ISSN 2078–5097. Вісн. Львів. ун-ту. Сер. пр. матем. та інф. 2012. Вип. 18. С. 130–140
Visnyk of the Lviv University. Series Appl. Math. and Informatics. Issue 18. P. 130–140

М А Т Е М А Т И Ч Н Е   М О Д Е Л Ю В А Н Н Я

УДК 519.6:517.925

ЧИСЛОВЕ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧІ ПРО НАПІВПРОНИКЛИВУ МЕМБРАНУ

М. Бехта, Я. Савула

Львівський національний університет імені Івана Франка,
вул. Університетська, 1, Львів, 79000, e-mail: kpm@franko.lviv.ua

Розглянуто еліптичну варіаційну нерівність на прикладі задачі про рух рідини в області з напівпроникливою стінкою. Запропоновано різні підходи до розв'язання такого типу задач, зокрема, методу множників Лагранжа та проекційних методів. Для дискретизації відповідних функціоналів у розглянутих методах використано метод скінченних елементів. Подано результати числових експериментів, на підставі яких проаналізовано ефективність застосування розглянутих методів для розв'язування задач, що зводяться до еліптичних варіаційних нерівностей. Проведено порівняльний аналіз залежності якості розв'язку та швидкості збіжності від вибору параметрів методів і заданої точності.

Ключові слова: метод скінченних елементів, метод штрафу, множники Лагранжа, проекційні методи, еліптичні варіаційні нерівності.

1. ВСТУП

Варіаційні нерівності часто виникають у процесі розв'язування прикладних задач механіки, фізики, тепло та масоперенесення [1, 7]. Це привело до інтенсивного розвитку теорії та методів розв'язування варіаційних нерівностей.

Зокрема, в [1, 4, 8] для побудови наближених розв'язків задач дифузії з граничними умовами у вигляді нерівностей запропоновано використовувати метод штрафних функцій. Ідея застосування такого підходу передбачає зведення вихідної задачі до задачі мінімізації функціонала на множині з обмеженнями. До задачі умовної мінімізації застосовують метод штрафних функцій. Такий підхід до задачі про напівпроникливу мембрану призводить до розв'язання послідовності крайових задач з нелінійними граничними умовами.

У працях [5, 8, 10] для розв'язування цієї задачі використано метод множників Лагранжа. Внаслідок використання такого підходу та ітераційного методу Удзави, для відшукання сідлової точки функції Лагранжа, отримуємо послідовність крайових задач зі змінною граничною умовою Неймана.

Для розв'язання задачі з граничними умовами у вигляді нерівностей можна також застосувати проекційні методи [1, 8]. Їхня головна ідея – отримати розв'язок задачі умовної оптимізації за допомогою ітераційного методу, на кожній ітерації якого отримане нове наближення до розв'язку проектується на множину обмежень.

Деякі інші підходи розглянуто у [3, 6, 7, 9, 11]. Для розв'язування задачі дифузії з граничними умовами Сіньоріні ми використовували метод скінченних елементів, у поєднанні з методом множників Лагранжа, який застосовують для умовної мінімізації функціонала. Для порівняння було використано ітераційні методи з проекцією – метод Гауса-Зейделя, метод релаксації. На підставі отриманих числових результатів було проведено аналіз застосовності використаних підходів до розв'язання розглянутої задачі про напівпроникну мембрану. Проаналізовано вплив

© Бехта М., Савула Я., 2012

вибору параметрів методів на швидкість отримання розв'язку. Виконано порівняння застосування різних методів для розв'язання задачі про напівпроникливу мембрану.

2. ЗАДАЧА ПРО НАПІВПРОНИКЛИВУ СТІНКУ

Розглянемо задачу, що описує дифузію рідини у резервуарі, обмеженому мембраною, частина якої має властивість напівпроникливості. Нехай деякий резервуар обмежує напівпроониклива мембрана, яка дає змогу вільно потрапляти речовині в середину, якщо зовнішній тиск більший, ніж внутрішній. У протилежному випадку речовина не проникає до середини.

Математичну модель цієї задачі можна подати у вигляді [1, 2, 4]

$$-\Delta u(x,y) = f(x,y) \tag{1}$$

$$h(x,y) < u(x,y) \Rightarrow \frac{\partial u(x,y)}{\partial n} = 0; (x,y) \in \Gamma, \tag{2}$$

$$h(x,y) = u(x,y) \Rightarrow \frac{\partial u(x,y)}{\partial n} \geq 0; (x,y) \in \Gamma. \tag{3}$$

Тут Ω – область, у якій розглядаємо задачу; Γ – границя області; $\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ – оператор Лапласа; $h(x,y)$ – зовнішній тиск.

Задача (1)-(3) є частковим випадком складнішої задачі, відомої в літературі як задача з умовами Сіньоріні [5, 6, 8], яка набуває вигляду

$$u - h \geq 0, \quad \frac{\partial u}{\partial n} \geq 0, \quad (u-h)\frac{\partial u}{\partial n} = 0 \quad \text{на} \quad \Gamma. \tag{4}$$

Для числового розв'язування цієї задачі подамо її у вигляді варіаційної нерівності [1, 2].

Знайти $u \in K$ таку, що

$$a(u, v-u) \geq (f, v-u) \quad \forall v \in K, \tag{5}$$

де $K = \left\{ v : v \in W_2^1(\Omega); \gamma v \geq h \text{ на } \Gamma \right\}$; γv – слід функції v;

$$a(u,v) = \int_\Omega \left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x} \right) d\Omega, \; (f,v) = \int_\Omega f v d\Omega.$$

Питання еквівалентності крайової задачі (1), (4) та варіаційної (5), а також існування та єдності розв'язку розкрито у працях [1, 8]. Розв'язок задачі (5) шукатимемо як результат мінімізації функціонала з обмеженням [1].

Знайти $u \in K$ таку, що

$$J(u) = \inf_{v \in K} J(v), \tag{6}$$

де $J(u) = \frac{1}{2} a(u,v) - (f,v)$.

3. МЕТОДИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ВАРІАЦІЙНИХ НЕРІВНОСТЕЙ

Отже, початкову задачу (1)-(3) було зведено до задачі мінімізації функціонала (6) на множині з обмеженням. Існують різні підходи до розв'язання такого типу задач. Найпоширенішими методами умовної оптимізації є метод штрафних функцій (метод штрафу), метод множників Лагранжа та проекційний метод. Для дискретизації функціонала використаємо метод скінченних елементів з лінійними апроксимаціями на трикутниках. Розглянемо детальніше згадані підходи до мінімізації функціонала.

Застосувавши метод штрафних функцій до (6), отримаємо задачу безумовної мінімізації на всьому просторі $V=\left\{u : u\in W_2^1(\Omega)\right\}$ вигляду

$$\frac{1}{2}a(u,u)+\varepsilon^{-1}(\beta(u),u)-(f,u)\to\min_V, \tag{7}$$

де $\varepsilon>0$ – мале число;

$$\beta(u)=\frac{1}{2\varepsilon}\left|(h-u)^+\right|^2$$

– штрафна функція.

Задачу мінімізації (7) можна трактувати як нелінійну крайову задачу вигляду

$$-\Delta u(x,y)=f(x,y), \tag{8}$$

$$\frac{\partial u}{\partial n}-\varepsilon^{-1}(h-u)^+=0 \; на \; \Gamma. \tag{9}$$

Тут

$$w^+=\sup(w;0)=\max(w;0).$$

Розв’язок крайової задачі (8)-(9) можна отримати з такого нелінійного варіаційного рівняння (оскільки штрафна функція є нелінійною стосовно u):

$$a(u,v)+\varepsilon^{-1}(\beta'(u),v)=(f,v), \quad \forall v\in V. \tag{10}$$

Іншим підходом до відшукання мінімуму функціонала (6) є застосування методу множників Лагранжа. В цьому випадку задача зводиться до відшукання сідлової точки (u,λ) функції Лагранжа вигляду [10]

$$L(u,\lambda)=J(u)-\int_\Gamma \lambda\gamma u d\Gamma=\frac{1}{2}\int_\Omega \left(grad(u)\right)^2 d\Omega-\int_\Omega fud\Omega-\int_\Gamma \lambda\left(\gamma u-h\right)d\Gamma. \tag{11}$$

Зважаючи на те, що для отримання адекватного наближення розв’язку за допомогою методу штрафних функцій параметр ε необхідно вибирати близьким до нуля, що призводить до виродження матриці системи, а також на те, що для відшукання розв’язку треба розв’язувати нелінійні крайові задачі, ми використали метод множників Лагранжа.

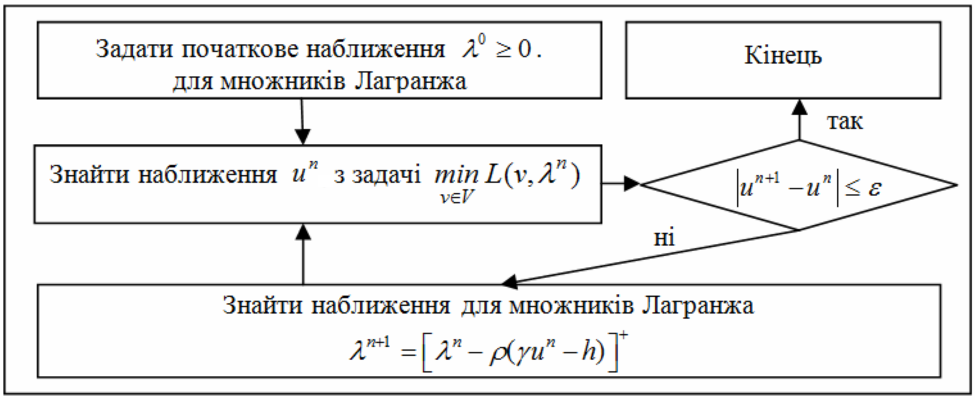


Рис. 1. Схема ітераційного методу відшукання сідлової точки функції Лагранжа

Для відшукання сідлової точки (u,λ) у [8] запропоновано ітераційний метод, схему якого зображено на рис. 1.

1. Нехай задано початкове наближення $\lambda^0 \ge 0$.
2. Знайти наступне наближення до розв'язку – u^n як розв'язок задачі мінімізації
$$\min L(v, \lambda^n),\ v \in V.$$
3. Знайти наступне наближення множників Лагранжа за формулою
$$\lambda^{n+1} = \left[\lambda^n - \rho(u^n - h) \right]^+,$$
тут $\rho > 0$ параметр методу.
4. Кроки 2-3 повторювати до виконання умови зупинки.

Не завжди можна використовувати класичну функцію Лагранжа (11), зокрема у випадку напівкоерцетивності функціонала $J(v)$, тому ми також розглянули модифікований її варіант [5]

$$L(u,\lambda) = J(u) + \frac{1}{2\rho}\int_\Gamma \left(\left((\lambda - \rho\gamma u)^+ \right)^2 - \lambda^2 \right) d\Gamma . \qquad (12)$$

Алгоритм відшукання сідлової точки (u,λ) для модифікованого функціонала Лагранжа залишиться таким самим, як і у випадку використання не модифікованої функції Лагранжа.

Розглянуті нами проекційні методи ґрунтуються на застосуванні ітераційних методів розв'язання СЛАР, дискретизованої крайової задачі, і після кожного ітераційного кроку виконується проекція на простір K. Ми застосували ітераційний метод Гауса-Зейделя та метод релаксації. Проекційний алгоритм розв'язання задачі мінімізації функціонала з обмеженням у разі використання методу Гауса-Зейделя набуде вигляду.

1. Задати початкове наближення для розв'язку $u = u^0$.
2. Виконати одну ітерацію методу Гауса-Зейделя.
3. $u_i^n = \dfrac{1}{a_{ii}}\left(b_i - \sum_{j>i} a_{ij}u_j^{n-1} - \sum_{j<i} a_{ij}u_j^n \right), \quad i = 1,2...,n$.
4. Спроектувати отримане наближення на простір K
5. $u_i^n = \max(h, u_i^n), \quad i = 1,2...,n.$
6. Кроки 2-3 повторювати до виконання умови зупинки.

Аналогічно будується алгоритм методу релаксації, лише замість другого кроку – ітерації Гауса-Зейделя, потрібно виконати ітерацію методу релаксації

$$u_i^n = (1-\omega)u_i^{n-1} + \frac{\omega}{a_{ii}}\left(b_i - \sum_{j>i} a_{ij}u_j^{n-1} - \sum_{j<i} a_{ij}u_j^n \right), \quad i = 1,2...,n .$$

4. ЧИСЛОВІ ЕКСПЕРИМЕНТИ

Розглянемо дві задачі на квадратній області (квадрат з центром у $(0,0)$ та довжиною сторони $d = 1$), з граничними умовами, які відповідають таким позначенням: штрихова лінія – умова напівпроникливості; точкова – однорідна умова Неймана; суцільна лінія – однорідна умова Діріхле

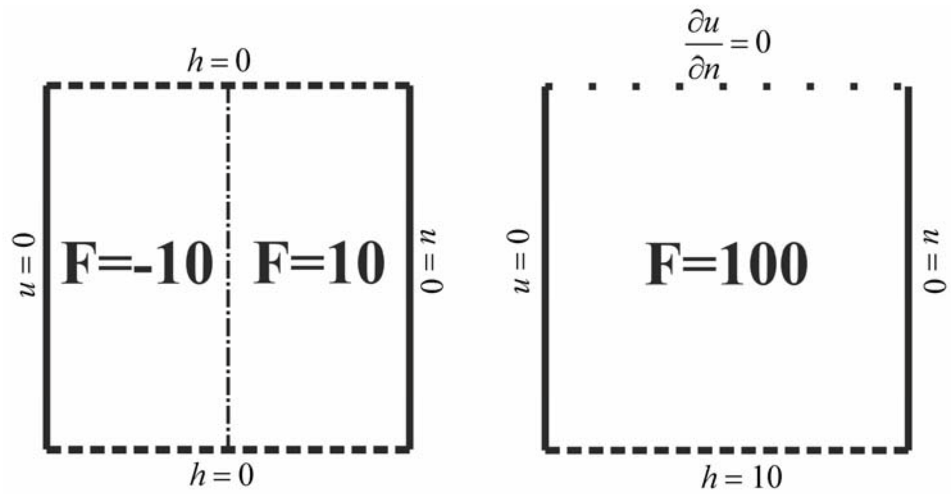


Рис. 2. Області задач і граничні умови (з ліва направо – перша, друга задачі, відповідно)

Для першої задачі внутрішні джерела (функція F) задано як

$$F = \begin{cases} -10, & x < 0.0 \\ 10, & x \geq 0.0 \end{cases}$$

для другої задачі внутрішні джерела сталі – $F = 100$.

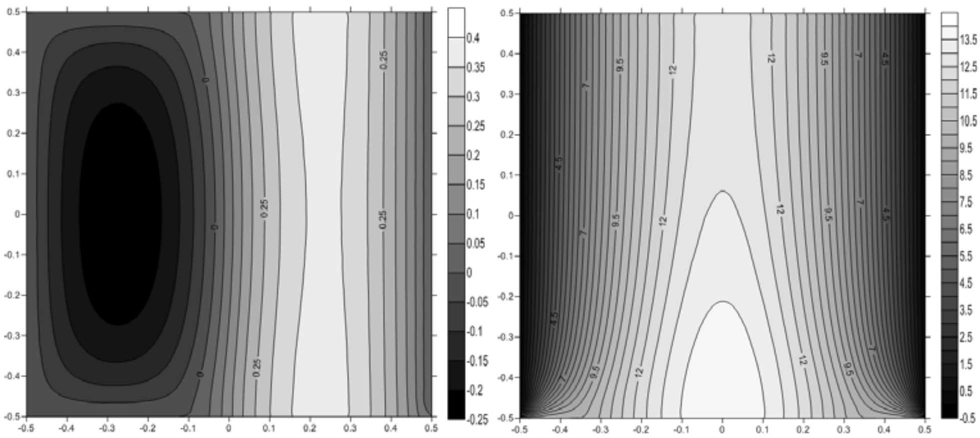


Рис. 3. Розв'язки задач (лівий – першої задачі, правий – другої)

Умова напівпроникливості – це фактично умова Неймана на тій частині напівпроникливої границі, де для розв'язку відповідної задачі, з заміненою умовою напівпроникливості на умову Неймана, виконується додаткове обмеження множини K ($u \geq h$ *на* Γ), на тій самій частині, де ця умова не виконується, завдяки напівпроникливості отримуємо фактично граничну умову Діріхле вигляду $u = h$ *на* Γ. Такі міркування отримуємо з аналізу результатів проведених числових експериментів, які зображено на рис 3-4. Оскільки наперед невідомо, на якій частині напівпроникливої границі буде виконуватись додаткове обмеження множини K, а на якій – ні, то задачу ще називають – задача з вільною (невідомою) границею.

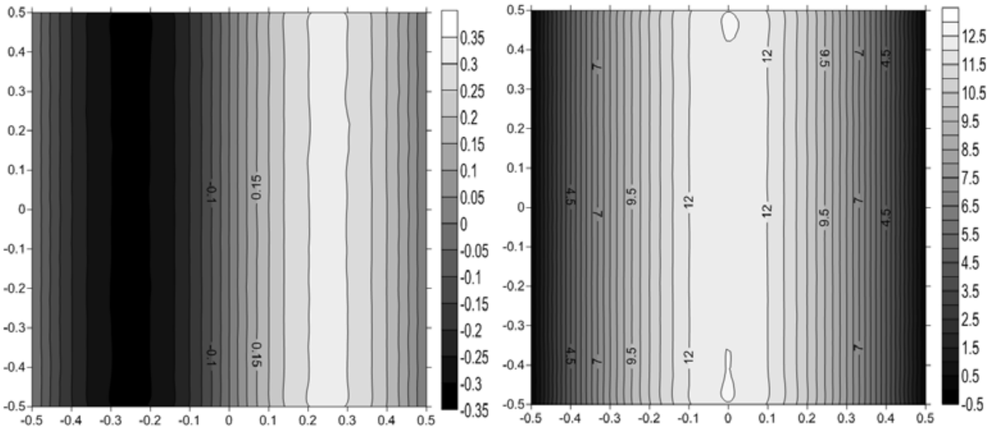


Рис. 4. Розв’язки задач (лівий – першої, правий – другої, задачі з заміненою умовою напівпроникливості на однорідну умову Неймана)

Далі проаналізуємо роботу використаних методів. Спочатку розглянемо залежність кількості ітерацій від вибору точності ε. Для цього використаємо другу задачу з рис. 2, область поділена на 332 скінченних трикутних елементів (лінійне наближення). Параметри методів виберемо $\rho = 10.5, \omega = 1.7$. Отримані дані подано у табл. 1, а на рис. 4 зображено графік за даними таблиці, що відображає залежність кількості ітерацій від вибору точності для різних методів.

Таблиця 1

Залежність кількості ітерацій від заданої точності ε

№ за пор.	Параметр оцінки ε	Проекційні методи				Метод множників Лагранжа	
		метод релаксації		метод Гауса-Зейделя			
		норма	ітерації	норма	ітерації	норма	ітерації
1	$1E^{-1}$	19.59017	26	8.24025	54	21.89794	8
2	$1E^{-2}$	21.66316	46	20.18721	178	21.89397	15
3	$1E^{-3}$	21.87131	66	21.71758	306	21.89412	22
4	$1E^{-4}$	21.89163	85	21.87636	435	21.89416	30
5	$1E^{-5}$	21.89391	105	21.89237	564	21.89416	38
6	$1E^{-6}$	21.89414	125	21.89399	694	21.89416	46
7	$1E^{-7}$	21.89416	145	21.89414	823	21.89416	55
8	$1E^{-8}$	21.89416	165	21.89416	952	21.89416	63
9	$1E^{-9}$	21.89416	185	21.89416	1082	21.89416	71
10	$1E^{-10}$	21.89416	205	21.89416	1211	21.89416	79

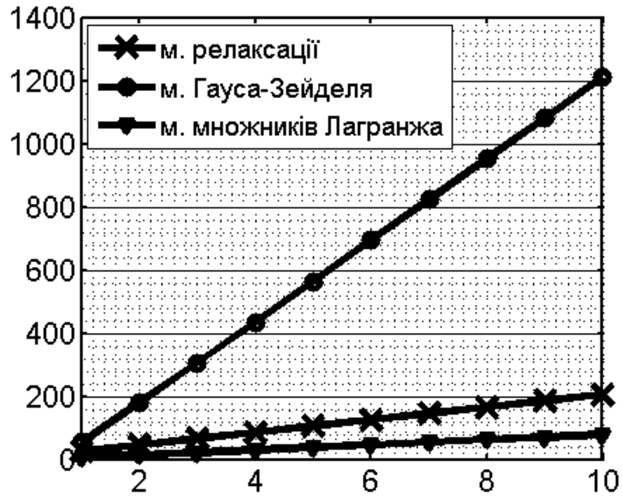


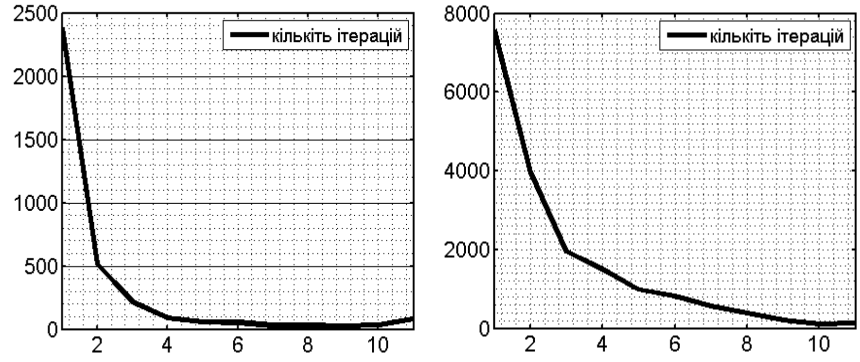
Рис. 5. Графік залежності ітерацій та ε

З графіка (рис. 5) видно, що зі зменшенням параметра ε кількість ітерацій зростає лінійно. Далі розглянемо залежність кількості ітерацій від вибору параметра ρ, методу множників Лагранжа, та ω – методу релаксації з проекцією. Розглядатимемо попередню задачу за точності умови зупинки $\varepsilon = 1E^{-5}$. Отримані дані подамо у табл. 2, а на рис. 6 зображено графік залежності кількості ітерацій від вибору параметрів.

Таблиця 2

Залежність кількості ітерацій від параметра ρ

№ за пор.	Метод множників Лагранжа		Метод релаксації з проекцією	
	значення параметра ρ	кількість ітерацій	значення параметра ω	кількість ітерацій
1	0.1	2379	0.1	7573
2	0.6	518	0.2	3967
3	2.1	219	0.4	1946
4	4.6	93	0.5	1508
5	7.6	56	0.7	984
6	8.1	52	0.8	813
7	14	30	1.0	564
8	14.6	28	1.2	390
9	15.6	26	1.5	204
10	16.6	33	1.7	105
11	18.6	83	1.9	128



а *б*

Рис. 6. Графіки залежності ітерацій та ρ

З рис. 6 видно, що кількість ітерацій змінюється експоненційно зі зміною параметрів. Відомо [8], що при $\rho \to 0$, розв'язок отриманий ітераційним методом, для відшукання сідлової точки (рис. 1), прямує до розв'язку задачі (1)-(3). Зважаючи на таке стрімке зростання кількості ітерацій при $\rho \to 0$, варто ретельно підбирати цей параметр. Внаслідок проведених числових експериментів з'ясували, що при більших значеннях параметра ρ можна отримати адекватний розв'язок при меншій кількості ітерацій. Також можна використати змінне значення параметра ρ для пришвидшення отримання результату. Щодо параметра ω, то це фактично параметр методу релаксації. Відомо, що для збіжності методу релаксації треба вибирати цей параметр у межах $0 < \omega < 2$. У нашому випадку ефективною виявилась верхня релаксація з параметром $\omega = 1.7$.

Таблиця 3

Залежність кількості ітерацій та норми від кількості вершин

№ за пор	Вершин розбиття	Максимальна площа трикутника	Проекційні методи				Метод множників Лагранжа	
			метод релаксації		метод Гауса-Зейделя			
			норма	ітерації	норма	ітерації	норма	ітерації
1	13	0.1	24.59545	41	24.59540	36	24.59543	2
2	24	0.05	20.86289	41	20.86283	39	20.86290	31
3	41	0.025	21.88648	41	21.88634	83	21.88647	2
4	89	0.01	21.64601	41	21.64560	156	21.64601	22
5	126	0.0075	21.89781	41	21.89727	214	21.89781	26
6	182	0.005	21.94169	44	21.94093	301	21.94177	37
7	332	0.0025	21.89391	105	21.89237	564	21.89416	38
8	830	0.001	21.96597	255	21.96234	1258	21.96667	74
9	1093	0.00075	21.97584	341	21.97088	1658	21.97684	74
10	1605	0.0005	21.99428	491	21.98688	2350	21.99579	145
11	3260	0.00025	22.00221	951	21.98681	4430	22.00543	135

Розглянемо збіжність наближених розв'язків за нормою у випадку збільшення кількості скінченних елементів та зміни кількості ітерації від цього. Для аналізу використовуємо попередню задачу з $\rho = 10.5, \omega = 1.7, \varepsilon = 1E^{-5}$. Дані подамо у вигляді таблиці 3.

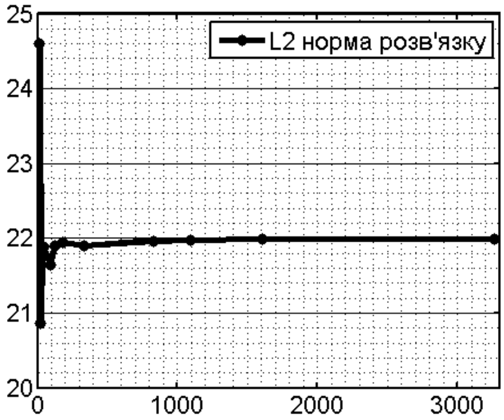


Рис. 7. Норма розв'язку залежно від кількості вершин

На рис. 7 зображено залежність норми розв'язку від кількості вершин, за якими побудовано скінченні елементи. З цього рисунку видно, що зі збільшенням елементів поділу області отримуємо збіжний за нормою розв'язок.

5. ВИСНОВКИ

Застосовані підходи виявились ефективними для розв'язання розглянутої варіаційної нерівності. Наведені числові експерименти підтверджують збіжність і працездатність запропонованих методів. Кожен з них має свої переваги та недоліки.

Проекційні методи релаксації та Гауса-Зейделя є досить прості в реалізації і потребують лише використання матрично-векторних операцій. Метод релаксації переважає завдяки кращій швидкості збіжності порівняно з методом Гауса-Зейделя. Проте суттєвим недоліком у цих підходах є виконання проекції на простір з обмеженням. У нашому випадку отримана множина обмежень досить проста, що не спричинило складностей у виконанні проекції, проте розв'язання складніших варіаційних нерівностей зі складнішими обмеженнями на множину, метод проекції втрачає свої переваги.

Запропоноване поєднання МСЕ та методу множників Лагранжа є ефективним та фактично універсальним методом для розв'язування варіаційних нерівностей, оскільки за допомогою множників Лагранжа можна легко звести задачу умовної оптимізації до безумовної.

Варто зазначити, що потрібно враховувати, на якому розбитті розв'язуємо задачу, оскільки до певної межі, зі збільшенням кількості вузлів, метод множників Лагранжа працюватиме швидше за рахунок меншої кількості ітерації. Проте після переходу за цю межу цей метод почне програвати у швидкодії методам проекції, що пов'язано з необхідністю розв'язання СЛАР, використовуючи метод множників Лагранжа (навіть незважаючи на те, що під час розв'язання враховується розрідженість матриці та для пришвидшення розв'язання використовується *LU*-розклад матриці системи).

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. *Гловински Р.* Чисельное исследование варационих неравенств / Р. Гловински, Ж.-Л. Лионс, Р. Тремольєр. – М.: МИР, 1979. – 576 с.
2. *Дюво Г.* Неравенства в физике и механике / Г. Дюво, Ж.-Л. Лионс. – М.: Наука, 1980. – 480 с.
3. *Ковтуненко В.А.* Итерационный метод штрафа для вариационных неравенств с сильно монотонными операторами / В.А. Ковтуненко // Сибирский матем. журн. – 1994. – Т. 35, № 4. – С. 826-829.
4. *Лионс Ж.-Л.* Некоторые методы решеня нелинейных краевых задач / Ж.-Л. Лионс. – М.: Мир, 1972. – 588 с.
5. *Намм Р.В.* Итерационный метод Удзавы для полукоерцетивной задачи Синьорини / Р.В. Намм, С.А. Скачков, Г. Ву // Математическое программирование: Труды XIII Байкальской международной школы-семинара "Методы оптимизации и их приложения". – 2005. – Т. 1. – С. 261-265.
6. *Addou A.A.* Solution method of the Signorini problem / A.A. Addou // Electronic Journal of Differential Equations. – 2006. – P. 1-7.
7. *Belhachmi Z.* Quadratic finite element approximation of the Signorini problem / Z. Belhachmi, F. Ben Belgacem // Mathematics of computation. – Vol. 72, No 241. – P. 83-104.
8. *Glowinski R.* Numerical methods for nonlinear variational problems / R. Glowinski. – New York: Springer, 2008. – 493 p.
9. *Haslinger J.* Finite element analysis of the Signorini problem / J. Haslinger // Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae. – 1979. – Vol. 20, No 1. – P. 1–17.
10. *Hlaváček I.* Dual finite element analysis for elliptic problems with obstacles on the boundary / I Hlaváček // Applications of Mathematics. – 1977. – Vol. 22, No 4. – P. 244–255.

Стаття: надійшла до редколегії 15.03.2011
доопрацьована 28.04.2011
прийнята до друку 12.05.2011

ЧИСЕЛЬНОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ О ПОЛУПРОНИЦАЕМОЙ МЕМБРАНЕ

М. Бехта, Я. Савула

Львовский национальный университет имени Ивана Франко,
ул. Университетская, 1, Львов, 79000, e-mail: kpm@franko.lviv.ua

Рассмотрено эллиптическое вариационное неравенство на примере задачи теории движения жидкости в области с полупроницаемой стенкой. Предложены различные подходы к решению такого типа задач, в частности, метод множителей Лагранжа и проекционные методы. При дискретизации соответствующих функционалов в рассмотренных методах использован метод конечных элементов. Приведены результаты численных экспериментов, на основании которых проанализирована эффективность применения рассмотренных методов для решения задач, которые сводятся к эллиптическим вариационным неравенствам. Проведен сравнительный анализ зависимости качества решения и скорости сходимости от выбора параметров методов и заданной точности.

Ключевые слова: метод конечных элементов, метод штрафа, множители Лагранжа, проекционные методы, эллиптические вариационные неравенства.

NUMERICAL SOLUTION OF SEMIPERMEABLE MEMBRANE PROBLEM

M. Bekhta, Ya. Savula

Ivan Franko National University of Lviv,
Universytetska str, 1, Lviv, 79000, e-mail: kpm@franko.lviv.ua

We consider elliptic variational inequality problem. As the example of it we took the semipermeable membrane problem. We consider different approaches for solving this type of problems; they include the method of Lagrange multipliers and projection techniques. For discretization of functionals, which appears in our methods, we used finite element method. Based on results of numerical experiments the efficiency of applying such methods for solving problems that are reduced to variational inequalities is analyzed. A comparative analysis was made for the dependence of the quality of solution, and the rate of convergence of the methods parameters selection and given accuracy.

Key words: finite element method, penalty method, Lagrange multipliers, projection methods, elliptic variational inequality.