ISSN 2078–5097. Вісн. Львів. ун-ту. Сер. пр. матем. та інф. 2012. Вип. 18. С. 157–164
Visnyk of the Lviv University. Series Appl. Math. and Informatics. Issue 18. P. 157–164

УДК 519.21

ОСНОВНІ МАТЕМАТИЧНІ ХАРАКТЕРИСТИКИ ФУНКЦІОНАЛА ВИПЛАТ

Я. Єлейко, Т. Лазарів, С. Мазур

*Львівський національний університет імені Івана Франка,
вул. Університетська, 1, Львів, 79000, e-mail: lazariv@rambler.ru*

Останнім часом на фінансовому ринку стало актуальним оцінювання виплат за опціонами в умовах певної нестабільності чи невизначеності на ринку. Варто зазначити, що цій проблемі було присвячено велику кількість досліджень в умовах стабільності фінансового ринку. Ми ж розглянули виплати за Європейським опціоном, які залежать від політичних ситуацій, побудувавши відповідний ланцюг Маркова на множині станів, які є виплатами. Отож, ми зробили математичну інтерпретацію економічної моделі ринку.

Ключові слова: ланцюг Маркова, стаціонарний розподіл, опціон, перехідні ймовірності.

1. ВСТУП

Наша мета – обчислити основні математичні характеристики для функціонала

$$f(x(t)) = \int_0^t B(x(s))ds\,,$$

де $B(x(s))$ – ціна облігації, тобто математичне сподівання, дисперсія та очікуваний ризик для цього функціонала на ланцюгу Маркова з неперервним і дискретним часами.

Ми розглянули модель фінансового ринку, в якій весь часовий інтервал $[0,T]$ в неперервній моделі розбито на кроки $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_n, n \geq 1$, а в дискретній моделі на кроки з довжиною 1. Використовуючи відповідні ергодичні теореми для ланцюга Маркова з неперервним і дискретним часами, знаходимо математичне сподівання $f(x(t))$, дисперсію і очікуваний ризик $f(x(t))$. Отримані результати мають теоретичне та практичне застосування для перевірки точності моделювання цін похідних цінних паперів в економіці та фінансах.

2. ОСНОВНІ ТЕОРЕТИЧНІ ВІДОМОСТІ

Ланцюги Маркова використовують для опису систем, у яких стан системи в певний момент часу повністю визначає імовірнісні характеристики наступної еволюції системи. Такі системи називаються стохастично означеними. Множина станів системи може бути довільною, і в цьому випадку процес, що описує еволюцію системи, називається процесом Маркова. Коли ж можливі стани системи утворюють скінченну або зліченну множину, то такий процес Маркова називається ланцюгом Маркова. Далі подаємо точне означення цього поняття.

Нехай $X = \{x_1, x_2, \ldots\}$ – певна скінченна або зліченна множина, елементи якої далі називатимуться станами ланцюга Маркова. Ми будемо розглядати випадкові функції $x(t)$ з значеннями в *X,* які означені або для всіх $t \geq 0$, або для $t = 0,1,2,\ldots$. Таку функцію називатимемо ланцюгом Маркова, якщо існує така функція $p(x,t,y,s), 0 \leq t \leq s,\ x, y \in X$, що для $t_1 < t_2 < \ldots < t_n$ і довільних $x_1, \ldots, x_n$

$$P\left(\bigcap_{k=1}^{n}\{x(t_k)=x_k\}\right)=P\{x(t_1)=x_1\}\prod_{k=1}^{n-1}p(x_k,t_k,x_{k+1},t_{k+1}). \quad (1)$$

У тому випадку, коли $p(x,t,y,s)$ залежить лише від $s-t$, тобто $p(x,t,y,s)=p(x,0,y,s-t)$, ланцюг Маркова називається однорідним.

Розглянемо однорідні процеси детальніше. Занумеруємо стани системи $X=\{x_1,x_2,...\}$ і позначимо $p(x_i,t,x_j,s)=p_{ij}(s-t)$.

Побудуємо матрицю

$$\Pi(t)=\left\|p_{ij}(t)\right\|. \quad (2)$$

Порядок цієї матриці дорівнює кількості станів; якщо кількість станів зліченна, то матриця нескінченна. Ця матриця називається матрицею переходу ланцюга. За правилами множення матриць

$$\Pi(t)\Pi(s)=\left\|\sum_k p_{ik}(t)p_{kj}(s)\right\|.$$

З властивості 3 [1] функції перехідних ймовірностей випливає, що

$$\sum_k p_{ik}(t)p_{kj}(s)=p_{ij}(t+s).$$

Отже, матриці $\Pi(t)$ задовольняють таке рівняння:

$$\Pi(t+s)=\Pi(t)\Pi(s). \quad (3)$$

Надалі вивчатимемо лише однорідні ланцюги Маркова.

Розглянемо ланцюги Маркова з дискретним часом, тобто той випадок, коли t = 0, 1, 2, ... З (3) випливає, що

$$\Pi(t)=\Pi(1)^t.$$

Отже, для того, щоб задати матрицю переходу для однорідного ланцюга Маркова з дискретним часом, достатньо задати матрицю $\Pi(1)$, яка називається матрицею переходу за 1 крок.

Зауважимо, що та сама матриця переходу може відповідати різним ланцюгам Маркова. Розподіли таких ланцюгів Маркова розрізнятимуть за розподілом $x(0)$. Якщо $P\{x(0)=x_k\}=q_k$, то

$$P\{x(0)=x_{i_0},...,x(t)=x_{i_t}\}=q_{i_0}p_{i_0i_1}...p_{i_{t-1}i_t},$$

де $p_{ij}=p_{ij}(1)$. У багатьох випадках розподіл $x(0)$ (він називається початковим розподілом) не фіксують, а розглядають лише умовні ймовірності. Це означає, що замість однієї випадкової функції розглядають сукупність випадкових функцій, кожна з яких є ланцюгом Маркова з тією самою перехідною імовірністю, але з різними початковими розподілами. Інколи ця сукупність і називається процесом Маркова.

Нехай

$$\begin{pmatrix} p_{11} & \cdots & p_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ p_{n1} & \cdots & p_{nn} \end{pmatrix}$$

є матрицею переходу за 1 крок для однорідного ланцюга Маркова, тобто матриця з невід'ємними елементами, і суми елементів в кожному рядку дорівнюють 1. Такі матриці називаються стохастичними.

Для стохастичної матриці

$$\Pi = \begin{pmatrix} p_{11} & \cdots & p_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ p_{n1} & \cdots & p_{nn} \end{pmatrix}$$

завжди існують такі числа $q_1,...,q_n$, що $\sum_k q_k p_{ki} = q_i$, $i = 1,...,n$, $0 \le q_i$, $\sum q_i = 1$. Якщо $x(t)$ однорідний ланцюг Маркова з n станами і матрицею переходу за 1 крок Π, а $P\{x(0) = x_k\} = q_k$, то для всіх t $P\{x(t) = k\} = q_k$. Розподіл $\{q_1,...,q_n\}$ називається стаціонарним для цього ланцюга Маркова.

Теорема 1 (*дискретний випадок*). *Нехай X утворює один рекурентний додатний клас із стаціонарним розподілом $\{q_x\}$, а функція $f(x)$ на X задовольняє умову*

$$\sum_x q_x \left| f(x) \right| < \infty .$$

Тоді з імовірністю 1

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \sum_{t=0}^{T-1} f\big(x(t)\big) = \sum_y q_y f(y). \qquad (4)$$

Теорема 2 (*неперервний випадок*). *Нехай виконуються такі умови*: *а*) *стани вкладеного ланцюга Маркова утворюють один додатний клас із стаціонарними ймовірностями* π_j; *б*) *всі стани ланцюга Маркова регулярні, і коефіцієнти* q_j *задовольняють умову*

$$\sum \pi_j q_j^{-2} < \infty ;$$

в) *функція* $f(x)$ *на станах ланцюга така, що*

$$\sum f^2(i) \pi_i q_i^{-2} < \infty .$$

Тоді з імовірністю 1

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T f(x(t))dt = \frac{\sum f(i)\pi_i q_i^{-1}}{\sum \pi_i q_i^{-1}} .$$

3. ОСНОВНІ МАТЕМАТИЧНІ ХАРАКТЕРИСТИКИ ФУНКЦІОНАЛА ВИПЛАТ. МОДЕЛЬ З ДИСКРЕТНИМ ЧАСОМ

Скінченний випадок (блукання з пружними екранами). Нехай матриця перехідних ймовірностей задається так:

$$p_{01} = 1,\ p_{kk-1} = p_{kk+1} = \frac{1}{2},\ 0 < k < n,\ p_{nn-1} = 1 .$$

Знайдемо стаціонарний розподіл $\{q_i\}_{i=0}^n$

$$\begin{matrix} q_0 = q_n \\ q_1 = q_2 = \ldots = q_{n-1} \end{matrix} \quad \Rightarrow \quad 2q_0 = q_1 = \ldots = q_{n-1} = 2q_n = \frac{1}{n} .$$

Отже, стаціонарний розподіл для цього випадку набуде вигляду $(n+1)$-вимірного вектора

$$\vec{q} = \left\{ \frac{1}{2n}, \frac{1}{n}, \ldots, \frac{1}{n}, \frac{1}{2n} \right\} .$$

Запишемо матрицю перехідних ймовірностей:

$$\Pi = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

Отримавши стаціонарний розподіл для цієї матриці переходу, ми можемо знайти математичне сподівання, дисперсію та очікуваний ризик для функціонала $f(i) = (1+r)^i \Delta\tau_i$, $r_k > -1$, $i = 0,...,n$ за допомогою ергодичної теореми для дискретного часу, але перед тим перевіримо необхідні умови існування границі $\sum_x q_x \left| f(x) \right| < \infty$

$$\sum_x q_x \left| f(x) \right| = \frac{1}{2n^2}\left[1+(1+r)^n\right] + \frac{(1+r)}{n^2}\frac{(1+r)^{n-1}-1}{r} < \infty$$

оскільки $n, r < \infty$.

Тепер можемо застосувати теорему й обчислити математичне сподівання

$$E(f) = \sum_x f(x) q_x = \frac{1}{2n^2}\left[1+\left(1+r\right)^n\right] + \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n-1}(1+r)^i =$$
$$= \frac{1}{2n^2}\left[1+(1+r)^n\right] + \frac{1}{n^2}(1+r)\frac{(1+r)^{n-1}-1}{r} =$$
$$= \frac{1}{2n^2}\left[1+(1+r)^n\right] + \frac{(1+r)}{n^2}\frac{(1+r)^{n-1}-1}{r}.$$

Наступне наше завдання – знайти дисперсію функціонала, яку ми обчислимо за такою формулою:

$$Var(f) = E(f^2) - (E(f))^2.$$

Оскільки $E(f)$ нам відоме, то залишається знайти тільки $E(f^2)$, яке ми знову обчислимо за допомогою ергодичної теореми, перед цим перевіривши необхідні умови існування математичного сподівання $E(f^2)$

$$\sum_x | f^2(x) | q_x = \frac{1}{2n^3}\left[1+(1+r)^{2n}\right] + \frac{1}{n^3}\sum_{i=1}^{n-1}(1+r)^{2i} =$$
$$= \frac{1}{2n^3}\left[1+(1+r)^{2n}\right] + \frac{1}{n^3}(1+r)^2\frac{1-(1+r)^{2(n-1)}}{1-(1+r)^2} < \infty.$$

Оскільки виконуються необхідні умови існування математичного сподівання для f^2, то ми можемо його знайти

$$E(f^2) = \sum_x f^2(x) q_x = \frac{1}{2n^3}\left[1+(1+r)^{2n}\right] + \frac{1}{n^3}\sum_{i=1}^{n-1}(1+r)^{2i} =$$
$$= \frac{1}{2n^3}\left[1+(1+r)^{2n}\right] + \frac{1}{n^3}(1+r)^2\frac{1-(1+r)^{2(n-1)}}{1-(1+r)^2}.$$

Знайдемо дисперсію за відомою формулою

$$Var(f) = E(f^2) - (E(f))^2 =$$

$$=\frac{1}{2n^3}\left[1+(1+r)^{2n}\right]+\frac{1}{n^3}(1+r)^2\frac{1-(1+r)^{2(n-1)}}{1-(1+r)^2}-\frac{1}{4n^4}\left[1+(1+r)^n+2(1+\frac{1}{r})((1+r)^{n-1}-1)\right]^2.$$

Отримавши дисперсію та математичне сподівання, ми можемо знайти таку математичну характеристику, як очікуваний ризик для функціонала f за такою формулою:

$$\sigma=\frac{\sqrt{Var(f)}}{E(f)}=$$

$$=\frac{\sqrt{\frac{1}{2n^3}\left[1+(1+r)^{2n}\right]+\frac{1}{n^3}(1+r)^2\frac{1-(1+r)^{2(n-1)}}{1-(1+r)^2}-\frac{1}{4n^4}\left[1+(1+r)^n+2(1+\frac{1}{r})((1+r)^{n-1}-1)\right]^2}}{\frac{1}{2n^3}\left[1+(1+r)^{2n}\right]+\frac{1}{n^3}(1+r)^2\frac{1-(1+r)^{2(n-1)}}{1-(1+r)^2}}.$$

4. ЗЛІЧЕННИЙ ВИПАДОК

Розглянемо випадок, коли матриця перехідних ймовірностей задається так:

$$p_{n0}=p,\quad p_{nn+1}=1-p,\quad 0<p<1,$$

$$\Pi=\begin{pmatrix} p & (1-p) & 0 & \cdots \\ p & 0 & (1-p) & \cdots \\ p & 0 & 0 & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ p & 0 & 0 & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix}.$$

Знайдемо стаціонарний розподіл $\{\pi_i\}_{i=0}^{\infty}$

$$\pi_0 p+\pi_1 p+\pi_2 p+...+\pi_n p+...=\pi_0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow p(\pi_0+\pi_1+\pi_2+...+\pi_n+...)=\pi_0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \pi_0=p;$$
$$(1-p)\pi_0=\pi_1 \Rightarrow \pi_1=p(1-p).$$

Тому ми отримуємо такий стаціонарний розподіл

$$\pi_i=p(1-p)^i.$$

Знову ж таки для заданої матриці перехідних ймовірностей знаходимо математичні характеристики функціонала f за відповідною теоремою, перевіривши спочатку необхідні умови існування цих характеристик

$$\sum \pi_i q_i^{-2}=\sum_{i=0}^{\infty} p(1-p)^i a^{-2i}=\frac{a^2 p}{a^2-1+p}<\infty,$$

бо $a, p<\infty$.

$$\sum f^2(i)\pi_i q_i^{-2}=m^2 p\sum_{i=0}^{\infty}(1+r)^{2i}a^{-6i}(1-p)^i a^{-2i}=$$

$$=m^2 p\sum_{i=0}^{\infty}\left[\frac{(1+r)^2(1-p)}{a^8}\right]^i=\frac{m^2a^8p}{a^8-(1+r)^2(1-p)}<\infty$$

бо $a, r, p<\infty$.

Виконання цих умов дає змогу нам скористатись ергодичною теоремою для обчислення математичного сподівання

$$\sum f(i)\pi_i q_i^{-1} = mp\sum_{i=0}^{\infty}(1+r)^i a^{-3i}(1-p)^i a^{-i} = \frac{ma^4 p}{a^4-(1+r)(1-p)};$$

$$\sum \pi_i q_i^{-1} = p\sum_{i=0}^{\infty}(1-p)^i a^{-i} = \frac{ap}{a-1+p};$$

$$E(f) = \frac{\sum f(i)\pi_i q_i^{-1}}{\sum \pi_i q_i^{-1}} =$$

$$= \frac{\dfrac{ma^4 p}{a^4-(1+r)(1-p)}}{\dfrac{ap}{a-1+p}} = \frac{ma^4 p(a-1+p)}{ap(a^4-(1+r)(1-p))} = \frac{ma^3(a-1+p)}{a^4-(1+r)(1-p)}.$$

Обчислимо дисперсію для функціонала в цьому випадку за вже згаданою формулою. Спочатку обчислимо $E(f^2)$, але перед тим перевіримо необхідні умови існування цього математичного сподівання

$$\sum f^4(i)\pi_i q_i^{-2} = m^4 p\sum_{i=0}^{\infty}(1-p)^i(1+r)^{4i}a^{-12i}a^{-2i} = \frac{m^4 a^{14} p}{a^{14}-(1-p)(1+r)^4} < \infty,$$

бо $a, p, r < \infty$.

Другу умову вже перевірили.

Оскільки ці умови виконуються, то можемо обчислити $E(f^2)$

$$\sum f^2(i)\pi_i q_i^{-1} = m^2 p\sum_{i=0}^{\infty}(1+r)^{2i}a^{-6i}(1-p)^i a^{-i} = \frac{m^2 a^7 p}{a^7-(1+r)^2(1-p)}$$

$$E(f^2) = \frac{\sum f^2(i)\pi_i q_i^{-1}}{\sum \pi_i q_i^{-1}} = \frac{\dfrac{m^2 a^7 p}{a^7-(1+r)^2(1-p)}}{\dfrac{ap}{a-1+p}} = \frac{m^2 a^6(a-1+p)}{a^7-(1+r)^2(1-p)}.$$

Отже, дисперсія нашого функціонала в цьому випадку така:

$$Var(f) = \frac{m^2 a^6(a-1+p)}{a^7-(1+r)^2(1-p)} - \left[\frac{ma^3(a-1+p)}{a^4-(1+r)(1-p)}\right]^2.$$

Отримавши дисперсію та математичне сподівання, можемо знайти таку математичну характеристику, як очікуваний ризик для функціонала f за поданою формулою

$$\sigma = \frac{\sqrt{Var(f)}}{E(f)} = \frac{\sqrt{\dfrac{m^2 a^6(a-1+p)}{a^7-(1+r)^2(1-p)} - \left[\dfrac{ma^3(a-1+p)}{a^4-(1+r)(1-p)}\right]^2}}{\dfrac{ma^3(a-1+p)}{a^4-(1+r)(1-p)}} =$$

$$
=\frac{\sqrt{\dfrac{1}{[a^7-(1+r)^2(1-p)](a-1+p)}-\dfrac{1}{\left[a^4-(1+r)(1-p)\right]^2}}}{\dfrac{1}{a^4-(1+r)(1-p)}}=
$$

$$
=\sqrt{\frac{\left[a^4-(1+r)(1-p)\right]^2}{[a^7-(1+r)^2(1-p)](a-1+p)}-1}\,.
$$

5. ВИСНОВКИ

Ми розглянули виплати за Європейським опціоном, які залежать від політичних ситуацій, побудовані на підставі відповідного ланцюга Маркова на множині станів, які є виплатами.

Обчислили основні математичні характеристики для функціонала

$$
f(x(t))=\int_0^t B(x(s))ds\,,
$$

тобто математичне сподівання, дисперсія та очікуваний ризик для ланцюга Маркова з дискретним і неперервним часами. Одержані результати мають теоретичне значення, їх можна застосовувати на практиці для перевірки точності моделювання цін похідних цінних паперів.

Розглянули модель фінансового ринку, в якій весь часовий інтервал $[0, T]$ в неперервній моделі розбито на кроки

$$
\tau_1,\tau_2,\ldots,\tau_n,\ n\geq 1\,,
$$

а в дискретній моделі на кроки $1, 2, \ldots$ Використовуючи відповідні ергодичні теореми, було знайдено математичне сподівання $f(x(t))$, дисперсію й очікуваний ризик.

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. *Скороход А.В.* Элементы теории вероятностей и случайных процессов / А.В. Скороход. – К.: Вища шк., 1975. – 294 с.
2. *Соловейко О.М.* Деякі фінансові обчислення, пов'язані з цінами акцій на ринку / О.М. Соловейко // Праці конференції "Функціональні методи в теорії наближень, теорії операторів, стохастичному аналізі і статистиці", присвяченої пам'яті А.Я. Дороговцева (1935-2004). Київ (Україна). – 2004. – С. 115.
3. *Єлейко Я.І.* Основні характеристики функціоналу виплат у неперервній моделі ринку / Я.І. Єлейко, С.М. Мазур // 17 Міжнародна конференція Problems of Decision Making under Uncertainties, 23-27 травня 2011 р., Східниця.
4. *Єлейко Я.І.* Основні характеристики функціоналу виплат у дискретній моделі ринку / Я.І. Єлейко, Т.М. Лазарів // 17 Міжнародна конференція Problems of Decision Making under Uncertainties, 23-27 травня 2011 р., Східниця.

Стаття: надійшла до редколегії 07.11.2011
доопрацьована 08.12.2011
прийнята до друку 22.12.2011

ГЛАВНЫЕ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ФУНКЦИОНАЛА ВЫПЛАТ

Я. Елейко, Т. Лазарив, С. Мазур

Львовский национальный университет имени Ивана Франко,
ул. Университетская, 1, Львов, 79000, e-mail: lazariv@rambler.ru

В последнее время на финансовом рынке стали актуальными оценки выплат по опционам в условиях определенной нестабильности или неопределенности на рынке. Стоит отметить, что данной проблеме было посвящено большое количество исследований в условиях стабильности финансового рынка. Мы же рассмотрели выплаты по Европейским опционам, которые зависят от политических ситуаций, построив соответствующую цепь Маркова на множестве состояний, которые являются выплатами. Таким образом мы сделали математическую интерпретацию экономической модели рынка.

Ключевые слова: цепь Маркова, стационарное распределение, опцион, переходные вероятности.

MAIN MATHEMATICAL CHARACTERISTICS OF PAYMENT FUNCTIONAL

Ya. Yeleiko, T. Lazariv, S. Mazur

Ivan Franko National University of Lviv,
Universytetska str, 1, Lviv, 79000, e-mail: lazariv@rambler.ru

The aim of our work was to calculate basic mathematical characteristics of payment functional, such as mathematical expectation, variation and expected risk in discrete and continuous market models. In our paper we present a model of financial market in which the entire time interval in the continuous model is divided into steps with exponential distribution, and in the discrete model into steps of length 1. Using the appropriate ergodic theorems for continuous and discrete Markov chains we have found the mathematical expectation, variation and expected risk. The results have theoretical and practical application in verifying the accuracy of modeling prices of derivative securities in the economy and finance.

Key words: Markov chain, stationary distribution, option, transition probabilities.