ISSN 2078–5097. Вісн. Львів. ун-ту. Сер. пр. матем. та інф. 2012. Вип. 18. С. 106–129
Visnyk of the Lviv University. Series Appl. Math. and Informatics. Issue 18. P. 106–129

УДК 517.9

СОЛІТОННІ РОЗВ'ЯЗКИ ДВОВИМІРНОЇ НЕЛІНІЙНОЇ ДИНАМІЧНОЇ СИСТЕМИ БЮРГЕРСА З ЧИСЛОВИМИ КОЕФІЦІЄНТАМИ

Аркадій Кіндибалюк

Львівський національний університет імені Івана Франка,
вул. Університетська, 1, Львів, 79000

Для двовимірної нелінійної динамічної системи Бюргерса з числовими коефіцієнтами знайдено точні солітонні розв'язки, які виражаються через гіперболічний тангенс, гіперболічний котангенс.

Обгрунтовано запропоновану модифікацію кроку визначення степенів поліноміальних розв'язків. Знайдено умови на коефіцієнти, при яких існує безліч солітонних розв'язків та умови на коефіцієнти, при яких солітонні розв'язки не існують.

Подано графіки знайдених розв'язків. Проведено аналіз залежності характеру розв'язку від зміни коефіцієнтів системи.

Ключові слова: двовимірні нелінійні динамічні системи, рівняння Бюргерса, метод гіперболічних тангенс функцій, точні розв'язки.

1. ВСТУП

За останні десятиліття теорія динамічних систем увібрала в себе новітні наукові результати різних дисциплін. Розробляли аналітичні методи інтегрування нелінійних динамічних систем [4], методи лінеаризації та алгоритми знаходження солітонних розв'язків.

Поряд із застосуванням аналітичних методів дослідження нелінійних динамічних систем розробляли підходи чисельного аналізу таких систем [8]. Розробка ефективних методів чисельного дослідження стає важливою, оскільки багато моделей нелінійної фізики не допускають знаходження розв'язків методом оберненої задачі розсіяння. Тому для дослідження таких систем застосовують чисельні методи. Для нелінійних моделей не завжди вдається отримати точний розв'язок.

Для побудови точних солітонних розв'язків використовують метод гіперболічних тангенс функцій [1-7, 9]. Цей метод використовували під час розв'язування звичайних диференціальних рівнянь (ЗДР) [5, 7], а після його вдосконалення застосовували для знаходження розв'язків диференціальних рівнянь у частинних похідних (ДРЧП) [5, 6]. Згодом метод набув багатьох модифікацій: розв'язок нелінійного ДРЧП шукають у вигляді полінома не тільки від гіперболічного тангенса, а й від гіперболічного котангенса [2, 9], секанса, косеканса та інших спеціальних функцій, зокрема еліптичних [6, 9].

Зазначимо, що методи гіперболічних тангенс функцій умовно поділяють на дві групи: перша група передбачає зведення ДРЧП до ЗДР шляхом уведення рухомої системи координат [2, 9], а друга група методів передбачає підстановку деякої гіперболічної функції у ДРЧП [1, 5, 7].

Суттєва перевага цих методів полягає в тому, що будь-яка багатовимірна нелінійна динамічна система зводиться до ЗДР. Знання цих розв'язків має важливе значення у дослідженні нелінійних динамічних систем, адже саме за їхньою допомогою можна тестувати чисельні схеми.

Ми знайшли розв'язки нелінійної динамічної системи Бюргерса у вигляді полінома, що залежить від гіперболічного тангенса, гіперболічного котангенса та у вигляді полінома, що одночасно залежить від гіперболічного тангенса та гіперболічного котангенса.

2. ФОРМУЛЮВАННЯ ЗАДАЧІ

Нехай задана двовимірна нелінійна динамічна система Бюргерса з дійсними числовими коефіцієнтами [3]

$$\begin{cases} u_t + k_{11}uu_x + k_{12}vu_y = k_{13}u_{xx} + k_{14}u_{yy}, \\ v_t + k_{21}uv_x + k_{22}vv_y = k_{23}v_{xx} + k_{24}v_{yy}, \end{cases} \tag{1}$$

де функції $u = u(x,y,t), v = v(x,y,t)$, а $k_{11}, k_{12}, k_{13}, k_{14}, k_{21}, k_{22}, k_{23}, k_{24}$ – дійсні ненульові числові коефіцієнти.

Визначником системи (1) називатимемо визначник матриці складеної з коефіцієнтів при конвекційних членах системи (1), тобто

$$\Delta = k_{11}k_{22} - k_{12}k_{21}.$$

Систему (1) при одиничних значеннях числових коефіцієнтів $k_{11}, k_{12}, k_{21}, k_{22}$

$$\begin{cases} u_t + uu_x + vu_y = \dfrac{1}{\mathrm{Re}}\left(u_{xx} + u_{yy}\right), \\ v_t + uv_x + vv_y = \dfrac{1}{\mathrm{Re}}\left(v_{xx} + v_{yy}\right). \end{cases}$$

досліджували в [8]. Для цієї системи побудували напівнеявну схему інтегрування методом скінченних різниць. Тут Re – число Рейнольдса.

Використовуючи метод гіперболічних тангенс функцій, знайдемо точні солітонні розв'язки нелінійної динамічної системи (1) та дослідимо, за яких значень коефіцієнтів системи (1) розв'язки існують.

3. ПОБУДОВА ТОЧНИХ РОЗВ'ЯЗКІВ У ВИГЛЯДІ ПОЛІНОМА ВІД ГІПЕРБОЛІЧНОГО ТАНГЕНСА

Знайдемо солітонні розв'язки системи (1) у вигляді полінома від гіперболічного тангенса.

Крок 1. Зведення системи ДРЧП до системи ЗДР.

Введемо рухому систему координат:

$$\xi = c_1x + c_2y + c_3t + c_4,$$

де c_1, c_2, c_3 – довільні відмінні від нуля дійсні числа, а число c_4 – фаза хвилі. Зробимо заміну

$$u(x,y,t) = u(\xi) = u(c_1x + c_2y + c_3t + c_4), \ v(x,y,t) = v(\xi) = v(c_1x + c_2y + c_3t + c_4).$$

Тоді, враховуючи вирази для часткових похідних функцій u та v,

$$u_x = \frac{du(c_1x + c_2y + c_3t + c_4)}{d\xi}\frac{\partial \xi}{\partial x} = c_1\frac{du}{d\xi} = c_1u'(\xi),$$

$$u_{xx} = c_1\frac{du'(c_1x + c_2y + c_3t + c_4)}{d\xi}\frac{\partial \xi}{\partial x} = c_1\frac{d^2u}{d\xi^2} = c_1^2u''(\xi),$$

$$v_x = \frac{dv(c_1x + c_2y + c_3t + c_4)}{d\xi}\frac{\partial \xi}{\partial x} = c_1\frac{dv}{d\xi} = c_1v'(\xi),$$

$$v_{xx} = c_1 \frac{dv'(c_1x + c_2y + c_3t + c_4)}{d\xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} = c_1 \frac{d^2u}{d\xi^2} = c_1^2 v''(\xi) ,$$

$$u_y = \frac{du(c_1x + c_2y + c_3t + c_4)}{d\xi} \frac{\partial \xi}{\partial y} = c_2 \frac{du}{d\xi} = c_2 u'(\xi) ,$$

$$u_{yy} = c_2 \frac{du'(c_1x + c_2y + c_3t + c_4)}{d\xi} \frac{\partial \xi}{\partial y} = c_2 \frac{d^2u}{d\xi^2} = c_2^2 u''(\xi) ,$$

$$v_y = \frac{dv(c_1x + c_2y + c_3t + c_4)}{d\xi} \frac{\partial \xi}{\partial y} = c_2 \frac{dv}{d\xi} = c_2 v'(\xi) ,$$

$$v_{yy} = c_2 \frac{dv'(c_1x + c_2y + c_3t + c_4)}{d\xi} \frac{\partial \xi}{\partial y} = c_2 \frac{d^2u}{d\xi^2} = c_2^2 v''(\xi) ,$$

$$u_t = \frac{du(c_1x + c_2y + c_3t + c_4)}{d\xi} \frac{\partial \xi}{\partial t} = c_3 \frac{du}{d\xi} = c_3 u'(\xi) ,$$

$$v_t = \frac{dv(c_1x + c_2y + c_3t + c_4)}{d\xi} \frac{\partial \xi}{\partial t} = c_3 \frac{dv}{d\xi} = c_3 v'(\xi) ,$$

отримуємо систему нелінійних ЗДР

$$\begin{cases} c_3 u'(\xi) + k_{11} c_1 u(\xi) u'(\xi) + k_{12} c_2 v(\xi) u'(\xi) = \left(k_{13} c_1^2 + k_{14} c_2^2\right) u''(\xi) \\ c_3 v'(\xi) + k_{21} c_1 u(\xi) v'(\xi) + k_{22} c_2 v(\xi) v'(\xi) = \left(k_{23} c_1^2 + k_{24} c_2^2\right) v''(\xi). \end{cases} \tag{2}$$

Розв'язки системи (2) шукатимемо у вигляді полінома від гіперболічного тангенса

$$u(\xi) = a_{10} + \sum_{j=1}^{M_1} a_{1j} T^j , \quad v(\xi) = a_{20} + \sum_{j=1}^{M_2} a_{2j} T^j , \tag{3}$$

де $T = th(\xi)$ – гіперболічний тангенс; a_{ij}, M_1, M_2 – невідомі числа. Тут індекс $i = 1,2$ та індекс $j = \overline{0, M_1}$; $j = \overline{0, M_2}$. Визначимо невідомі коефіцієнти a_{ij} та степені поліномів M_1, M_2, послідовно виконуючи кроки 2-4 методу гіперболічних тангенс функцій [5].

Крок 2. Визначення степеня поліноміального розв'язку.

Для визначення степеня поліноміального розв'язку (3) підставимо поліноми $u(\xi) = T^{M_1}, v(\xi) = T^{M_2}$ [3] у систему (2). Зауважимо, що $T' = 1 - T^2$. Запишемо вирази перших і других похідних $u(\xi)$ та $v(\xi)$

$$u'(\xi) = M_1(1 - T^2)T^{M_1 - 1} ,\ u''(\xi) = M_1(M_1 - 1)(1 - T^2)^2 T^{M_1 - 2} - 2M_1 T(1 - T^2)T^{M_1 - 1} ,$$

$$v'(\xi) = M_2(1 - T^2)T^{M_2 - 1} ,\ v''(\xi) = M_2(M_2 - 1)(1 - T^2)^2 T^{M_2 - 2} - 2M_2 T(1 - T^2)T^{M_2 - 1} .$$

Введемо позначення: нехай $\deg(P)$ – найвищий степінь гіперболічного тангенса в поліномі $P = P(\xi)$. Випишемо степені поліноміальних розв'язків і їхніх похідних:

$$\deg(u(\xi)) = M_1,\ \deg(u'(\xi)) = M_1 + 1,\ \deg(u''(\xi)) = M_1 + 2 ,$$

$$\deg(v(\xi)) = M_2,\ \deg(v'(\xi)) = M_2 + 1,\ \deg(v''(\xi)) = M_2 + 2 .$$

Степені кожного нелінійного доданка в системі (2) набули вигляду

$$\deg(uu') = 2M_1 + 1 ,\ \deg(uv') = M_1 + M_2 + 1 ,\ \deg(u'v) = M_1 + M_2 + 1 ,\ \deg(vv') = 2M_2 + 1 .$$

Для першого та другого рівняння системи (2) отримуємо, відповідно, множини значень степенів

$$E_1 = \{M_1 + 1,\ 2M_1 + 1,\ M_1 + M_2 + 1,\ M_1 + 2\}$$

і

$$E_2 = \{M_2 + 1,\ M_1 + M_2 + 1,\ 2M_2 + 1,\ M_2 + 2\}\ .$$

З кожної множини E_1 та E_2 виберемо по два максимальні елементи та отримаємо відповідні множини: $E_{1\max} = \{2M_1 + 1,\ M_1 + M_2 + 1\}$ та $E_{2\max} = \{2M_2 + 1,\ M_1 + M_2 + 1\}$. Із цих множин отримуємо систему рівнянь для визначення M_1, M_2

$$\begin{cases} 2M_1 + 1 = M_1 + M_2 + 1, \\ 2M_2 + 1 = M_1 + M_2 + 1. \end{cases} \tag{4}$$

Розв'язком системи (4) є $M_2 = M_1$, де M_1 – довільне ненульове число.

Зауважимо, що в [5] у таких випадках запропоновано обрати для M_1 довільні ненульові значення, наприклад, для зручності приймемо $M_1 = 2$ і $M_2 = 2$. Покажемо, що такий вибір не приводить до отримання точного розв'язку. З цією метою розв'язок системи (2) шукаємо у вигляді квадратичного полінома від гіперболічного тангенса

$$u(\xi) = a_{10} + a_{11}T + a_{12}T^2\ ,\ v(\xi) = a_{20} + a_{21}T + a_{22}T^2\ . \tag{5}$$

Для знаходження невідомих коефіцієнтів a_{ij} виконаємо кроки 3, 4 методу гіперболічних тангенс функцій.

Крок 3. Отримання системи нелінійних алгебричних рівнянь для знаходження значень невідомих коефіцієнтів.

Підставивши (5) у (2), отримаємо систему

$$\begin{cases} (a_{11} + 2a_{12}T)\left(c_3 + k_{11}c_1\left(a_{10} + a_{11}T + a_{12}T^2\right) + k_{12}c_2\left(a_{20} + a_{21}T + a_{22}T^2\right)\right) = \\ \left(2a_{12} - 2a_{11}T - 6a_{12}T^2\right)\left(k_{13}c_1^2 + k_{14}c_2^2\right), \\ (a_{21} + 2a_{22}T)\left(c_3 + k_{21}c_1\left(a_{10} + a_{11}T + a_{12}T^2\right) + k_{22}c_2\left(a_{20} + a_{21}T + a_{22}T^2\right)\right) = \\ \left(2a_{22} - 2a_{21}T - 6a_{22}T^2\right)\left(k_{23}c_1^2 + k_{24}c_2^2\right). \end{cases}$$

Прирівнявши коефіцієнти при степенях T до нуля, одержимо систему нелінійних алгебричних рівнянь для визначення невідомих коефіцієнтів a_{ij}

$$\begin{cases} T^0 : a_{11}\left(c_3 + k_{11}c_1a_{10} + k_{12}c_2a_{20}\right) = 2a_{12}\left(k_{13}c_1^2 + k_{14}c_2^2\right), \\ T^1 : 2a_{12}\left(c_3 + k_{11}c_1a_{10} + k_{12}c_2a_{20}\right) + a_{11}\left(k_{11}c_1a_{11} + k_{12}c_2a_{21}\right) = -2a_{11}\left(k_{13}c_1^2 + k_{14}c_2^2\right), \\ T^2 : 2a_{12}\left(k_{11}c_1a_{11} + k_{12}c_2a_{21}\right) + a_{11}\left(k_{11}c_1a_{12} + k_{12}c_2a_{22}\right) = -6a_{12}\left(k_{13}c_1^2 + k_{14}c_2^2\right), \\ T^3 : 2a_{12}\left(k_{11}c_1a_{12} + k_{12}c_2a_{22}\right) = 0, \\ T^0 : a_{21}\left(c_3 + k_{21}c_1a_{10} + k_{22}c_2a_{20}\right) = 2a_{22}\left(k_{23}c_1^2 + k_{24}c_2^2\right), \\ T^1 : 2a_{22}\left(c_3 + k_{21}c_1a_{10} + k_{22}c_2a_{20}\right) + a_{21}\left(k_{21}c_1a_{11} + k_{12}c_2a_{21}\right) = -2a_{21}\left(k_{23}c_1^2 + k_{24}c_2^2\right), \\ T^2 : 2a_{22}\left(k_{11}c_1a_{11} + k_{12}c_2a_{21}\right) + a_{21}\left(k_{11}c_1a_{12} + k_{12}c_2a_{22}\right) = -6a_{22}\left(k_{23}c_1^2 + k_{24}c_2^2\right), \\ T^3 : 2a_{22}\left(k_{11}c_1a_{12} + k_{12}c_2a_{22}\right) = 0. \end{cases} \tag{6}$$

Крок 4. Розв'язування системи нелінійних алгебричних рівнянь.

Розглянемо два рівняння при степенях T^3 системи (6)

$$\begin{cases} 2a_{12}\left(k_{11}c_1a_{12}+k_{12}c_2a_{22}\right)=0, \\ 2a_{22}\left(k_{21}c_1a_{12}+k_{22}c_2a_{22}\right)=0. \end{cases}$$

Оскільки a_{12}, a_{22} за умовою відмінні від нуля, то

$$\begin{cases} k_{11}c_1a_{12}+k_{12}c_2a_{22}=0, \\ k_{21}c_1a_{12}+k_{22}c_2a_{22}=0. \end{cases}$$

Якщо визначник системи (1) $k_{11}k_{22}-k_{12}k_{21}\neq 0$, то коефіцієнти a_{12}, a_{22} одночасно дорівнюють нулю, що суперечить умові існування розв'язку у вигляді квадратичного полінома (5). Якщо ж $k_{11}k_{22}-k_{12}k_{21}=0$, то знаходимо розв'язки $a_{12}=-\dfrac{k_{12}c_2A_{22}}{k_{11}c_1}$, $a_{22}=A_{22}$, де $A_{22}\in R\setminus\{0\}$ – довільне відмінне від нуля дійсне число.

Підставивши отримані розв'язки в систему (6), одержимо

$$\begin{cases} T^0: a_{11}\left(c_3+k_{11}c_1a_{10}+k_{12}c_2a_{20}\right)=\left(-\dfrac{k_{12}c_2A_{22}}{k_{11}c_1}\right)2\left(k_{13}c_1^2+k_{14}c_2^2\right), \\ T^1: 2\left(-\dfrac{k_{12}c_2A_{22}}{k_{11}c_1}\right)\left(c_3+k_{11}c_1a_{10}+k_{12}c_2a_{20}\right)+a_{11}\left(k_{11}c_1a_{11}+k_{12}c_2a_{21}\right)=-2a_{11}\left(k_{13}c_1^2+k_{14}c_2^2\right), \\ T^2: 2\left(-\dfrac{k_{12}c_2A_{22}}{k_{11}c_1}\right)\left(k_{11}c_1a_{11}+k_{12}c_2a_{21}\right)+a_{11}\left(k_{11}c_1\left(-\dfrac{k_{12}c_2A_{22}}{k_{11}c_1}\right)+k_{12}c_2a_{22}\right)= \\ \qquad =-6\left(-\dfrac{k_{12}c_2A_{22}}{k_{11}c_1}\right)\left(k_{13}c_1^2+k_{14}c_2^2\right), \\ T^0: a_{21}\left(c_3+k_{21}c_1a_{10}+k_{22}c_2a_{20}\right)=2A_{22}\left(k_{23}c_1^2+k_{24}c_2^2\right), \\ T^1: 2A_{22}\left(c_3+k_{21}c_1a_{10}+k_{22}c_2a_{20}\right)+a_{21}\left(k_{21}c_1a_{11}+k_{12}c_2a_{21}\right)=-2a_{21}\left(k_{23}c_1^2+k_{24}c_2^2\right), \\ T^2: 2A_{22}\left(k_{11}c_1a_{11}+k_{12}c_2a_{21}\right)+a_{21}\left(k_{11}c_1\left(-\dfrac{k_{12}c_2A_{22}}{k_{11}c_1}\right)+k_{12}c_2a_{22}\right)= \\ \qquad =-6A_{22}\left(k_{23}c_1^2+k_{24}c_2^2\right). \end{cases}$$

Використавши пакет символьного обчислення Mathematica, отримуємо порожню множину розв'язків. Це означає, що при жодному наборі коефіцієнтів системи (1) не існує розв'язку у вигляді квадратичного полінома від гіперболічного тангенса.

Для того, щоб визначити степінь M_1, ми запропонували прирівняти максимальний елемент із множини E_1 із максимальним елементом множини: $E_1\setminus E_{1\max}$. У підсумку отримаємо рівняння для визначення M_1: $2M_1+1=M_1+2$, звідки визначаємо, що $M_1=1$, а з умови $M_1=M_2$ отримуємо, що $M_2=1$.

Отже, розв'язок системи (2) шукатимемо у вигляді полінома першого степеня від гіперболічного тангенса

$$u(\xi)=a_{10}+a_{11}T,\ v(\xi)=a_{20}+a_{21}T. \tag{7}$$

Крок 3. Система нелінійних алгебричних рівнянь для знаходження значень невідомих коефіцієнтів

Підставивши (7) в (2), отримаємо

$$\begin{cases} c_3 a_{11} + k_{11} c_1 a_{11} (a_{10} + a_{11} T) + k_{12} c_2 a_{11} (a_{20} + a_{21} T) = -2 a_{11} T \left(c_1^2 k_{13} + c_2^2 k_{14} \right), \\ c_3 a_{21} + k_{21} c_1 a_{21} (a_{10} + a_{11} T) + k_{22} c_2 a_{21} (a_{20} + a_{21} T) = -2 a_{21} T \left(c_1^2 k_{23} + c_2^2 k_{24} \right). \end{cases}$$

Прирівнявши коефіцієнти при степенях T до нуля, отримаємо систему нелінійних алгебричних рівнянь для визначення невідомих коефіцієнтів a_{ij}

$$\begin{cases} T^0 : c_3 a_{11} + k_{11} c_1 a_{10} a_{11} + k_{12} c_2 a_{11} a_{20} = 0, \\ T^1 : k_{11} c_1 a_{11}^2 + k_{12} c_2 a_{11} a_{21} + 2 \left(c_1^2 k_{13} + c_2^2 k_{14} \right) a_{11} = 0, \\ T^0 : c_3 a_{21} + k_{21} c_1 a_{10} a_{21} + k_{22} c_2 a_{21} a_{20} = 0, \\ T^1 : k_{12} c_1 a_{11} a_{21} + k_{22} c_2 a_{21}^2 + 2 \left(c_1^2 k_{23} + c_2^2 k_{24} \right) a_{21} = 0. \end{cases} \tag{8}$$

Крок 4. Розв'язування системи нелінійних алгебричних рівнянь.

Систему (8) розв'язуємо за умови, що коефіцієнти a_{11}, a_{21} та числа c_1, c_2, c_3 – відмінні від нуля. За таких умов отримаємо систему лінійних алгебричних рівнянь для визначення невідомих коефіцієнтів a_{ij}

$$\begin{cases} k_{11} c_1 a_{10} + k_{12} c_2 a_{20} = -c_3, \\ k_{11} c_1 a_{11} + k_{12} c_2 a_{21} = -2 \left(c_1^2 k_{13} + c_2^2 k_{14} \right), \\ k_{21} c_1 a_{10} + k_{22} c_2 a_{20} = -c_3, \\ k_{21} c_1 a_{11} + k_{22} c_2 a_{21} = -2 \left(c_1^2 k_{23} + c_2^2 k_{24} \right), \end{cases}$$

яка розпадається на дві незалежні системи лінійних алгебричних рівнянь

$$\begin{cases} k_{11} c_1 a_{10} + k_{12} c_2 a_{20} = -c_3, \\ k_{21} c_1 a_{10} + k_{22} c_2 a_{20} = -c_3 \end{cases} \tag{9}$$

та

$$\begin{cases} k_{11} c_1 a_{11} + k_{12} c_2 a_{21} = -2 \left(c_1^2 k_{13} + c_2^2 k_{14} \right), \\ k_{21} c_1 a_{11} + k_{22} c_2 a_{21} = -2 \left(c_1^2 k_{23} + c_2^2 k_{24} \right). \end{cases} \tag{10}$$

У випадку $\Delta = (k_{11} k_{22} - k_{12} k_{21}) \neq 0$, отримаємо такі розв'язки:

$$a_{10} = \frac{c_3 (k_{12} - k_{22})}{c_1 (k_{11} k_{22} - k_{12} k_{21})}, \quad a_{11} = \frac{2 c_1^2 (k_{23} k_{12} - k_{13} k_{22}) + 2 c_2^2 (k_{24} k_{12} - k_{14} k_{22})}{c_1 (k_{11} k_{22} - k_{12} k_{21})},$$

$$a_{20} = \frac{c_3 (k_{21} - k_{11})}{c_2 (k_{11} k_{22} - k_{12} k_{21})}, \quad a_{21} = \frac{2 c_1^2 (k_{13} k_{21} - k_{11} k_{23}) + 2 c_2^2 (k_{14} k_{21} - k_{11} k_{24})}{c_2 (k_{11} k_{22} - k_{12} k_{21})}.$$

Тепер розглянемо випадок, коли $\Delta = 0$.

Виконавши один крок методу Гауса для системи (9), отримаємо таку систему, записану у матричному вигляді

$$\begin{pmatrix} k_{11} c_1 & k_{12} c_2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{10} \\ a_{20} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -c_3 \\ c_3 \left(\dfrac{k_{21}}{k_{11}} - 1 \right) \end{pmatrix}.$$

Для того, щоб отримана система була сумісною, потрібно, щоб друга компонента вектора вільних членів $c_3 \left(\dfrac{k_{21}}{k_{11}} - 1 \right)$ дорівнювала нулю. Оскільки коефіцієнт c_3 відмінний від нуля, то на коефіцієнти системи (2) треба накласти умову сумісності $\frac{k_{11}}{k_{21}} = 1$, або $k_{11} = k_{21}$. З огляду на те, що визначник $\Delta = (k_{11}k_{22} - k_{12}k_{21}) = 0$, то отримуємо ще одну умову існування розв'язків $k_{22} = k_{12}$.

Якщо для коефіцієнтів системи (1) одночасно виконується $k_{11} = k_{21}$ та $k_{22} = k_{12}$, то система (9) має безліч розв'язків.

Якщо при $\Delta = 0$ не виконуються $k_{11} = k_{21}$ або $k_{22} = k_{12}$, то не існує солітонних розв'язків для системи (1).

За умови одночасного виконання цих умов знаходимо значення невідомих коефіцієнтів a_{10}, a_{20}. Оскільки система (9) має безліч розв'язків, то можемо вибрати коефіцієнт a_{20} так, що він дорівнюватиме деякому дійсному ненульовому числу $A_{20} \in R \setminus \{0\}$, тоді невідомий коефіцієнт $a_{10} = -\frac{c_3 + k_{12}c_2A_{20}}{c_1k_{11}}$. Знайдемо ще один розв'язок системи (9), вимагаючи, щоб $a_{10} = a_{20}$, тоді отримаємо таке значення коефіцієнтів $a_{10} = a_{20} = -\frac{c_3}{k_{11}c_1 + k_{12}c_2}$.

Виконавши один крок методу Гауса для системи (10), переконуємося, що система (10) має безліч розв'язків, якщо, крім виконання $k_{11} = k_{21}$ та $k_{22} = k_{12}$, виконується ще співвідношення $\frac{c_1^2k_{13} + c_2^2k_{14}}{c_1^2k_{23} + c_2^2k_{24}} = 1$. З огляду на довільність сталих c_1, c_2 достатньо вимагати, щоб виконувалося співвідношення $k_{13} + k_{14} = k_{23} + k_{24}$. Оскільки система (10) має безліч розв'язків, то вважатимемо, що шуканий коефіцієнт a_{21} дорівнює деякому дійсному ненульовому числу $A_{21} \in R \setminus \{0\}$, яке можна вибрати довільним. Тоді знаходимо другий коефіцієнт $a_{11} = -\frac{k_{12}c_2A_{21} + 2(c_1^2k_{13} + c_2^2k_{14})}{k_{11}c_1}$, який залежить від числа $A_{21} \in R \setminus \{0\}$. Знайдено ще один розв'язок системи (10), а саме такий, що

$$a_{11} = a_{21} = -2\left(\frac{c_1^2k_{13} + c_2^2k_{14}}{k_{11}c_1 + k_{12}c_2}\right).$$

Якщо коефіцієнти системи (1) одночасно задовольняють умови $k_{11} = k_{21}, k_{12} = k_{22}, k_{13} + k_{14} = k_{23} + k_{24}$, то нелінійна динамічна система (1) має безліч солітонних розв'язків.

Крок 5. Отримання явного розв'язку нелінійної динамічної системи.

Враховуючи вигляд полінома (7) та розв'язки систем (9, 10), при виборі сталих $c_1 = c_2 = c_3 = 1, c_4 = -1$ отримуємо явні розв'язки системи (1) залежно від значення визначника системи Δ.

Якщо визначник Δ відмінний від нуля, то розв'язки системи (1) набувають вигляду

$$u(x,y,t) = \left(\frac{k_{12} - k_{22}}{k_{11}k_{22} - k_{12}k_{21}}\right) + 2\left(\frac{k_{23}k_{12} - k_{13}k_{22} + k_{24}k_{12} - k_{14}k_{22}}{k_{11}k_{22} - k_{12}k_{21}}\right)th(x + y + t - 1),$$

$$v(x,y,t)=\left(\frac{k_{21}-k_{11}}{k_{11}k_{22}-k_{12}k_{21}}\right)+2\left(\frac{k_{13}k_{21}-k_{11}k_{23}+k_{14}k_{21}-k_{11}k_{24}}{k_{11}k_{22}-k_{12}k_{21}}\right)th(x+y+t-1).$$

Якщо визначник Δ дорівнює нулю та виконуються умови на коефіцієнти $k_{11}=k_{21}$, $k_{12}=k_{22}$, $k_{13}+k_{14}=k_{23}+k_{24}$, то розв'язки системи (1) набувають вигляду

$$u(x,y,t)=-\frac{1+k_{12}A_{20}}{k_{11}}-\left(\frac{k_{12}A_{21}+2(k_{13}+k_{14})}{k_{11}}\right)th(x+y+t-1),$$

$$v(x,y,t)=A_{20}+A_{21}th(x+y+t).$$

Система (1) має ще такий розв'язок $u(x,y,t)=v(x,y,t)$:

$$u(x,y,t)=v(x,y,t)=-\frac{1}{k_{11}+k_{12}}-2\left(\frac{k_{13}+k_{14}}{k_{11}+k_{12}}\right)th(x+y+t-1),$$

оскільки при розв'язуванні систем (9), (10), ми вимагали рівність коефіцієнтів $a_{10}=a_{20}$ та $a_{11}=a_{21}$.

4. ПОБУДОВА ТОЧНИХ РОЗВ'ЯЗКІВ У ВИГЛЯДІ ПОЛІНОМА ВІД ГІПЕРБОЛІЧНОГО КОТАНГЕНСА

Для побудови розв'язку нелінійної динамічної системи (1) у вигляді полінома від гіперболічного котангенса виконаємо кроки 2–5 методу гіперболічних тангенс функцій.

Крок 2. Визначення степеня поліноміального розв'язку.

Розв'язок системи (1) шукаємо у вигляді полінома від гіперболічного котангенса

$$u(\xi)=a_{10}+\sum_{j=1}^{M_1}a_{1j}C^j,$$

$$v(\xi)=a_{20}+\sum_{j=1}^{M_2}a_{2j}C^j,$$

де $C=cth(\xi)-$ гіперболічний котангенс.

Для визначення степеня поліноміального розв'язку (3) підставимо поліноми $u(\xi)=C^{M_1}, v(\xi)=C^{M_2}$ у систему (2). Зауважимо, що

$$C'=1-C^2.$$

Запишемо вирази перших і других похідних $u(C)$ та $v(C)$

$$u'(\xi)=M_1(1-C^2)C^{M_1-1},$$

$$u''(\xi)=M_1(M_1-1)(1-CT^2)^2C^{M_1-2}-2M_1C(1-C^2)C^{M_1-1},$$

$$v'(\xi)=M_2(1-C^2)C^{M_2-1},$$

$$v''(\xi)=M_2(M_2-1)(1-C^2)^2C^{M_2-2}-2M_2C(1-C^2)C^{M_2-1}.$$

Випишемо степені похідних поліноміальних розв'язків

$$\deg(u(\xi))=M_1,\ \deg(u'(\xi))=M_1+1,\ \deg(u''(\xi))=M_1+2,$$

$$\deg(v(\xi))=M_2,\ \deg(v'(\xi))=M_2+1,\ \deg(v''(\xi))=M_2+2.$$

Для першого та другого рівняння системи (2) отримуємо, відповідно, множини значень степенів

$$E_1=\{M_1+1,\ 2M_1+1,\ M_1+M_2+1,\ M_1+2\}$$

і

$$E_2 = \{M_2+1,\ M_1 + M_2 + 1,\ 2M_2 + 1,\ M_2 + 2\}\ .$$

З кожної множини E_1 та E_2 виберемо по два максимальні елементи та сформуємо відповідні множини

$$E_{1\max} = \{2M_1 + 1,\ M_1 + M_2 + 1\}$$

та

$$E_{2\max} = \{2M_2 + 1,\ M_1 + M_2 + 1\}\ .$$

Із отриманих множин сформуємо систему рівнянь для визначення M_1, M_2

$$\begin{cases} 2M_1 + 1 = M_1 + M_2 + 1, \\ 2M_2 + 1 = M_1 + M_2 + 1, \end{cases}$$

з якої отримуємо, що $M_2 = M_1$, де M_1 – довільне ненульове число.

Для визначення степеня M_1 прирівняємо максимальний елемент із множини E_1 із максимальним елементом множини $E_1 \setminus E_{1\max}$. У підсумку отримаємо рівняння для визначення M_1: $2M_1 + 1 = M_1 + 2$, звідки визначаємо, що $M_1 = 1$, а з умови $M_1 = M_2$ отримуємо, що $M_2 = 1$. Отже, розв'язок системи (2) шукатимемо у вигляді полінома першого степеня від гіперболічного котангенса

$$u(\xi) = a_{10} + a_{11}C\ ,\ v(\xi) = a_{20} + a_{21}C\ . \tag{11}$$

Крок 3. Система нелінійних алгебричних рівнянь для знаходження значень невідомих коефіцієнтів.

Підставивши (11) у (2), отримаємо систему

$$\begin{cases} c_3a_{11} + k_{11}c_1a_{11}(a_{10} + a_{11}C) + k_{12}c_2a_{11}(a_{20} + a_{21}C) = -2a_{11}C(c_1^2k_{13} + c_2^2k_{14}), \\ c_3a_{21} + k_{21}c_1a_{21}(a_{10} + a_{11}C) + k_{22}c_2a_{21}(a_{20} + a_{21}C) = -2a_{21}C(c_1^2k_{23} + c_2^2k_{24}). \end{cases}$$

Прирівняємо в цій системі коефіцієнти при степенях C до нуля та отримаємо систему нелінійних алгебричних рівнянь для визначення невідомих коефіцієнтів a_{ij}

$$\begin{cases} C^0 : c_3a_{11} + k_{11}c_1a_{10}a_{11} + k_{12}c_2a_{11}a_{20} = 0, \\ C^1 : k_{11}c_1a_{11}^2 + k_{12}c_2a_{11}a_{21} + 2(c_1^2k_{13} + c_2^2k_{14})a_{11} = 0, \\ C^0 : c_3a_{21} + k_{21}c_1a_{10}a_{21} + k_{22}c_2a_{21}a_{20} = 0, \\ C^1 : k_{12}c_1a_{11}a_{21} + k_{22}c_2a_{21}^2 + 2(c_1^2k_{23} + c_2^2k_{24})a_{21} = 0. \end{cases} \tag{12}$$

Крок 4. Розв'язування системи нелінійних алгебричних рівнянь.

Система нелінійних алгебричних рівнянь (12) збігається з системою нелінійних алгебричних рівнянь (8), а отже, розв'язки системи (8) є розв'язками системи (12).

Крок 5. Отримання явного розв'язку нелінійної динамічної системи.

Враховуючи вигляд полінома (11) та розв'язки систем (8, 9, 10, 12) при виборі сталих $c_1 = c_2 = c_3 = 1,\ c_4 = -1$, отримуємо явні розв'язки системи залежно від значень визначника Δ системи (1).

Якщо визначник Δ відмінний від нуля, то розв'язки системи (1) набувають вигляду

$$u(x, y, t) = \left(\frac{k_{12} - k_{22}}{k_{11}k_{22} - k_{12}k_{21}}\right) + 2\left(\frac{k_{23}k_{12} - k_{13}k_{22} + k_{24}k_{12} - k_{14}k_{22}}{k_{11}k_{22} - k_{12}k_{21}}\right) cth(x + y + t - 1)\ ,$$

$$v(x,y,t)=\left(\frac{k_{21}-k_{11}}{k_{11}k_{22}-k_{12}k_{21}}\right)+2\left(\frac{k_{13}k_{21}-k_{11}k_{23}+k_{14}k_{21}-k_{11}k_{24}}{k_{11}k_{22}-k_{12}k_{21}}\right)cth(x+y+t-1)\ .$$

Якщо визначник Δ дорівнює нулю та виконуються умови на коефіцієнти $k_{11}=k_{21},\ k_{12}=k_{22},\ k_{13}+k_{14}=k_{23}+k_{24}$, то розв'язки системи (1) мають явний вигляд

$$u(x,y,t)=-\frac{1+k_{12}A_{20}}{k_{11}}-\left(\frac{k_{12}A_{21}+2(k_{13}+k_{14})}{k_{11}}\right)cth(x+y+t-1)\ ,$$

$$v(x,y,t)=A_{20}+A_{21}cth(x+y+t-1)\ ,$$

де A_{20},A_{21} – довільні ненульові дійсні числа.

Крім того, система (1) має розв'язок $u(x,y,t)=v(x,y,t)$

$$u(x,y,t)=v(x,y,t)=-\frac{1}{k_{11}+k_{12}}-2\left(\frac{k_{13}+k_{14}}{k_{11}+k_{12}}\right)cth(x+y+t-1)\ .$$

5. ПОБУДОВА ТОЧНИХ РОЗВ'ЯЗКІВ У ВИГЛЯДІ ПОЛІНОМА ВІД ГІПЕРБОЛІЧНОГО ТАНГЕНСА ТА ГІПЕРБОЛІЧНОГО КОТАНГЕНСА

У [7] запропоновано відшукання розв'язків нелінійних динамічних систем у вигляді суми поліномів від гіперболічного тангенса та гіперболічного котангенса. Для цього виконаємо кроки 2-5.

Крок 2. Визначення степеня поліноміального розв'язку.

Розв'язок системи (2) шукаємо у вигляді поліномів

$$u(\xi)=a_{10}+\sum_{j=1}^{M_1}a_{1j}T^{j}+\sum_{j=1}^{M_1}b_{1j}T^{-j}\ ,$$

$$v(\xi)=a_{20}+\sum_{j=1}^{M_2}a_{2j}T^{j}+\sum_{j=1}^{M_2}b_{2j}T^{-j}\ .$$

Для визначення невідомих степенів M_1,M_2 достатньо підставити поліноми $u(\xi)=T^{M_1}$ та $v(\xi)=T^{M_2}$ в систему (2). Оскільки ця процедура вже виконана при побудові точних розв'язків від гіперболічного тангенса, то розв'язки системи (2) шукаємо у вигляді суми поліномів першого степеня від гіперболічного тангенса та гіперболічного котангенса

$$u(\xi)=a_{10}+a_{11}T+a_{12}T^{-1},v(\xi)=a_{20}+a_{21}T+a_{22}T^{-1}\ . \tag{13}$$

Крок 3. Система нелінійних алгебричних рівнянь для знаходження значень невідомих коефіцієнтів.

Випишемо перші та другі похідні розв'язків (13)

$$u'(\xi)=a_{11}(1-T^2)+a_{12}(1-T^{-2}),\ v'(\xi)=a_{21}(1-T^2)+a_{22}(1-T^{-2})\ ,$$

$$u''(\xi)=-2a_{11}T(1-T^2)-2a_{12}T^{-1}(1-T^{-2}),\ v''(\xi)=-2a_{21}T(1-T^2)-2a_{22}T^{-1}(1-T^{-2})\ .$$

Користуючись цими співвідношеннями, підставивши (13) у (2), отримаємо систему

$$\begin{cases}\left(a_{11}(1-T^2)+a_{12}(1-T^{-2})\right)\left(c_3+k_{11}c_1\left(a_{10}+a_{11}T+a_{12}T^{-1}\right)+k_{12}c_2\left(a_{20}+a_{21}T+a_{22}T^{-1}\right)\right)=\\=\left(c_1^2k_{13}+c_2^2k_{14}\right)\left(-2a_{11}T(1-T^2)-2a_{12}T^{-1}(1-T^{-2})\right),\\\left(a_{21}(1-T^2)+a_{22}(1-T^{-2})\right)\left(c_3+k_{21}c_1\left(a_{10}+a_{11}T+a_{12}T^{-1}\right)+k_{22}c_2\left(a_{20}+a_{21}T+a_{22}T^{-1}\right)\right)=\\=\left(c_1^2k_{23}+c_2^2k_{24}\right)\left(-2a_{21}T(1-T^2)-2a_{22}T^{-1}(1-T^{-2})\right).\end{cases}$$

Прирівнюючи до нуля коефіцієнти при степенях T, отримаємо систему нелінійних алгебричних рівнянь для визначення невідомих коефіцієнтів a_{ij}

$$\begin{cases}
T^0: (a_{11}+a_{12})(c_3+k_{11}c_1a_{10}+k_{12}c_2a_{20})=0,\\
T^1: (a_{11}+a_{12})(k_{11}c_1a_{11}+k_{12}c_2a_{21})-a_{11}(k_{11}c_1a_{12}+k_{12}c_2a_{22})=-2a_{11}(c_1^2k_{13}+c_2^2k_{14}),\\
T^{-1}: (a_{11}+a_{12})(k_{11}c_1a_{12}+k_{12}c_2a_{22})-a_{12}(k_{11}c_1a_{11}+k_{12}c_2a_{21})=-2a_{12}(c_1^2k_{13}+c_2^2k_{14}),\\
T^2: a_{11}(c_3+k_{11}c_1a_{10}+k_{12}c_2a_{20})=0,\\
T^{-2}: a_{12}(c_3+k_{11}c_1a_{10}+k_{12}c_2a_{20})=0,\\
T^3: a_{11}(k_{11}c_1a_{11}+k_{12}c_2a_{21})=-2a_{11}(c_1^2k_{13}+c_2^2k_{14}),\\
T^{-3}: a_{12}(k_{11}c_1a_{12}+k_{12}c_2a_{22})=-2a_{12}(c_1^2k_{13}+c_2^2k_{14}),\\
T^0: (a_{21}+a_{22})(c_3+k_{21}c_1a_{10}+k_{22}c_2a_{20})=0,\\
T^1: (a_{21}+a_{22})(k_{21}c_1a_{11}+k_{22}c_2a_{21})-a_{21}(k_{21}c_1a_{12}+k_{22}c_2a_{22})=-2a_{21}(c_1^2k_{23}+c_2^2k_{24}),\\
T^{-1}: (a_{21}+a_{22})(k_{21}c_1a_{12}+k_{22}c_2a_{22})-a_{22}(k_{21}c_1a_{11}+k_{22}c_2a_{21})=-2a_{22}(c_1^2k_{23}+c_2^2k_{24}),\\
T^2: a_{21}(c_3+k_{21}c_1a_{10}+k_{22}c_2a_{20})=0,\\
T^{-2}: a_{22}(c_3+k_{21}c_1a_{10}+k_{22}c_2a_{20})=0,\\
T^3: a_{21}(k_{21}c_1a_{11}+k_{22}c_2a_{21})=-2a_{11}(c_1^2k_{23}+c_2^2k_{24}),\\
T^{-3}: a_{22}(k_{21}c_1a_{12}+k_{22}c_2a_{22})=-2a_{22}(c_1^2k_{23}+c_2^2k_{24})
\end{cases} \tag{14}$$

Крок 4. Розв'язування системи нелінійних алгебричних рівнянь.

Розв'язуємо систему нелінійних алгебричних рівнянь (14) за умови, що коефіцієнти при гіперболічному тангенсі та гіперболічному котангенсі відмінні від нуля.

Система (14) розпадається на дві системи нелінійних алгебричних рівнянь

$$\begin{cases}
(a_{11}+a_{12})(c_3+k_{11}c_1a_{10}+k_{12}c_2a_{20})=0,\\
a_{11}(c_3+k_{11}c_1a_{10}+k_{12}c_2a_{20})=0,\\
a_{12}(c_3+k_{11}c_1a_{10}+k_{12}c_2a_{20})=0,\\
(a_{21}+a_{22})(c_3+k_{21}c_1a_{10}+k_{22}c_2a_{20})=0,\\
a_{21}(c_3+k_{21}c_1a_{10}+k_{22}c_2a_{20})=0,\\
a_{22}(c_3+k_{21}c_1a_{10}+k_{22}c_2a_{20})=0,
\end{cases} \tag{15}$$

та

$$\begin{cases}
(a_{11}+a_{12})(k_{11}c_1a_{11}+k_{12}c_2a_{21})-a_{11}(k_{11}c_1a_{12}+k_{12}c_2a_{22})=-2a_{11}(c_1^2k_{13}+c_2^2k_{14}),\\
(a_{11}+a_{12})(k_{11}c_1a_{12}+k_{12}c_2a_{22})-a_{12}(k_{11}c_1a_{11}+k_{12}c_2a_{21})=-2a_{12}(c_1^2k_{13}+c_2^2k_{14}),\\
a_{11}(k_{11}c_1a_{11}+k_{12}c_2a_{21})=-2a_{11}(c_1^2k_{13}+c_2^2k_{14}),\\
a_{12}(k_{11}c_1a_{12}+k_{12}c_2a_{22})=-2a_{12}(c_1^2k_{13}+c_2^2k_{14}),\\
(a_{21}+a_{22})(k_{21}c_1a_{11}+k_{22}c_2a_{21})-a_{21}(k_{21}c_1a_{12}+k_{22}c_2a_{22})=-2a_{21}(c_1^2k_{23}+c_2^2k_{24}),\\
(a_{21}+a_{22})(k_{21}c_1a_{12}+k_{22}c_2a_{22})-a_{22}(k_{21}c_1a_{11}+k_{22}c_2a_{21})=-2a_{22}(c_1^2k_{23}+c_2^2k_{24}),\\
a_{21}(k_{21}c_1a_{11}+k_{22}c_2a_{21})=-2a_{21}(c_1^2k_{23}+c_2^2k_{24}),\\
a_{22}(k_{21}c_1a_{12}+k_{22}c_2a_{22})=-2a_{22}(c_1^2k_{23}+c_2^2k_{24}).
\end{cases} \tag{16}$$

Розглянемо систему (15). Перше рівняння є сумою другого та третього рівнянь, а четверте рівняння – сумою п'ятого та шостого рівнянь, тому перше та четверте рівняння можна вилучити з системи (15). У підсумку отримаємо модифіковану систему

$$\begin{cases} a_{11}\left(c_3 + k_{11}c_1a_{10} + k_{12}c_2a_{20}\right) = 0, \\ a_{12}\left(c_3 + k_{11}c_1a_{10} + k_{12}c_2a_{20}\right) = 0, \\ a_{21}\left(c_3 + k_{21}c_1a_{10} + k_{22}c_2a_{20}\right) = 0, \\ a_{22}\left(c_3 + k_{21}c_1a_{10} + k_{22}c_2a_{20}\right) = 0. \end{cases}$$

Оскільки коефіцієнти $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}$ відмінні від нуля, то переходимо до розв'язування системи лінійних алгебричних рівнянь для визначення невідомих коефіцієнтів a_{10}, a_{20}

$$\begin{cases} k_{11}c_1a_{10} + k_{12}c_2a_{20} = -c_3, \\ k_{21}c_1a_{10} + k_{22}c_2a_{20} = -c_3. \end{cases}$$

Зауважимо, що отримана система збігається з системою (9), а отже, розв'язки системи (9) є розв'язками отриманої системи.

Розглянемо таку підсистему:

$$\begin{cases} a_{11}\left(k_{11}c_1a_{11} + k_{12}c_2a_{21}\right) = -2a_{11}\left(c_1^2k_{13} + c_2^2k_{14}\right), \\ a_{12}\left(k_{11}c_1a_{12} + k_{12}c_2a_{22}\right) = -2a_{12}\left(c_1^2k_{13} + c_2^2k_{14}\right), \\ a_{21}\left(k_{21}c_1a_{11} + k_{22}c_2a_{21}\right) = -2a_{21}\left(c_1^2k_{23} + c_2^2k_{24}\right), \\ a_{22}\left(k_{21}c_1a_{12} + k_{22}c_2a_{22}\right) = -2a_{22}\left(c_1^2k_{23} + c_2^2k_{24}\right). \end{cases}$$

Оскільки коефіцієнти $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}$ відмінні від нуля, то можемо перейти до системи лінійних алгебричних рівнянь

$$\begin{cases} k_{11}c_1a_{11} + k_{12}c_2a_{21} = -2\left(c_1^2k_{13} + c_2^2k_{14}\right), \\ k_{11}c_1a_{12} + k_{12}c_2a_{22} = -2\left(c_1^2k_{13} + c_2^2k_{14}\right), \\ k_{21}c_1a_{11} + k_{22}c_2a_{21} = -2\left(c_1^2k_{23} + c_2^2k_{24}\right), \\ k_{21}c_1a_{12} + k_{22}c_2a_{22} = -2\left(c_1^2k_{23} + c_2^2k_{24}\right). \end{cases}$$

Ця система розпадається на дві системи

$$\begin{cases} k_{11}c_1a_{11} + k_{12}c_2a_{21} = -2\left(c_1^2k_{13} + c_2^2k_{14}\right), \\ k_{21}c_1a_{11} + k_{22}c_2a_{21} = -2\left(c_1^2k_{23} + c_2^2k_{24}\right) \end{cases} \text{ та } \begin{cases} k_{11}c_1a_{12} + k_{12}c_2a_{22} = -2\left(c_1^2k_{13} + c_2^2k_{14}\right), \\ k_{21}c_1a_{12} + k_{22}c_2a_{22} = -2\left(c_1^2k_{23} + c_2^2k_{24}\right). \end{cases}$$

Зауважимо, що ці системи збігаються з системою (10), а отже, розв'язки системи (10) є розв'язками отриманих систем. Варто зазначити, що ці системи відрізняються між собою лише тим, що, розв'язавши першу, знайдемо значення невідомих коефіцієнтів a_{11}, a_{21}, а розв'язавши другу, знайдемо значення невідомих коефіцієнтів a_{12}, a_{22}, причому виконується рівність $a_{11} = a_{12}, a_{12} = a_{22}$, оскільки матриця в лівій частині та вектор вільних членів однакові. Підстановка знайдених невідомих коефіцієнтів $a_{11}, a_{21}, a_{12}, a_{22}$ у систему рівнянь (16) перетворює їх у тотожність.

Крок 5. Отримання явного розв'язку нелінійної динамічної системи.

Враховуючи вигляд полінома (13) та розв'язки систем (15, 16), при виборі сталих $c_1 = c_2 = c_3 = 1,\ c_4 = -1$ отримуємо явні розв'язки системи залежно від значень визначника Δ системи (1).

Якщо визначник Δ відмінний від нуля, то розв'язки системи (1) набули вигляду

$$u(x,y,t) = \left(\frac{k_{12}-k_{22}}{k_{11}k_{22}-k_{12}k_{21}}\right) +$$

$$+2\left(\frac{k_{23}k_{12}-k_{13}k_{22}+k_{24}k_{12}-k_{14}k_{22}}{k_{11}k_{22}-k_{12}k_{21}}\right)\bigl(th(x+y+t-1)+cth(x+y+t-1)\bigr),$$

$$v(x,y,t) = \left(\frac{k_{21}-k_{11}}{k_{11}k_{22}-k_{12}k_{21}}\right) +$$

$$+2\left(\frac{k_{13}k_{21}-k_{11}k_{23}+k_{14}k_{21}-k_{11}k_{24}}{k_{11}k_{22}-k_{12}k_{21}}\right)\bigl(th(x+y+t-1)+cth(x+y+t-1)\bigr).$$

Якщо визначник Δ дорівнює нулю та виконуються умови на коефіцієнти $k_{11} = k_{21},\ k_{12} = k_{22},\ k_{13}+k_{14} = k_{23}+k_{24}$, то розв'язки системи (1) набули вигляду

$$u(x,y,t) = -\frac{1+k_{12}A_{20}}{k_{11}} - \left(\frac{k_{12}A_{21}+2\bigl(k_{13}+k_{14}\bigr)}{k_{11}}\right)\bigl(th(x+y+t-1)+cth(x+y+t-1)\bigr),$$

$$v(x,y,t) = A_{20} + A_{21}\bigl(th(x+y+t)+cth(x+y+t)\bigr),$$

де A_{20}, A_{21} – довільні ненульові дійсні числа.

Крім того, система (1) має розв'язок $u(x,y,t) = v(x,y,t)$

$$u(x,y,t) = v(x,y,t) = -\frac{1}{k_{11}+k_{12}} - 2\left(\frac{k_{13}+k_{14}}{k_{11}+k_{12}}\right)\bigl(th(x+y+t-1)+cth(x+y+t-1)\bigr).$$

Так ми довели теорему 1.

Теорема 1. *Коефіцієнти в поліномах від гіперболічного тангенса* (7), *гіперболічного котангенса* (11) *та суми гіперболічного тангенса та гіперболічного котангенса* (11) *рівні між собою за однакових степенях гіперболічного тангенса та котангенса*.

6. ГРАФІЧНА ІНТЕРПРЕТАЦІЯ ТОЧНИХ РОЗВ'ЯЗКІВ

Нелінійна динамічна система (1) описує еволюцію турбулентних потоків рідини [8]. Функція u – це швидкість руху рідини вздовж додатного напряму осі абсцис, функція v – це швидкість руху рідини вздовж додатного напряму осі ординат.

Вектор $U = (u,v)$ задає вектор руху рідини. Введемо норму, яка характеризує інтенсивність руху рідини $\|U\| = \sqrt{u^2+v^2}$. Відповідно, при побудові графіку, що відображає інтенсивність руху рідини, довжини стрілок, які засвідчують напрям руху рідини, масштабуватимемо за максимальним значенням норми $\|U\|_{\max}$ в області $\Omega \in R^2$ в момент часу t , тобто, якщо величині $\|U\|_{\max}$ відповідає довжина стрілки L , то довжина стрілки l в певній точці області обчислюється за формулою $l = \frac{\| U \|}{\| U \|_{\max}} L$.

Щоб відобразити характер розв'язків системи (1), введемо області $\Omega_1 = \{(x, y) : x \in [0,1], y \in [0,1]\}$ та $\Omega_2 = \{(x, y) : x \in [-5,5], y \in [-5,5]\}$. Першу область Ω_1 використовуємо, щоб показати напрями руху рідини, а другу область Ω_2 використовуємо, щоб відобразити характер функцій u та v.

Наведемо графіки розв'язків у різні моменти часу та різних наборів коефіцієнтів, аналізуючи вплив зміни коефіцієнтів на розв'язки.

6.1. *ГРАФІЧНА ІНТЕРПРЕТАЦІЯ РОЗВ'ЯЗКІВ У ВИГЛЯДІ ПОЛІНОМА ВІД ГІПЕРБОЛІЧНОГО ТАНГЕНСА*

Розглянемо випадок $\Delta = 0$. Точний розв'язок нелінійної динамічної системи (1) при одиничних значеннях коефіцієнтів набув вигляду

$$u(x, y, t) = v(x, y, t) = -\frac{1}{2} - 2th(x + y + t - 1) .$$

В момент часу $t = 0$ розв'язок має такий вигляд

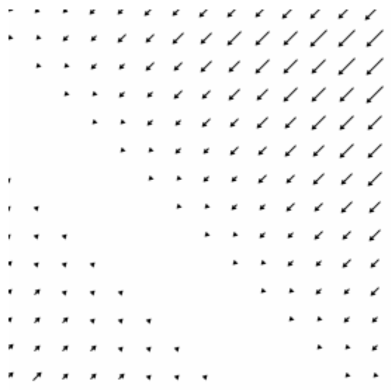


Рис. 1. Поле швидкості руху рідини в момент часу $t = 0$ в області Ω_1

Функції u та v в момент часу $t = 0$ набули вигляду

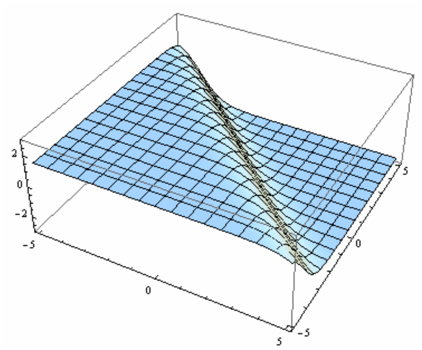


Рис. 2. Графік швидкостей u та v в момент часу $t = 0$ в області Ω_2

В момент часу $t = 0{,}5$ бачимо, що область, в якій руху немає, перемістилась в нижній лівий край, а в момент часу $t = 1$ у всій області Ω_1 рідина рухається у від'ємному напрямі по осі абсцис та по осі ординат

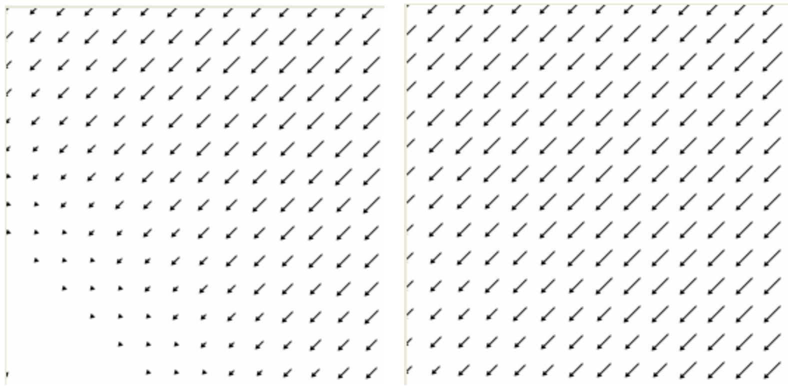
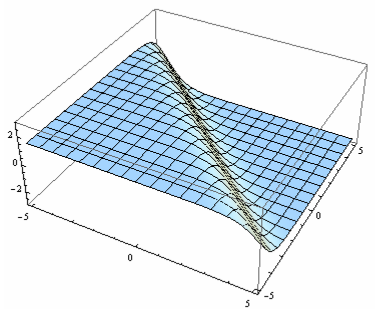
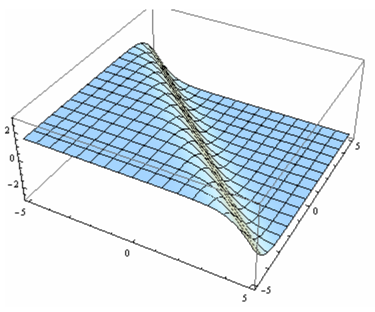


Рис. 3. Поле швидкостей руху рідини в моменти часу $t = 0{,}5$ та $t = 1$

Графіки розв'язків u та v в області Ω_2 в моменти часу $t = 0{,}5$ та $t = 1$ набули вигляду



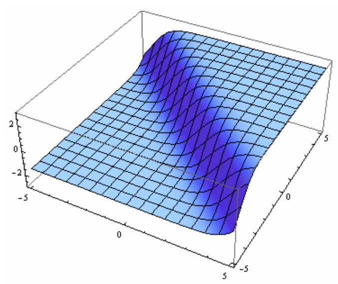


Якщо змінювати значення коефіцієнтів $k_{11}, k_{12}, k_{13}, k_{14}, k_{21}, k_{22}, k_{23}, k_{24}$ у додатному діапазоні так, щоб визначник дорівнював нулю та виконувалися умови сумісності, то характер розв'язку не зміниться.

Якщо $k_{11} = k_{12} = -1$, то напрям руху рідини змінюється на протилежний. На рис. 4 зображено поле руху рідини у початковий момент часу $t = 0$

Рис. 4. Поле швидкостей руху рідини в момент часу $t = 0$

Графіки функцій u, v набули вигляду



Розглянемо вплив зміни коефіцієнтів $k_{11}, k_{12}, k_{13}, k_{14}$ на характер розв'язку системи (1).

Зафіксуємо значення коефіцієнтів системи (1) $k_{12}, k_{13}, k_{14}, k_{21}, k_{22}, k_{23}, k_{24}$ одиничними, а коефіцієнт k_{11} приймемо довільним. Тоді точний розв'язок для системи (1) набуде вигляду $u(x,y,t) = 0, v(x,y,t) = -1 - 4th(x + y + t - 1)$. Ці розв'язки не залежать від коефіцієнта k_{11}, причому рух рідини відбувається лише вздовж осі ординат. Графік поля швидкостей такий

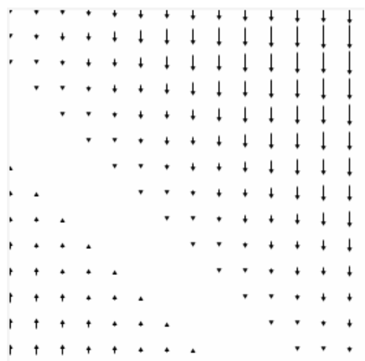


Рис. 5. Поле швидкостей у момент часу $t = 0$

Графіки функцій u та v в момент часу $t = 0$ набули вигляду

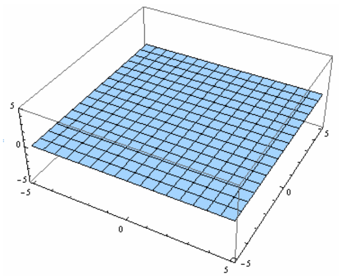


Рис. 5.1. Графік швидкості u в момент часу $t = 0$

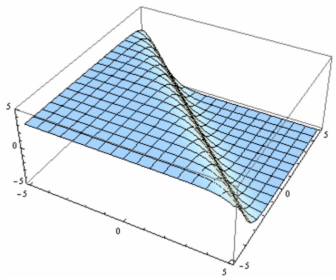


Рис. 5.2. Графік швидкості v в момент часу $t = 0$

На графіку 5.1 поверхня має плоский вигляд, оскільки функція $u = 0$.

Зафіксуємо значення коефіцієнтів системи (1) $k_{11}, k_{13}, k_{14}, k_{21}, k_{22}, k_{23}, k_{24}$ одиничними, а коефіцієнт k_{12} приймемо довільним. Тоді точний розв'язок для системи (1) при зазначених значеннях коефіцієнтів набув вигляду $u(x, y, t) = -1 - 4th(x + y + t), v(x, y, t) = 0$. Цей розв'язок не залежить від коефіцієнта k_{12}. Рух рідини відбувається лише вздовж осі абсцис. Графік поля швидкостей такий

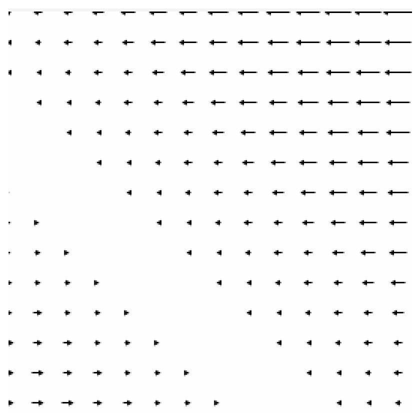


Рис. 6. Поле швидкостей у момент часу $t = 0$

Графіки функцій u та v в момент часу $t = 0$ набули вигляду

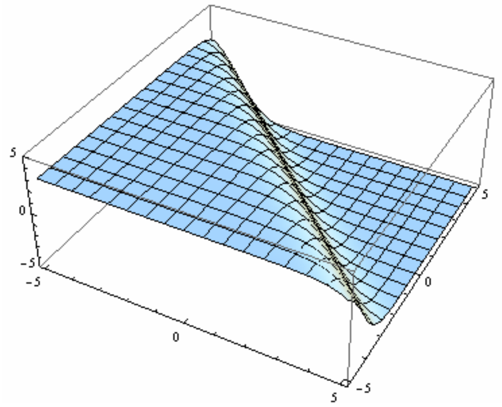


Рис. 6.1. Графік швидкості u в момент часу $t = 0$

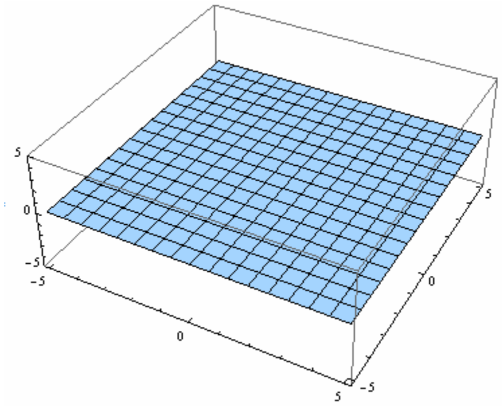


Рис. 6.2. Графік швидкості v в момент часу $t = 0$

На графіку 6.2 поверхня має плоский вигляд, оскільки функція $v = 0$.

Зміна коефіцієнтів k_{21}, k_{22} не впливає на розв'язки системи (1) при одиничних значеннях решти коефіцієнтів. Характер розв'язків при зміні коефіцієнтів k_{21}, k_{22} такий самий, як і характер розв'язків при зміні коефіцієнтів k_{11}, k_{12} .

Точний розв'язок системи (1)

$$u = v = -\frac{1}{2} - (k_{13} + 1) th(x + y + t - 1)$$

отримано при k_{13} довільному, а решту коефіцієнтів приймемо такими, що дорівнюють одиниці. Якщо $k_{13} = -1$, то точний розв'язок цієї системи набув вигляду

$$u = v = -\frac{1}{2},$$

тобто в області Ω рідина рухається у від'ємному напрямі вздовж осей абсцис та ординат.

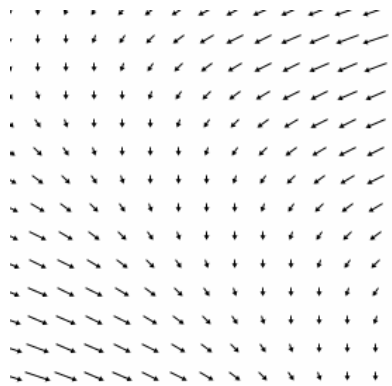
Розглянемо випадок, коли коефіцієнт $k_{11} = 1{,}1$, а коефіцієнт k_{13} у системі (1) довільний. Тоді точні розв'язки системи (1) набули вигляду

$$u(x,y,t) = 20(1-k_{13})th(x+y+t-1),$$
$$v(x,y,t) = -1+20(k_{13}-1{,}1)th(x+y+t-1).$$

При $k_{13} = 1{,}2$ формули розв'язків такі

$$u(x,y,t) = -4th(x+y+t-1),\ v(x,y,t) = -1+2th(x+y+t-1).$$

У момент часу $t = 0$ поле швидкостей таке



Розглянемо вплив числа Рейнольдса на розв'язки системи (1). Нехай коефіцієнти системи (1) при конвекційних доданках дорівнюють одиниці, а коефіцієнти $k_{13}, k_{14}, k_{23}, k_{24}$ дорівнюють числу $\frac{1}{\mathrm{Re}}$. Точний розв'язок системи (1) при таких значеннях коефіцієнтів набув вигляду

$$u(x,y,t) = v(x,y,t) = -\frac{1}{2} - \frac{2}{\mathrm{Re}} th(x+y+t-1).$$

При значеннях числа $\mathrm{Re} \in (0,4)$ рідина рухається у від'ємному і в додатному напрямі вздовж осей абсцис та ординат. При значеннях числа $\mathrm{Re} \geq 4$ рідина рухається у від'ємному напрямі вздовж осей абсцис та ординат. Зі збільшенням значень числа Re амплітуда функцій швидкостей u, v зменшується. Якщо великі значення числа Re, то значення функцій u, v перебувають в околі числа $-\frac{1}{2}$.

6.2. *ГРАФІЧНА ІНТЕРПРЕТАЦІЯ РОЗВ'ЯЗКІВ, ЯКІ ЗАЛЕЖАТЬ ВІД ГІПЕРБОЛІЧНОГО КОТАНГЕНСА*

Згідно з теоремою 1 вплив зміни коефіцієнтів системи (1) на розв'язок, що залежить від гіперболічного котангенса, такий самий як і вплив зміни коефіцієнтів системи (1) на розв'язок, що залежить від гіперболічного тангенса. Тому наведемо графіки точних розв'язків системи (1) у вигляді полінома від гіперболічного котангенса для певних значень коефіцієнтів.

Запишемо точний розв'язок нелінійної динамічної системи (1) при одиничних значеннях коефіцієнтів

$$u(x,y,t) = v(x,y,t) = -\frac{1}{2} - 2cth(x+y+t-1).$$

В момент часу $t = 0{,}02$ розв'язок має такий вигляд

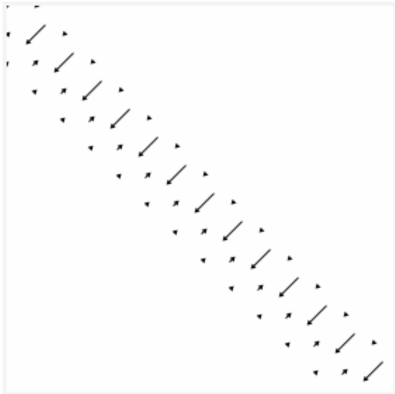
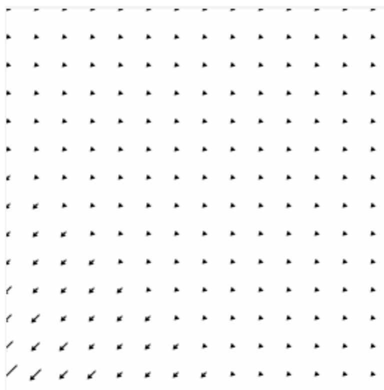
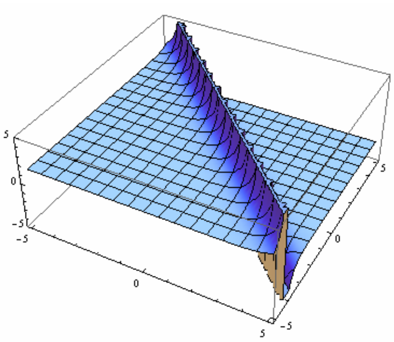


Рис. 7. Поле швидкостей у момент часу $t = 0{,}02$

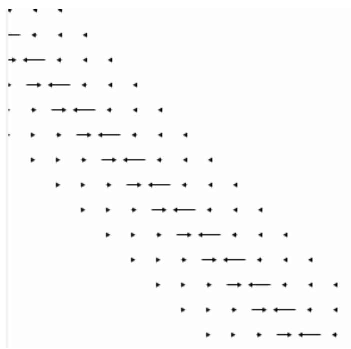
Оскільки стрілки, які вказують напрям руху рідини, масштабовані за нормою вектора швидкостей, то в області, де значення норми досягають безмежно великих значень, стрілки видимі. В області, де значення норми порівняно малі, на рисунку виглядає як область, у якій руху немає. Проте вже в момент часу $t = 1{,}1$ поле швидкостей набуває вигляду



Графік функцій u, v в початковий момент часу такий:



Графік розв'язків при значенні коефіцієнтів $k_{11} = 1{,}1$; $k_{13} = 1{,}3$ в момент часу $t = 0{,}1$



6.3. *ГРАФІЧНА ІНТЕРПРЕТАЦІЯ РОЗВ'ЯЗКІВ, ЯКІ ОДНОЧАСНО ЗАЛЕЖАТЬ ВІД ГІПЕРБОЛІЧНОГО ТАНГЕНСА ТА ГІПЕРБОЛІЧНОГО КОТАНГЕНСА*

Для наочності розглянемо графіки функцій $f_1(x) = th(x)$, $f_2(x) = cth(x)$, $f_3(x) = th(x) + cth(x)$

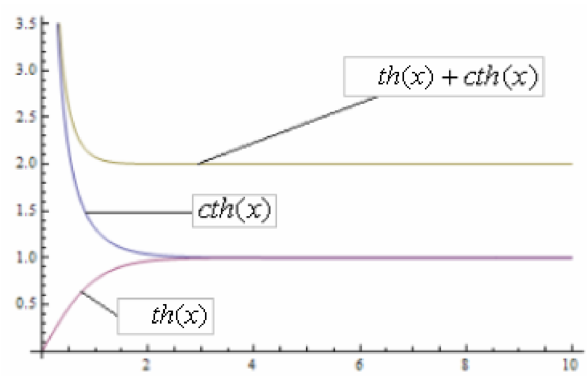


Рис. 8. Графіки функцій $f_1(x) = th(x)$, $f_2(x) = cth(x)$, $f_3(x) = th(x) + cth(x)$

З рис. 8 видно, що від $x = 0$ до значення $x \approx 2$ поведінку функції $f_3(x) = th(x) + cth(x)$ визначає функція $cth(x)$, проте функція $f_3(x) = th(x) + cth(x)$ швидше досягає область, у якій похідна наближається до нуля, ніж функція $f_1(x) = th(x)$. Якщо провести аналогію з розв'язками, що залежать від гіперболічного тангенса та гіперболічного котангенса, то можна стверджувати, що розв'язок, що залежить одночасно від гіперболічного тангенса та гіперболічного котангенса в деякій частині області в певний момент часу поводить себе як розв'язок, що залежить від гіперболічного тангенса, а в іншій, як розв'язок, що залежить від гіперболічного котангенса (тобто норма вектора швидкостей набуває безмежних значень).

Зобразимо графіки розв'язків системи (1) при одиничних значеннях коефіцієнтів, що залежать тільки від гіперболічного котангенса та залежать одночасно від гіперболічного тангенса та гіперболічного котангенса в момент часу $t = 1{,}2$

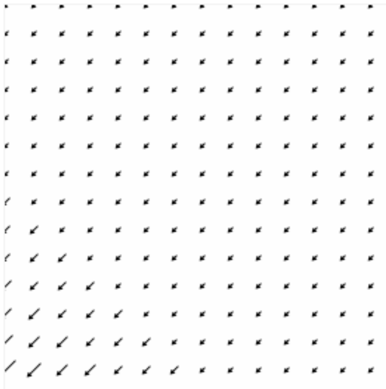


Рис. 9

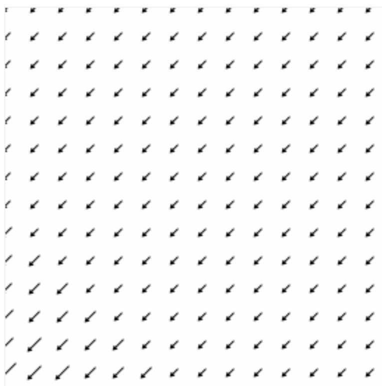


Рис. 10

На рис. 9 розв'язок залежить тільки від гіперболічного котангенса, а на рис. 10 розв'язок залежить одночасно від гіперболічного тангенса та гіперболічного котангенса в момент часу $t = 1{,}2$.

Градієнт швидкостей на рис. 9 більший, ніж градієнт швидкостей на рис. 10 в момент часу $t = 1{,}2$.

У момент часу $t = 3$ градієнти швидкостей однакові, що зображено на рисунках

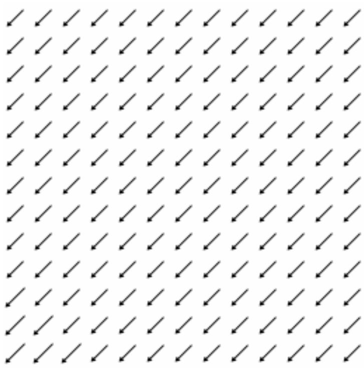


Рис. 11

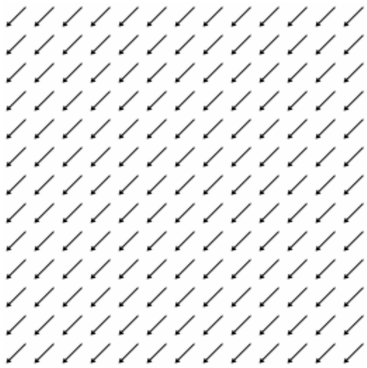


Рис. 12

На рис. 11 розв'язок залежить тільки від гіперболічного котангенса, а на рис. 12 розв'язок залежить одночасно від гіперболічного тангенса та гіперболічного котангенса в момент часу $t = 3$.

Розмір стрілок на рис. 12 дещо більший за розмір стрілок на рис. 11, оскільки на рис. 12 показаний розв'язок, що є сумою гіперболічного тангенса та гіперболічного котангенса.

7. ВИСНОВКИ

Використовуючи метод гіперболічних тангенс функцій, побудовано точні солітонні розв'язки двовимірної нелінійної динамічної системи Бюргерса зі сталими коефіцієнтами у вигляді поліномів від гіперболічного тангенса, гіперболічного котангенса та поліномів, що містять гіперболічний тангенс і гіперболічний котангенс.

Запропоновано підхід до визначення степенів поліноміальних розв'язків, у якому розглядаємо не тільки два найвищі показники степенів гіперболічного тангенса, а й інші показники степенів.

Знайдено розв'язки для довільних значень коефіцієнтів, з яких можна отримувати точні розв'язки, змінюючи лише значення коефіцієнтів. Також отримані розв'язки можна застосувати для дослідження обчислювальних схем розв'язування початково-крайових задач.

Для аналізування впливу коефіцієнтів на характер розв'язків створено програмне забезпечення.

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. *Воробйова О.В.* Солітонні розв'язки для інверсного рівняння Кортевега – де Фріза / О.В. Воробйова, М.М. Притула // Нелінійні коливання. – 2003. – 6, № 1. – С. 15-20.
2. *Кіндибалюк А.А.* Бігамільтоновість узагальненої нелінійної динамічної системи типу Бюргерса та її солітонні розв'язки / А.А. Кіндибалюк, М.М. Притула // Конференція молодих учених із сучасних проблем механіки і математики Я.С. Підстригача. (24-27 травня 2011 р., Львів). Тези доп. С. 283-284.
3. *Кіндибалюк А.А.* Точні солітонні розв'язки двовимірної нелінійної динамічної системи Бюргерса / А.А. Кіндибалюк, М.М. Притула // Сучасні проблеми прикладної математики та інформатики (6-7 жовтня 2011 р. Львів). Тези доп. С. 58
4. *Гентош О.Є.* Диференціально-геометричні та Лі-алгебраїчні основи дослідження інтегровних нелінійних динамічних систем на функціональних многовидах / О.Є. Гентош, М.М. Притула, А.К. Прикарпатський. – Львів: Видавничий центр ЛНУ ім. І. Франка, 2006. – 408 с.
5. *Старчак М.* Солітонні розв'язки нелінійних динамічних систем типу Кортевега – де Фріза / М. Старчак, М. Притула // Вісник Львів. ун-ту. Серія прикл. матем. та інформ. – 2009. – Вип 15. – С. 71-80.
6. *Baldwin D.* Symbolic computation of exact solutions expressible in hyperbolic and elliptic functions for nonlinear partial differential and differential – difference equations / D. Baldwin, Ü. Goktaş, W. Hereman, L. Hong, R.S. Martino., J.C. Miller. – 2001.
7. *Fan E.G.* Extended tanh-function method and its applications to nonlinear equation / E.G. Fan // Phys. Lett. A. – 2000. – 227. – P. 212-218.
8. *Mohammad Tamsir* A semi-implicit finite-difference approach for two-dimensional coupled Burgers' equations / Mohammad Tamsir, Vineet Kumar Srivastava // International Journ. of Scientific & Engineering Research, Vol. 2, Issue 6, June-2011.
9. *Yusufoğlu E.* On the Extended Tanh Method, Applications of Nonlinear Equations / E. Yusufoğlu, A. Bekir // International Journal of Nonlinear Science, Vol. 4. (2007), No. 1. – P. 10-16.

Стаття: надійшла до редколегії 06.10.2011
доопрацьована 10.11.2011
прийнята до друку 24.11.2011

СОЛИТОННЫЕ РЕШЕНИЯ ДВУМЕРНОЙ ДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ БЮРГЕРСА С ЧИСЛОВЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Аркадий Киндыбалюк

*Львовский национальный университет имени Ивана Франко,
ул. Университетская, 1, Львов, 79000*

Для двумерной нелинейной динамической системы Бюргерса с числовыми коэффициентами найдено точные солитонные решения, которые выражаются через гиперболический тангенс и гиперболический котангенс.

Обосновано предложенную модификацию шага определения степени полиномиальных решений. Найдено условия на коэффициенты, при которых существует бесконечное множество решений, а также условия на коэффициенты, при которых солитонные решения не существуют.

Приведены графики решений. Проанализирована зависимость характера решений от изменений коэффициентов системы.

Ключевые слова: двумерные нелинейные динамические системы, уравнение Бюргерса, метод гиперболических тангенс функций, точные решения.

SOLITONARY SOLUTIONS OF TWO DIMENSIONAL BURGERS DYNAMICAL SYSTEM WITH NUMERIC COEFFICIENTS

Arkadii Kindybaliuk

*Ivan Franko National University in Lviv,
Universytetska str., 1, Lviv, Ukraine, 79000*

Exact solitonary solutions expressible in hyperbolic tangent and hyperbolic cotangent have been found for two dimensional Burgers' nonlinear dynamical system.

Proposed modification for evaluating degree of polynomial solution has been proved. Conditions on coefficients when exists infinite number of solution have been found and conditions on coefficients exists no solution have been found.

Charts of founded solutions are presented. Dependence solution character on coefficients change has been discussed.

Key words: two dimensional nonlinear dynamic systems, Burgers' equation, hyperbolic tangent method, exact solutions.