ISSN 2078–5097. Вісн. Львів. ун-ту. Сер. пр. матем. та інф. 2012. Вип. 18. С. 96–105
Visnyk of the Lviv University. Series Appl. Math. and Informatics. Issue 18. P. 96–105

УДК 519.6

ТЕОРЕТИЧНІ АСПЕКТИ ЗАСТОСОВНОСТІ МЕТОДУ КАНТОРОВИЧА ДО ОДНІЄЇ ДВОВИМІРНОЇ КРАЙОВОЇ ЗАДАЧІ

М. Жук[*], Адріана Кіндибалюк[**], Н. Щербина[***]

*[*]Львівський національний університет імені Івана Франка,
вул. Університетська, 1, Львів, 79000
[**]Київський національний університет будівництва та архітектури,
Повітрофлотський проспект, 31, Київ, 03037
[***]Інститут прикладних проблем механіки і математики
ім. Я.С. Підстригача НАН України, вул. Наукова, 3 б, Львів, 79601*

Наведено й теоретично обґрунтовано наближений розв'язок лінійної двовимірної крайової задачі з диференціальним рівнянням четвертого порядку зі змінними коефіцієнтами, який отримано методом Канторовича. Згідно з цим методом розв'язування вихідного диференціального рівняння в частинних похідних зводиться до розв'язування відповідної йому лінійної системи звичайних диференціальних рівнянь четвертого порядку. Доведено існування та єдиність узагальненого розв'язку методу Канторовича, отримано оцінку швидкості збіжності.

Ключові слова: двовимірна крайова задача, диференціальне рівняння зі змінними коефіцієнтами, метод Канторовича, наближений розв'язок, оцінка збіжності.

1. ВСТУП

З огляду на наявність добре розроблених методів розв'язування звичайних диференціальних рівнянь практичного значення набувають такі методи розв'язування диференціальних рівнянь у частинних похідних, які наближено зводять інтегрування цих рівнянь до розв'язування відповідних їм систем звичайних диференціальних рівнянь. Одним із таких методів, який успішно застосовують для розв'язування задач математичної фізики та механіки, є метод Канторовича або як його ще називають метод зведення до систем звичайних диференціальних рівнянь [2]. Цей метод тісно пов'язаний з методами Рітца і Бубнова–Гальоркіна й має певні переваги порівняно з ними. Крім того, за методом Канторовича досягаємо більшої точності розв'язку, його перевага полягає також у тому, що лише частину виразу, яка визначає розв'язок, вибираємо апріорно, а частину функцій визначаємо відповідно до особливостей задачі. Попередньо цей метод опрацював Л.В. Канторович для наближеного розв'язування задачі Діріхле у випадку диференціального рівняння еліптичного типу на площині, на підставі варіаційного принципу розв'язування задач математичної фізики. Потім для побудови алгоритму наближеного розв'язування крайової задачі він використав ідею методу Бубнова–Гальоркіна, що суттєво полегшило отримання відповідної до вихідного диференціального рівняння в частинних похідних системи звичайних диференціальних рівнянь, а також уможливило застосування методу для розв'язування задач не пов'язаних із варіаційними принципами [3]. Згодом метод Канторовича отримав розвиток й теоретичне обґрунтування у низці праць, присвячених розв'язуванню інших типів рівнянь, зокрема у [6, 7].

Отже, до розв'язування досліджуваної двовимірної лінійної крайової задачі використовуємо підхід, який полягає в тому, що на першому етапі до вихідної математичної моделі задля пониження її вимірності застосовуємо метод Канторовича. На другому етапі розв'язуємо отриману внаслідок редукції двовимірної задачі до одновимірної відповідну систему звичайних диференціальних рівнянь зі змінними коефіцієнтами. У цьому полягає відмінність розглядуваного підходу від методів Рітца, Бубнова–Гальоркіна, а також таких числових методів як, наприклад, скінченних різниць (МСР) і скінченних елементів (МСЕ), з застосуванням яких розв'язування двовимірної крайової задачі зводять до систем лінійних алгебричних рівнянь зазвичай великої розмірності [5]. Багато аспектів підходу, який використовує ідею методу Канторовича, ще не досліджені й потребують ретельного обґрунтування.

Наша мета – дослідити та теоретично обґрунтувати застосовність методу Канторовича для розв'язування лінійної крайової задачі з диференціальним рівнянням у частинних похідних четвертого порядку зі змінними коефіцієнтами.

2. ФОРМУЛЮВАННЯ ЗАДАЧІ

Розглянемо лінійну двовимірну крайову задачу, яка полягає у відшуканні розв'язку диференціального рівняння четвертого порядку зі змінними коефіцієнтами вигляду

$$Lw \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(p(x,y)\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right) + 2\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}\left(q(x,y)\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}\right) + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(r(x,y)\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) + \\ + s(x,y)w = f(x,y), \quad (x,y)\in S, \tag{1}$$

за крайових умов

$$w = 0 \quad (x,y)\in\Gamma, \tag{2}$$

$$\frac{\partial w}{\partial n} = 0 \quad (x,y)\in\Gamma, \tag{3}$$

де $w(x,y)$ – шукана функція; Γ – межа прямокутної області

$$S = \{a \le x \le b,\ c \le y \le d\};$$

n – нормаль до контуру області S.

Щодо заданих функцій у рівнянні (1) припускаємо, що $f(x,y)$ належить гільбертовому простору $H = L_2(S)$ з нормою

$$\|w\|^2 = \iint_S w^2 dx\,dy .$$

Функції $p(x,y)$, $q(x,y)$, $r(x,y)$ – додатні обмежені, тобто $0<\alpha_1 \le p(x,y) \le \beta_1$, $0<\alpha_2 \le q(x,y) \le \beta_2$, $0<\alpha_3 \le r(x,y) \le \beta_3$, а функція $s(x,y)$ – обмежена, $\alpha_4 \le s(x,y) \le \beta_4$.

Крім того, припускаємо, що константи α_1, α_2, α_3, α_4, γ такі, що постійні μ, η, які визначені такими співвідношеннями:

$$\mu = \begin{cases}\alpha, & \alpha_4 \ge 0,\\ \alpha + \alpha_3/\gamma^2, & \alpha_4 \le 0,\end{cases} \qquad \eta = \begin{cases}\beta + \beta_4/\gamma^2, & \beta_4 \ge 0,\\ \beta, & \beta_4 \le 0,\end{cases} \tag{4}$$

де $\alpha = \min\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\}$, $\beta = \max\{\beta_1,\beta_2,\beta_3\}$, $\gamma = \mathrm{const} > 0$ (залежить від області S), забезпечують виконання умов $\mu > 0$, $\eta > 0$. За область визначення $\Omega(L)$ оператора L приймаємо множину чотири рази неперервно диференційованих функцій $w(x,y)$ у замкненій області S, які задовольняють умови (2), (3).

Для подальших досліджень властивостей математичної моделі (1)–(3) введемо допоміжний бігармонічний оператор

$$Bw \equiv \Delta^2 w = \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4},$$

для якого $\Omega(B) = \Omega(L)$, $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ – оператор Лапласа в декартовій системі координат.

Як відомо [4], на лінеалі $\Omega(B)$ оператор B додатно визначений, тобто для довільних $w, v \in \Omega(B)$ виконуються такі умови:

$$(Bw, v) = (w, Bv), \ (Bw, w) \geq \gamma^2 \|w\|^2, \tag{5}$$

де константа γ визначається нерівностями Фрідріхса, застосованими до функції і її перших похідних [4].

Позначимо через H_0 енергетичний простір оператора B, тобто замикання $\Omega(B)$ в метриці

$$[w, v]_0 = (Bw, v) = \iint_S \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right] dxdy .$$

Зазначимо, оскільки $\iint_S \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) dxdy = \iint_S \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} dxdy$, то за умов задачі

$$[w, v]_0 = \iint_S \Delta w \, \Delta v \, dxdy .$$

У цьому разі отримаємо

$$|w|_0^2 = [w, w]_0 = \iint_S (\Delta w)^2 dx\, dy .$$

Зауважимо, що функції з енергетичного простору оператора H_0 мають другі узагальнені похідні сумовані з квадратом і задовольняють крайові умови (2), (3), тобто крайові умови (2), (3) головні. Крім того, зазначимо, що $H_0 = \overset{0}{W}{}_2^2$. На підставі (5) внаслідок граничного переходу для довільного $w \in H_0$ випливає нерівність

$$\|w\| \leq \frac{1}{\gamma} |w|_0 . \tag{6}$$

Для довільних $w, v \in H_0$ формально введемо таку білінійну форму:

$$L(w,v) \equiv \iint_S \left\{ p(x,y)\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right) + 2q(x,y)\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\right)\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y}\right) + \right.$$
$$\left. + r(x,y)\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)\left(\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right) + s(x,y)\, wv \right\} dxdy .$$

Тоді для довільного $w \in H_0$ виконуватиметься нерівність

$$L(w, w) \geq \mu |w|_0^2 . \tag{7}$$

Справді, у випадку довільної функції $w(x,y) \in H_0$ маємо такий ланцюжок перетворень:

$$L(w,w) \equiv \iint_S \left\{ p(x,y)\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)^2 + 2q(x,y)\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\right)^2 + r(x,y)\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)^2 + s(x,y)\,w^2 \right\} dxdy \geq$$

$$\geq \min\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\} \iint_S \left\{ \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)^2 + 2\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)^2 \right\} dxdy + \iint_S s(x,y) w^2(x,y)\,dxdy =$$

$$= \alpha |w|_0^2 + \iint_S s(x,y) w^2(x,y)\,dxdy . \tag{8}$$

Нехай $\alpha_4 \geq 0$, тоді з нерівності (8) отримаємо

$$L(w,w) \geq \alpha |w|_0^2 = \mu |w|_0^2 .$$

Розглянемо ще випадок, коли $\alpha_4 < 0$. Із нерівності (8), використовуючи нерівність (6), отримуємо

$$L(w,w) \geq \alpha |w|_0^2 + \iint_S s(x,y) w^2(x,y)\,dxdy \geq \alpha |w|_0^2 + \alpha_3 \|w\|^2 \geq \alpha |w|_0^2 + \frac{\alpha_3}{\gamma^2} |w|_0^2 =$$

$$= \left(\alpha + \frac{\alpha_3}{\gamma^2}\right) |w|_0^2 = \mu |w|_0^2 .$$

Покажемо, що для довільної функції $w(x,y) \in H_0$ виконується нерівність

$$L(w,w) \leq \eta |w|_0^2 . \tag{8}$$

Справді,

$$L(w,w) \equiv \iint_S \left\{ p(x,y)\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)^2 + 2q(x,y)\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\right)^2 + r(x,y)\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)^2 + s(x,y)\,w^2(x,y) \right\} dxdy \leq$$

$$\leq \beta \iint_S \left\{ \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)^2 + 2\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)^2 \right\} dxdy + \iint_S s(x,y) w^2(x,y)\,dxdy =$$

$$= \beta |w|_0^2 + \iint_S s(x,y)\, w^2(x,y)\,dxdy . \tag{9}$$

Нехай $\beta_4 \geq 0$. Тоді, використовуючи нерівність (6), з останньої нерівності (9) одержуємо

$$L(w,w) \leq \beta |w|_0^2 + \iint_S s(x,y)\, w^2(x,y)\,dxdy \leq \beta |w|_0^2 + \beta_4 \iint_S w^2(x,y)\,dxdy \leq$$

$$\leq \beta |w|_0^2 + \frac{\beta_4}{\gamma^2} |w|_0^2 = \left(\beta + \frac{\beta_4}{\gamma^2}\right) |w|_0^2 = \eta |w|_0^2 .$$

Розглянемо тепер випадок $\beta_4 < 0$. На підставі нерівності (9) отримаємо

$$L(w,w) \leq \beta |w|_0^2 + \iint_S s(x,y)\, w^2(x,y)\,dxdy \leq \beta |w|_0^2 = \eta |w|_0^2 .$$

Узагальненим розв'язком задачі (1)–(3) називається функція $w(x,y)$ з простору H_0, для якої за довільної функції $v(x,y) \in H_0$ виконується така тотожність:

$$L(w,v) \equiv \iint_S \left\{ p(x,y)\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + 2q(x,y)\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + r(x,y)\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + s(x,y)\,wv \right\} dxdy =$$

$$= \iint_S f(x,y)\,v(x,y)\,dxdy \,. \tag{10}$$

Як відомо [1], виконання умов (6), (8) забезпечують існування та єдиність узагальненого розв'язку задачі (1)–(3).

3. ПОБУДОВА НАБЛИЖЕНОГО РОЗВ'ЯЗКУ МЕТОДОМ КАНТОРОВИЧА

До двовимірної крайової задачі (1)–(3) застосуємо метод Канторовича. Згідно з цим методом наближений розв'язок задачі, яку розглядаємо, шукаємо у вигляді

$$w_n(x,y) = \sum_{k=1}^{n} \psi_k(x)\,\varphi_k(y)\,. \tag{11}$$

У поданні розв'язку (11) попередньо вибрані лінійно незалежні в проміжку $[c,d]$ функції $\varphi_k(y)$ задовольняють умови

$$\varphi_k(y) = 0 \ \text{ при } \ y = c\,;\ y = d\,,\ k = 1,2,3,\ldots, \tag{12}$$

$$\frac{\partial \varphi_k}{\partial y} = 0 \ \text{ при } \ y = c\,;\ y = d\,,\ k = 1,2,3,\ldots. \tag{13}$$

Окрім того, функції $\varphi_k(y)$ вибираємо так, щоб система функцій $\{\chi_l(x)\varphi_k(y)\} \in H_0$ була повною системою лінійно незалежних функцій у просторі H_0, а система функцій $\{\chi_l(x)\}$ задовольняла такі умови:

$$\chi_l(x) = 0 \ \text{ при } \ x = a\,;\ x = b\,,\ l = 1,2,3,\ldots, \tag{14}$$

$$\frac{\partial \chi_l}{\partial x} = 0 \ \text{ при } \ x = a\,;\ x = b\,,\ l = 1,2,3,\ldots. \tag{15}$$

Невідомі функціональні коефіцієнти в (11) визначаємо з системи звичайних диференціальних рівнянь, яку отримуємо з умови ортогональності нев'язки до координатних функцій $\varphi_k(y)$, $k = 1,2,3,\ldots$, тобто

$$\int_c^d (Lw_n - f)\,\varphi_k(y)dy = 0\,, \tag{16}$$

за умов

$$\psi_k(x) = 0 \ \text{ при } \ x = a\,;\ x = b\,, \tag{17}$$

$$\psi_k'(x) = 0 \ \text{ при } \ x = a\,;\ x = b\,. \tag{18}$$

Тут $k = 1,2,3,\ldots,n$, штрих означає звичайну похідну по x.

Отже, з (16) отримуємо лінійну систему звичайних диференціальних рівнянь четвертого порядку стосовно шуканих коефіцієнтів $\psi_k(x)$, $k = 1,2,3,\ldots,n$, які повинні задовольняти умови (17), (18).

Уведемо поняття узагальненого розв'язку системи методу Канторовича (16)-(18). Позначимо через $H_n \subset H$ простір функцій вигляду $v_n(x,y) = \sum_{k=1}^{n} a_k(x)\varphi_k(y)$. Нехай для деякої функції $w_n(x,y) \in H_n \cap H_0$ справджується тотожність

$$L(w_n, v_n) = \iint_S f\,v_n dxdy\,, \tag{19}$$

де v_n – довільна функція з $H_n \cap H_0$.

Тоді функцію $w_n(x,y)$ називають узагальненим розв'язком системи методу Канторовича(16)–(18).

4. ІСНУВАННЯ ТА ЄДИНІСТЬ УЗАГАЛЬНЕНОГО РОЗВ'ЯЗКУ

Доведемо, що узагальнений розв'язок системи методу Канторовича (16)–(18) існує. Побудуємо розв'язок задачі (16)–(18) методом Бубнова–Гальоркіна. Відповідно до цього методу наближений її розв'язок шукаємо у вигляді

$$w_n^m(x,y) = \sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{m} c_{kl}\chi_l(x)\varphi_k(y). \tag{20}$$

Невідомі коефіцієнти c_{kl} у поданні розв'язку (20) визначаємо з системи лінійних алгебричних рівнянь

$$L(w_n^m, \chi_j\varphi_i) = \iint_S f\chi_j\varphi_i\, dxdy,\ i = 1,2,\ldots,n;\ j = 1,2,\ldots,m. \tag{21}$$

Позначимо через $H_n^m \subset H_0$ простір функцій вигляду

$$u_n^m(x,y) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} b_{ij}\chi_i(x)\varphi_j(y),$$

де b_{ij} – довільні сталі. Тоді на підставі системи (21) для довільного $v_n^m(x,y) \in H_n^m$ можемо записати

$$L\left(w_n^m, v_n^m\right) = \iint_S f v_n^m\, dxdy. \tag{22}$$

Система (21) має єдиний розв'язок. Це твердження правильне, оскільки за умови (7) виконується нерівність

$$L(w_n^m, w_n^m) \geq \mu\left|w_n^m\right|_0^2,$$

а звідси випливає, що детермінант системи (21) відмінний від нуля.

Доведемо тепер, що послідовність розв'язків $\left\{w_n^m\right\}$ системи Канторовича (16)–(18) слабко збігається в просторі H_0 до її узагальненого розв'язку $w_n(x,y)$. Для цього спочатку визначимо обмеженість послідовності $\left\{w_n^m\right\}$ у просторі H_0. Використовуючи нерівність (7) і співвідношення (22) при $v_n^m = w_n^m$, отримаємо таку оцінку:

$$\left|w_n^m\right|_0^2 \leq \frac{1}{\mu}L(w_n^m, w_n^m) = \frac{1}{\mu}\iint_S f w_n^m\, dxdy \leq \frac{1}{\mu}\|f\|\left\|w_n^m\right\|.$$

Звідси, на підставі нерівності (6), одержимо

$$\left|w_n^m\right|_0^2 \leq \frac{1}{\mu\gamma}\|f\|\left|w_n^m\right|_0, \text{ тобто } \left|w_n^m\right|_0 \leq \frac{1}{\mu\gamma}\|f\|.$$

З аналізу останнього співвідношення випливає, що послідовність розв'язків методу Бубнова–Гальоркіна $\left\{w_n^m\right\}$ слабко компактна в просторі $H_n \cap H_0$, а з урахуванням співвідношення (6) також і в просторі $H_n \cap H$. Із визначення норми в енергетичному просторі H_0 отримуємо, що в цьому разі послідовності $\left\{\dfrac{\partial^2 w_n^m}{\partial x^2}\right\}$,

$\left\{\frac{\partial^2 w_n^m}{\partial x \partial y}\right\}$, $\left\{\frac{\partial^2 w_n^m}{\partial y^2}\right\}$ будуть слабко компактними в просторі H. Отже, з послідовності $\left\{w_n^m\right\}$ можна виділити підпослідовність $\left\{w_n^{m_s}\right\}$, яка при $m_s \to \infty$ слабко збігається в просторі $H_n \cap H_0$ і тим більше в просторі $H_n \cap H$ до принаймні однієї граничної точки $w_n(x,y) \in H_n \cap H_0$, а послідовності $\left\{\frac{\partial^2 w_n^{m_s}}{\partial x^2}\right\}$, $\left\{\frac{\partial^2 w_n^{m_s}}{\partial x \partial y}\right\}$, $\left\{\frac{\partial^2 w_n^{m_s}}{\partial y^2}\right\}$ слабко збігатимуться в просторі H відповідно до елементів $\left\{\frac{\partial^2 w_n}{\partial x^2}\right\}$, $\left\{\frac{\partial^2 w_n}{\partial x \partial y}\right\}$, $\left\{\frac{\partial^2 w_n}{\partial y^2}\right\}$. Не обмежуючи загальності, можемо вважати, що сама послідовність $\left\{w_n^m\right\}$ слабко збігається до функції $w_n(x,y) \in H_n \cap H_0$.

Оскільки для довільного елемента

$$v_n(x,y) = \sum_{k=1}^{n} a_k(x)\varphi_k(y) \in H_n \cap H_0$$

можна побудувати послідовність елементів

$$v_n^m(x,y) = \sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{m} a_{kl}\chi_l(x)\varphi_k(y) \in H_n^m \cap H_0 ,$$

де коефіцієнти a_{kl} визначають з системи

$$\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{m} a_{kl}\left[\chi_l(x)\varphi_k(y), \chi_s(x)\varphi_r(y)\right]_0 = \left[v_n, \chi_s(x)\varphi_r(y)\right]_0, \; s = 1,2,\ldots,m; \; r = 1,2,\ldots,n \quad (23)$$

таку, що $\left|v_n - v_n^m\right|_0 \to 0$ при $m \to \infty$, то, зафіксувавши елемент $v_n(x,y) \in H_n \bigcap H_0$, беремо у співвідношенні (22) елемент $v_n^m \in H_n^m$, коефіцієнти якого a_{kl} визначені з системи (23). Тепер у співвідношенні (22) можемо перейти до границі при $m \to \infty$. У цьому разі отримаємо рівність

$$L\left(w_n, v_n\right) = \iint_S f v_n \, dxdy ,$$

яка правильна для довільного елемента $v_n(x,y) \in H_n \bigcap H_0$.

З’ясуємо тепер єдиність узагальненого розв’язку системи методу Канторовича (16)–(18). Доведення виконаємо від супротивного. Нехай $w_n(x,y)$, $u_n(x,y)$ – два узагальнені розв’язки одновимірної задачі (16)–(18). Для них на підставі тотожності (19), при $v_n = w_n - u_n$, відповідно, одержимо

$$L(w_n, w_n - u_n) = \iint_S f(w_n - u_n)\, dxdy ,$$

$$L(u_n, w_n - u_n) = \iint_S f(w_n - u_n)\, dxdy .$$

Якщо від першої рівності відняти другу, то з урахуванням нерівності (7), отримаємо

$$0 = L(w_n - u_n, w_n - u_n) \geq \mu\left|w_n - u_n\right|_0^2 .$$

Звідси випливає, що $w_n = u_n$, тобто система методу Канторовича для досліджуваної задачі має єдиний узагальнений розв’язок $w_n(x,y) \in H_n \bigcap H_0$.

5. ОЦІНКА ШВИДКОСТІ ЗБІЖНОСТІ

Нехай $w(x,y)\in H_0$ – узагальнений розв'язок задачі (1)–(3). Розглянемо функціонал

$$L(w-v_n, w-v_n), \tag{24}$$

де v_n – довільний елемент із простору $H_n \bigcap H_0$.

Покажемо, що функціонал (24) набуває найменшого значення при $v_n = w_n$, тобто

$$L(w-w_n, w-w_n) \le L(w-v_n, w-v_n), \tag{25}$$

де w_n – узагальнений розв'язок системи (16)–(18).

Оскільки для рівняння (1) за умов (2), (3) задача відшукання узагальненого розв'язку системи методу Канторовича еквівалентна задачі відшукання мінімуму функціонала

$$I(v) = L(v,v) - 2(v,f)$$

на множині функцій із простору $H_n \bigcap H_0$, то для довільної функції $v_n(x,y)\in H_n \bigcap H_0$ одержимо

$$I(w_n) \le I(v_n). \tag{26}$$

Позаяк $w(x,y)$ – узагальнений розв'язок задачі $(1)-(3)$, то, приймаючи у співвідношенні (10) $v = v_n$, отримуємо таку рівність:

$$I(v_n) = L(v_n, v_n) - 2L(w, v_n) = L(w-v_n, w-v_n) - L(w,w).$$

З урахуванням останньої рівності та нерівності (26) одержимо

$$L(w-w_n, w-v_n) - L(w,w) \le L(w-v_n, w-v_n) - L(w,w).$$

Отже, нерівність (25) виконується.

На підставі нерівності (7), враховуючи нерівність (25), випливає, що

$$\left|w-w_n\right|_0^2 \le \frac{1}{\mu} L(w-w_n, w-w_n) \le \frac{1}{\mu} L(w-v_n, w-v_n).$$

Звідси за допомогою нерівності (8) отримаємо

$$\left|w-w_n\right|_0^2 \le \frac{\eta}{\mu} \left|w-v_n\right|_0^2.$$

Отже, правильна така оцінка:

$$\left|w-w_n\right|_0 \le C\left|w-v_n\right|_0. \tag{27}$$

Тут

$$C = \sqrt{\eta/\mu},$$

елемент v_n вибираємо таким, який реалізує мінімум функціонала $\left|w-v_n\right|_0$. З огляду на повноту системи функцій $\{\chi_l(x)\varphi_k(y)\}$ у просторі H_0 для елемента v_n, який реалізує мінімум зазначеного функціонала, одержимо

$$\left|u-v_n\right|_0 \to 0 \text{ при } n\to\infty.$$

Тому справджується така теорема.

Теорема. За умов задачі (1)–(3), що забезпечують виконання нерівностей (7)-(8), для довільної функції $f(x,y)\in H$ задача (1)-(3) має єдиний узагальнений розв'язок $w(x,y)\in H_0$; при довільному n система методу Канторовича (16)-(18) має єдиний узагальнений розв'язок $w_n(x,y) \in H_n \cap H_0$, метод Канторовича збігається і швидкість збіжності характеризує оцінка (27).

Зазначимо, що ефективна апроксимація розв'язку крайової задачі (1)-(3) залежить від вдалого вибору координатних функцій $\varphi_k(y)$ у поданні (11). Зробимо деякі зауваження щодо вибору систем координатних функцій $\varphi_k(y)$. Застосування методу Канторовича передбачає, що лінійно незалежна система функцій $\{\chi_l(x)\varphi_k(y)\}$ повна в просторі H_0. Очевидно, що оператор L за крайових умов (2), (3) додатно визначений і простір H_0 є його енергетичним простором. Тоді, вибираючи систему

$$\{\chi_l(x)\varphi_k(y)\} \in \Omega(L), \quad k,l = 1,2,\ldots,$$

яка буде повною в просторі H, то, як відомо [4], ця система буде повною і в просторі H_0.

Тому, наприклад, можна вибрати систему координатних функцій $\{\chi_l(x)\varphi_k(y)\}$ у вигляді

$$x^{l-1}(x-a)^2(x-b)^2\, y^{k-1}(y-c)^2(y-d)^2, \; k,l = 1,2,\ldots,$$

і отже,

$$\varphi_k(y) = y^{k-1}(y-c)^2(y-d)^2, \; k = 1,2,\ldots$$

6. ВИСНОВКИ

Отож, ми дослідили й теоретично обґрунтували застосовність методу Канторовича для розв'язування лінійної крайової задачі з диференціальним рівнянням у частинних похідних четвертого порядку зі змінними коефіцієнтами. Виконаний теоретичний аналіз існування і єдиності розв'язку розглянутої крайової задачі, отриманого методом Канторовича, має суттєве значення для оцінювання його достовірності. У разі застосування методу Канторовича ефективна апроксимація розв'язку крайової задачі залежить від вдалого вибору координатних функцій. Для досліджуваного випадку наведено деякі рекомендації щодо вибору систем координатних функцій.

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. *Варга Р.* Функциональный анализ и теория аппроксимации в численном анализе / Р. Варга. – М.: Мир, 1974.
2. *Канторович Л.В.* Приближенные методы высшего анализа / Л.В. Канторович, В.И. Крылов. – М.; Л.: Физматгиз, 1962.
3. *Лучка А.Ю.* Возникновение и развитие прямых методов математической физики / А.Ю. Лучка, Т.Ф. Лучка. – К.: Наук. думка, 1985.
4. *Михлин С.Г.* Вариационные методы в математической физике / С.Г. Михлин. – М.: Наука, 1970.
5. *Флетчер К.* Численные методы на основе метода Галеркина / К. Флетчер. – М.: Мир, 1988.
6. *Щербина Н. М.* Комбінований алгоритм розв'язування лінійної двовимірної крайової задачі / Н. М. Щербина, М. В. Жук // Мат. методи та фіз.-мех. поля. 2005. – Т. 48. – № 4. – С. 133-139.
7. *Щербина Н.* Наближене розв'язування лінійної двовимірної крайової задачі про тримальну здатність ортотропних пластин / Н. Щербина, М. Жук, А. Кіндибалюк

// Вісник Львів. ун-ту. Серія прикл. матем. та інформ. – 2011. – Вип. 17. – С. 116-128.

Стаття: надійшла до редколегії 24.05.2011
доопрацьована 19.05.2011
прийнята до друку 08.09.2011

ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ АСПЕКТЫ ПРИМЕНИМОСТИ МЕТОДА КАНТОРОВИЧА К ОДНОЙ ДВУХМЕРНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ

М. Жук[*], Адриана Киндыбалюк[**], Н. Щербина[***]

[*]*Львовский национальный университет имени Ивана Франко,*
ул. Университетская, 1, Львов, 79000
[**]*Киевский национальный университет строительства и архитектуры,*
Повитрофлотский проспект, 31, Киев, 03037
[**]*Институт прикладных проблем механики и математики*
им. Я.С. Подстригача НАН Украины, ул. Наукова, 3 б, Львов, 79601

Представлено и теоретически обосновано приближенное решение линейной двухмерной краевой задачи для дифференциального уравнения четвертого порядка с переменными коэффициентами, полученное методом Канторовича. С применением этого метода исходная задача сводится к решению соответствующей линейной системы обыкновенных дифференциальных уравнений четвертого порядка. Доказано существование и единственность обобщенного решения системы метода Канторовича, получена оценка скорости сходимости.

Ключевые слова: двухмерная краевая задача, дифференциальное уравнение с переменными коэффициентами, метод Канторовича, приближенное решение, оценка сходимости.

THEORETICAL ASPECTS OF APPLICABILITY OF KANTOROVICH METHOD FOR SOME TWO-DIMENSIONAL BOUNDARY PROBLEM

M. Zhuk[*], Adriana Kindybaljuk[**], N. Shcherbyna[***]

[*]*Ivan Franko National University in Lviv, Universytetska str.,1, 79000 Lviv, Ukraine*
[**]*National university of building and architecture in Kyiv*
Prosp. Povitroflotsky, 31, 03037, Kyiv, Ukraine
[***]*Pidstryhach Institute of Applied Problems of Mechanics and Mathematics National Academy of Sciences of Ukraine, Naukova str., 3 b, 79601 Lviv, Ukraine*

An approximate solution for the 2D linear boundary value problem for the forth order differential equation with variable coefficients by using Kantorovich method is presented and also theoretical validated. According to this method the initial problem is reduced to solution of corresponding system of ordinary differential equations of fourth order. The conditions of existence and uniqueness of generalized solution of the system according to Kantorovich method and also evaluation of speed of convergence are determined.

Key words: two-dimensional boundary-value problem, differential equation with variable coefficients, Kantorovich method, approximate solution, evaluation of convergence.