d\Omega+$$

$$+G\left(\int_{\Omega}\gamma_1^2 d\Omega+\int_{\Omega}\left(\frac{\partial w}{\partial x_1}\right)^2 d\Omega+\int_{\Omega}\gamma_2^2 d\Omega+\int_{\Omega}\left(\frac{\partial w}{\partial x_2}\right)^2 d\Omega\right)+$$

$$+G\int_{\Omega}\left(\gamma_1^2+\gamma_2^2\right)d\Omega+(1+\nu)D\int_{\Omega}\left(\left(\frac{\partial\gamma_1}{\partial x_1}\right)^2+\left(\frac{\partial\gamma_2}{\partial x_2}\right)^2\right)d\Omega+$$

$$+\frac{1}{2}D\int_{\Omega}\left(\left(\frac{\partial\gamma_1}{\partial x_1}\right)^2+\left(\frac{\partial\gamma_1}{\partial x_2}\right)^2+\left(\frac{\partial\gamma_2}{\partial x_1}\right)^2+\left(\frac{\partial\gamma_2}{\partial x_2}\right)^2\right)d\Omega\le$$

$$\le\int_{\Omega}\left(w^2+2G\gamma_1^2+2G\gamma_2^2+2G\left(\frac{\partial w}{\partial x_1}\right)^2+2G\left(\frac{\partial w}{\partial x_2}\right)^2+\left(\frac{3}{2}+\nu\right)D\left(\frac{\partial\gamma_1}{\partial x_1}\right)^2+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{2}D\left(\frac{\partial\gamma_1}{\partial x_2}\right)^2+\frac{1}{2}D\left(\frac{\partial\gamma_2}{\partial x_1}\right)^2+\left(\frac{3}{2}+\nu\right)D\left(\frac{\partial\gamma_2}{\partial x_2}\right)^2\right)d\Omega$$

Отже,

$$\|u\|_A^2\le M^2\|u\|_{W_2^{(1)}}^2\,.$$

У підсумку доведено нерівність

$$m^2\|u\|_{W_2^{(1)}}^2\le\|u\|_A^2\le M^2\|u\|_{W_2^{(1)}}^2\,.$$

Одержана нерівність дає підстави з використанням леми Сеа зробити висновок про оцінку похибки

$$\left\| u_0 - u_h \right\|^2_{W_2^{(1)}} \le \frac{M^2}{m^2} t^k \left\| u_0 \right\|^2_{W_2^{(k+1)}} ,$$

де t – діаметр поділу області Ω на скінченні елементи; u_0 – точний розв'язок задачі; u_h – наближений розв'язок задачі; знайдений за допомогою МСЕ з базисними функціями порядку k.

5. ЧИСЛОВІ РЕЗУЛЬТАТИ

Розглянемо одновимірну задачу моделі Тимошенка. Вона набула вигляду

$$-G\left(\frac{d\gamma_1}{d\alpha_1} + \frac{d^2 w}{d\alpha_1^2} \right) = f_1(\alpha_1),$$

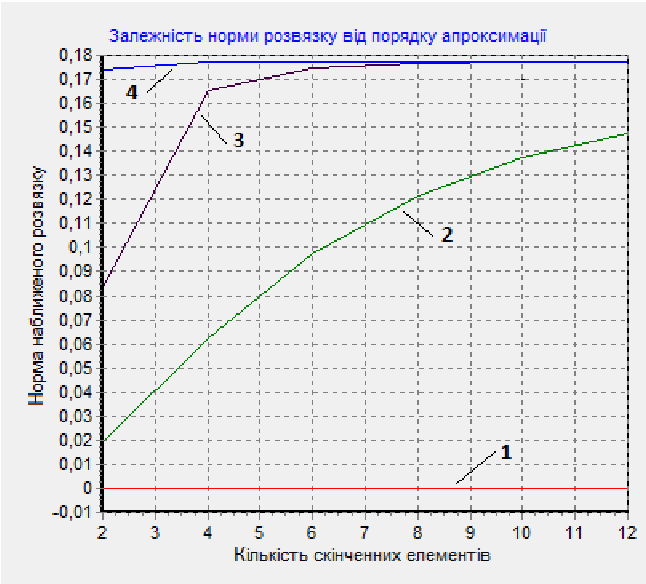
$$-D\frac{d^2\gamma_1}{d\alpha_1^2} + G\left(\gamma_1 + \frac{dw}{d\alpha_1} \right) = f_2(\alpha_1), \ \alpha_1 \in (a,b).$$

Тут $w(\alpha_1)$ – прогин точки α_1 серединної площини; $\gamma_1(\alpha_1)$ – кут повороту нормалі в точці до серединної площини в напрямі осі α_1.

Приймемо $f_1 = P = const$, $f_2 = 0$, $\gamma_1(0) = \gamma_1(1) = w(0) = w(1) = 0$, $[a,b] = [0,1]$. У цьому випадку аналітичний розв'язок задачі набуде вигляду

$$w = \frac{P}{2G}\alpha_1 + \left(\frac{P}{24D} - \frac{P}{2G} \right)\alpha_1^2 - \frac{P}{12D}\alpha_1^3 + \frac{P}{24D}\alpha_1^4 ,$$

$$\gamma_1 = -\frac{P}{12D}\alpha_1 + \frac{P}{4D}\alpha_1^2 - \frac{P}{6D}\alpha_1^3 .$$



Залежність норми наближеного розв'язку від порядку апроксимації

Використаємо для чисельного розв'язку цієї задачі МСЕ, побудований на основі функцій-бульбашок [5]. При використанні функцій сьомого порядку та

4 елементів одержимо наближений розв'язок, який дуже близький до аналітичного. З цих міркувань графіки розв'язків не подають. Похибка розв'язку в нормі максимуму не перевищуватиме 10^{-7}.

Знайдемо тепер значення енергетичної норми розв'язку залежно від кількості елементів і порядку базисних функцій, які використовують для наближення аналітичного розв'язку. Результати подамо у вигляді графіка. На графіку номер кривих збігається з відповідними порядками апроксимацій функціями-бульбашками.

Зауважимо, що норма точного розв'язку для цієї задачі становить 0.1777. З наведеного графіка бачимо, що зі збільшенням порядку апроксимаційних функцій норма наближеного розв'язку збігається до норми точного розв'язку (за винятком апроксимацій першого порядку) для меншої кількості скінченних елементів. За допомогою апроксимацій першого порядку неможливо досягнути доброї точності наближеного розв'язку. Це явище відоме в літературі [4] під назвою “locking effect”.

6. ВИСНОВКИ

Отримані результати свідчать про те, що задача математичної моделі Тимошенка має єдиний слабкий розв'язок за будь-яких фізично вмотивованих параметрів моделі.

Щодо чисельних результатів, то апроксимація точного розв'язку функціями-бульбашками є достатньо високої точності (особливо це стосується вищих порядків базисних функцій).

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. *Винницька Л.І.* Деякі нерівності типу Корна в лінійній теорії оболонок / Л.І. Винницька, Н.Я. Савула // Прикладні проблеми механіки і математики. – 2008. – Вип. 6. – С. 132-138.
2. *Савула Я.Г.* Числовий аналіз задач математичної фізики варіаційними методами / Я.Г. Савула. – Львів: Видавничий центр ЛНУ ім. І. Франка, 2004. – 221 с.
3. *Пелех Б.Л.* Обобщенная теория оболочек / Б.Л. Пелех. – Львов: Вища шк., 1978. – 158 с.
4. *Савула Я.Г.* Расчет и оптимизация оболочек с резными поверхностями / Я.Г. Савула, Н.П. Флейшман. – Львов: Вища шк., 1989. – 170 с.
5. *Szabo B.* Finite element analysis / B. Szabo, I. Babuska. – New York: John Wiley & Sons, 1991. – 368 p.

Стаття: надійшла до редколегії 06.07.2011
доопрацьована 01.09.2011
прийнята до друку 08.09.2011

АНАЛИЗ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ТИМОШЕНКО

И. Муха[*], Н. Савула[**], А. Стягар[*]

[*]*Львовский национальный университет имени Ивана Франко,*
ул. Университетская, 1, Львов, 79000, e-mail: kpm@franko.lviv.ua
[**]*HP Ukraine, e-mail: kpm@franko.lviv.ua*

Доказано существование и единственность слабого решения математической модели изгиба пластины Тимошенко. Кроме того, приведено численные результаты решения данной задачи в одномерном случае, полученные на основании использования функций-пузырьков.

Полученные численные результаты дают основания для использования функций-пузырьков и в случае нелинейной задачи модели Тимошенко.

Ключевые слова: модель Тимошенко, изгиб пластины, существование и единственность.

ANALYSIS OF THE MATHEMATICAL MODEL OF TYMOSHENKO

I. Mukha[*], N. Savula[**], A. Styahar[*]

[*]*Ivan Franko National University of Lviv,*
Universytetska str, 1, Lviv, 79000, e-mail: kpm@franko.lviv.ua
[**]*HP Ukraine, e-mail: kpm@franko.lviv.ua*

The article contains the proof of existence and uniqueness of the weak solution for the mathematical model of Tymoshenko. Numerical results for this model in the one dimensional case, obtained with the use of bubble functions, are provided. With the present numerical results it becomes reasonable to use the approximations based on bubble functions also in the case of nonlinear mathematical model of Tymoshenko.

Key words: model of Tymoshenko, existence and uniqueness.