ISSN 2078–5097. Вісн. Львів. ун-ту. Сер. прикл. матем. та інф. 2012. Вип. 18. С. 76–95
Visnyk of the Lviv University. Series Appl. Math. and Informatics. Issue 18. P. 76–95

УДК 517.958:534+519.6

ПОБУДОВА ТА АНАЛІЗ ОДНОКРОКОВОЇ РЕКУРЕНТНОЇ СХЕМИ ІНТЕГРУВАННЯ В ЧАСІ ВАРІАЦІЙНОЇ ЗАДАЧІ АКУСТИКИ В'ЯЗКОЇ ТЕПЛОПРОВІДНОЇ РІДИНИ

В. Горлач*, І. Клименко*, Г. Шинкаренко*,**

**Львівський національний університет імені Івана Франка,*
вул. Університетська, 1, Львів, 79000, e-mail: kis@lnu.edu.ua
***Політехніка Опольська,*
вул. Любошицька, 5, Ополе, 45043, Польща, e-mail: h.shynkarenko@po.opole.pl

Розглянуто побудову та аналіз однокрокової рекурентної схеми (ОРС) інтегрування в часі задачі про поширення акустичних хвиль у в'язкій теплопровідній ньютонівській рідині. В основу згаданої схеми покладено змішану варіаційну задачу для системи лінеаризованих рівнянь гідротермодинаміки у термінах переміщення і температури та процедура Петрова-Гальоркіна з покроковою частинами квадратичною апроксимацією зміщень і частинами лінійною апроксимацією температури. З огляду на обчислювальні аспекти зазначено, що розв'язування системи варіаційних рівнянь ОРС еквівалентне відшуканню сідлової точки певного квадратичного функціонала. Для аналізу стійкості ОРС використано рівняння балансу енергії дискретизованої задачі і подано достатній критерій безумовної її стійкості. Апроксимативність ОРС охарактеризовано апостеріорними оцінками похибок, які з огляду на теорему Лакса-Філіпова і визначають порядки швидкості збіжності пропонованої схеми.

Ключові слова: дисипативна акустика, термогідроакустика, початково-крайова задача, варіаційна задача, однокрокова рекурентна схема, апріорні та апостеріорні оцінки похибок апроксимації, стійкість, збіжність.

1. ВСТУП

Аналіз процесів поширення акустичних хвиль становить одне із чільних завдань у різноманітних застосуваннях інженерії, медицини, безпеки життєдіяльності тощо, див., наприклад, [5-7]. Складність структури таких хвиль часто пов'язана з неоднорідністю розподілу густини маси, температури та інших характеристик суцільного середовища і потребує використання методів комп'ютерного моделювання з використанням розвинених числових схем інтегрування в часі [1-4], аналіз стійкості яких є пріоритетною проблемою [2].

Ми формулюємо в п. 2 початково-крайову та відповідну їй варіаційну задачу акустики динамічної взаємодії полів пружних зміщень і температури рідини, в основу побудови якої покладено лінеаризацію фундаментальної системи рівнянь в'язкої стисливої ньютонівської рідини [6,4]. В пп. 3-6 побудовано однокрокову рекурентну схему (ОРС) інтегрування в часі варіаційної задачі на засадах дискретизації Бубнова-Гальоркіна, поданих в [3]. З огляду на обчислювальні аспекти в п. 7 ми показуємо, що кожен крок ОРС породжує систему змішаних варіаційних рівнянь, розв'язування якої еквівалентне відшуканню сідлової точки певного квадратичного функціонала.

Враховуючи рівняння балансу енергії дисипативної акустики в пп. 8 і 9, будуються апріорні оцінки, з яких знайдено достатній критерій безумовної стійкості ОРС. У п. 10 конструюються апостеріорні оцінки похибок дискретизації в часі, які одночасно характеризують апроксимативність ОРС і згідно з теоремою Лакса-

Філіпова [1] визначають порядки швидкості збіжності пропонованої схеми ОРС для динамічних задач дисипативної акустики.

2. ПОЧАТКОВО-КРАЙОВА ТА ВІДПОВІДНА ЇЙ ВАРІАЦІЙНА ЗАДАЧА АКУСТИКИ В ТЕРМІНАХ ЗМІЩЕНЬ І ТЕМПЕРАТУРИ

З огляду на гіпотези акустичного наближення руху в'язкої теплопровідної рідини розглянемо лінеаризовану початково-крайову задачу в термінах зміщень і температури такого ґатунку [4]:

$$\left\{\begin{array}{l}
\textit{знайти вектор акустичних зміщень } \mathbf{u} = \{u_i(\mathbf{x},t)\}_{i=1}^d \\
\textit{та приріст температури } \theta = \theta(\mathbf{x},t) \textit{ такі, що задовольняють рівняння} \\
\rho u_i'' - \sigma_{ij,j}(\mathbf{u},\theta) = 0, \\
\sigma_{ij}(\mathbf{u},\theta) := [-\pi(\mathbf{u},\theta) + \zeta e_{ij}(\mathbf{u}')]\delta_{ij} + 2\eta e_{ij}(\mathbf{u}'), \\
\pi(\mathbf{u},\theta) := c^2 \rho \gamma^{-1}[-\nabla.\mathbf{u} + \alpha\theta], \\
e_{ij}(\mathbf{u}) := \tfrac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}), \\
\rho c_v \theta_0^{-1}\theta' + \nabla.\mathbf{q}(\theta,\mathbf{u}) = 0, \\
\mathbf{q}(\theta,\mathbf{u}) := -\chi\nabla(\theta_0^{-1}\theta) + \alpha c^2 \rho\gamma^{-1}\mathbf{u}' \quad \textit{в } \Omega\times(0,T], \\
\textit{крайові умови} \\
\mathbf{u} = 0 \quad \textit{на } \Gamma_u \times [0,T],\ \Gamma_u \subset \Gamma, \\
\sigma_{ij}(\mathbf{u},\theta) n_j = \hat{\sigma}_i \quad \textit{на } \Gamma_\sigma \times [0,T],\ \Gamma_\sigma = \Gamma \setminus \Gamma_u, \\
\theta = 0 \quad \textit{на } \Gamma_\theta \times [0,T],\ \Gamma_\theta \subset \Gamma, \\
\mathbf{n}.\mathbf{q}(\theta,\mathbf{u}) = \hat{q} \quad \textit{на } \Gamma_q \times [0,T],\ \Gamma_q = \Gamma \setminus \Gamma_\theta, \\
\textit{та початкові умови} \\
\mathbf{u}|_{t=0} = \mathbf{u}_0,\ \mathbf{u}'|_{t=0} = \boldsymbol{\upsilon}_0,\ \theta|_{t=0} = \theta_0 \quad \textit{в } \Omega.
\end{array}\right. \tag{2.1}$$

Тут і далі ми припускаємо, що рідина в кожен момент часу $t \in [0,T]$, $0 < T < +\infty$ займає обмежену область $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ з неперервною за Ліпшицем межею Γ, одиничний вектор зовнішньої нормалі до якої описується вектором

$$\mathbf{n} = \{n_i\}_{i=1}^d,\ n_i := \cos(\mathbf{n}, x_i),$$

на додаток

$$w' := \partial w / \partial t,\ w_{,i} := \partial w / \partial x_i,\ \nabla.\mathbf{u} := \partial u_i / \partial x_i,$$

за індексами, що повторюються, передбачається підсумовування від 1 до d (в застосуваннях $d = 1, 2$ або 3). Символами $\{\sigma_{ij}(\mathbf{u},\theta)\}_{i,j=1}^d, \{e_{ij}(\mathbf{u})\}_{i,j=1}^d$ ми позначаємо тензор напружень і деформацій, $\pi(\mathbf{u},\theta)$ – акустичний тиск, δ_{ij} – символ Кронекера.

Фізичні характеристики рідини – це густина маси ρ, коефіцієнти теплоємності при постійному об'ємі c_v та при постійному тиску c_π, $\gamma = c_\pi / c_v$, коефіцієнт теплопровідності χ, швидкість поширення звуку c, коефіцієнт температурного розширення α, коефіцієнти зсувної та об'ємної в'язкості η та ζ, відповідно. Деталі побудови цієї моделі подані у [4-7].

Далі нам буде потрібне варіаційне формулювання задачі акустики (2.1) такої структури:

$$\begin{cases} \textit{задано } \mathbf{u}_0 \in \mathbf{V},\ \mathbf{\upsilon}_0 \in \mathbf{H},\ \theta_0 \in G,\ (l,\mu) \in L^2(0,T;\mathbf{V}'\times G'); \\ \textit{знайти пару } \boldsymbol{\psi} = (\mathbf{u},\theta) \in L^2(0,T;\mathbf{V}\times G) \textit{ таку, що} \\ m(\mathbf{u}''(t),\mathbf{v}) + a(\mathbf{u}'(t),\mathbf{v}) + c(\mathbf{u}(t),\mathbf{v}) - b(\theta(t),\mathbf{v}) = < l(t),\mathbf{v} >, \\ s(\theta'(t),g) + k(\theta(t),g) + b(g,\mathbf{u}'(t)) = < \mu(t), g > \qquad \forall t \in (0,T], \\ m(\mathbf{u}'(0)-\mathbf{\upsilon}_0,\mathbf{v}) = 0,\ a(\mathbf{u}(0)-\mathbf{u}_0,\mathbf{v}) = 0 \qquad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{V}, \\ \qquad s(\theta(0)-\theta_0,g) = 0 \qquad \forall g \in G. \end{cases} \tag{2.2}$$

Не вдаючись у деталі загальновживаної техніки побудови варіаційних задач (див., наприклад, [1]), зазначимо, що

(i) неперервні симетричні білінійні форми

$$\begin{aligned} m(\mathbf{u},\mathbf{v}) &:= \int_\Omega \rho \mathbf{u}.\mathbf{v} dx \qquad \forall \mathbf{u},\mathbf{v} \in \mathbf{H} := [L^2(\Omega)]^d, \\ s(\theta,g) &:= \int_\Omega \rho c_v \theta_0^{-1} \theta g dx \qquad \forall\ \theta, g \in H := L^2(\Omega) \end{aligned} \tag{2.3}$$

є скалярними добутками на просторах H та $\mathbf{H}$ відповідно і, у підсумку, утворюють на них норми

$$\begin{aligned} \| \mathbf{v} \|_{\mathbf{H}} &:= \sqrt{m(\mathbf{v},\mathbf{v})} \ \ \forall \mathbf{v} \in \mathbf{H}, \\ \| g \|_H &:= \sqrt{s(g,g)} \ \ \forall\ \theta \in H, \end{aligned} \tag{2.4}$$

еквівалентні нормам просторів $[L^2(\Omega)]^d$ та $L^2(\Omega)$, відповідно;

(ii) подібно, неперервні симетричні білінійні форми

$$a(\mathbf{u},\mathbf{v}) := \int_\Omega [2\eta e_{ij}(\mathbf{u}) e_{ij}(\mathbf{v}) + \zeta (\nabla.\mathbf{u})(\nabla.\mathbf{v})] dx$$

$$\forall \mathbf{u},\mathbf{v} \in \mathbf{V} := \{\mathbf{v} \in [H^1(\Omega)]^d : \mathbf{v} = 0 \ \textit{ на } \ \Gamma_{\mathbf{u}}\}, \tag{2.5}$$

$$k(\theta,g) := \theta_0^{-1} \int_\Omega \chi \theta,_i g,_i \, dx \qquad \forall\ \theta, g \in G := \{g \in H^1(\Omega) : g = 0 \ \textit{ на } \ \Gamma_\theta\}$$

є скалярними добутками на просторах **V** та **G**, відповідно і, у підсумку, утворюють на них норми

$$\begin{aligned} \| \mathbf{v} \|_{\mathrm{V}} &:= \sqrt{a(\mathbf{v},\mathbf{v})} \qquad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{V} \quad \{\textit{еквівалентна } \| \ . \|_{[H^1(\Omega)]^d} \}, \\ \| g \|_G &:= \sqrt{k(g,g)} \qquad \forall\ \theta \in G \quad \{\textit{еквівалентна } \| \ . \|_{H^1(\Omega)} \}; \end{aligned} \tag{2.6}$$

(iii) неперервна симетрична білінійна форма

$$c(\mathbf{u},\mathbf{v}) := \int_\Omega c^2 \rho \gamma^{-1} (\nabla.\mathbf{u})(\nabla.\mathbf{v}) dx \quad \forall \mathbf{u},\mathbf{v} \in \mathbf{V} \tag{2.7}$$

утворює на просторі допустимих зміщень **V** напівнорму

$$| \mathbf{v} |_{\mathrm{V}} := \sqrt{c(\mathbf{v},\mathbf{v})} \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{V} \tag{2.8}$$

(iv) неперервна білінійна форма

$$b(g,\mathbf{v}) := \int_\Omega g c^2 \rho \gamma^{-1} \alpha \nabla.\mathbf{v} dx \quad \forall g \in G \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{V} \tag{2.9}$$

визначає механізм взаємодії теплового та механічного полів у процесі поширення акустичних хвиль;

(v) лінійні неперервні функціонали

$$\begin{aligned} < l,\mathbf{v} > &:= \int_{\Gamma_\sigma} \hat{\sigma}_i v_i \, ds \qquad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{V}, \\ < \mu, g > &:= \int_{\Gamma_q} \theta_0^{-1} \hat{q} g \, ds \qquad \forall g \in G \end{aligned} \tag{2.10}$$

описують зовнішні джерела надходження механічної та теплової енергії до акустичного поля рідини;

(vi) рівняння балансу енергій цієї задачі має таку будову:

$$\begin{aligned}&\tfrac{1}{2}[\|\mathbf{u}'(t)\|^2_{\mathbf{H}} + |\mathbf{u}(t)|^2_{\mathrm{V}} + \|\theta(t)\|^2_H] + \int_0^t [\|\mathbf{u}'(t)\|^2_{\mathrm{V}} + \|\theta(\tau)\|^2_G] d\tau \\ &= \tfrac{1}{2}[\|\boldsymbol{\upsilon}_0\|^2_{\mathbf{H}} + |\mathbf{u}_0|^2_{\mathrm{V}} + \|\theta_0\|^2_H] + \int_0^t [< l(\tau), \mathbf{u}'(\tau) > + < \mu(\tau), \theta(\tau) >] d\tau \quad \forall t \in [0,T].\end{aligned} \tag{2.11}$$

3. ДИСКРЕТИЗАЦІЯ ВАРІАЦІЙНОЇ ЗАДАЧІ ЗА ЧАСОВОЮ ЗМІННОЮ

Поділимо відрізок часу $[0,T]$ на N рівних (хоча, як це буде зрозуміло пізніше, не обов'язково) частин. Величину $\Delta t := T/N$ називатимемо параметром дискретизації в часі або кроком інтегрування в часі задачі (2.2), а точки $t_j = j\Delta t,\ j = 0, \dots, N$, та проміжки $[t_j, t_{j+1}]$ будемо називати вузлами часової сітки та кроками інтегрування в часі, відповідно.

3.1. *ВИЗНАЧЕНА ЧАСТИНАМИ АПРОКСИМАЦІЯ ТА ХАРАКТЕРИСТИКА ЇЇ КОЕФІЦІЄНТІВ*

З огляду на змішану структуру задачі (2.2) на кожному відрізку часу $[t_j, t_{j+1}]$ її розв'язок $\boldsymbol{\psi}(t) = \{\mathbf{u}(t), \theta(t)\}$ будемо наближати парою $\boldsymbol{\psi}^{\Delta t}(t) = \{\mathbf{u}^{\Delta t}(t), \theta^{\Delta t}(t)\}$ такого вигляду:

$$\begin{cases}\mathbf{u}^{\Delta t}(t) := [1-\omega_j^2(t)]\mathbf{u}^j + \Delta t[1-\omega_j(t)]\omega_j(t)\boldsymbol{\upsilon}^j + \omega_j^2(t)\mathbf{u}^{j+1}, \\ \theta^{\Delta t}(t) := [1-\omega_j(t)]\theta^j + \omega_j(t)\theta^{j+1}, \\ \omega_j(t) := \Delta t^{-1}(t - t_j) \qquad \forall t \in [t_j, t_{j+1}], \qquad j = 0, \dots, N-1,\end{cases} \tag{3.1}$$

де векторні функції $\mathbf{u}^j, \mathbf{u}^{j+1}, \boldsymbol{\upsilon}^j \in \mathbf{V}$ та скалярні функції $\theta^j, \theta^{j+1} \in \mathrm{G}$ підлягатимуть визначенню.

Щоб з'ясувати фізичний зміст шуканих коефіцієнтів, розглянемо значення компонент апроксимації $\boldsymbol{\psi}^{\Delta t}(t)$ та їхніх похідних у вузлах сітки, а саме

$$\begin{cases}\mathbf{u}^{\Delta t}(t_j) = \mathbf{u}^j, \quad \mathbf{u}^{\Delta t}(t_{j+1}) = \mathbf{u}^{j+1}, \\ \dfrac{\partial}{\partial t}[\mathbf{u}^{\Delta t}(t)]\Big|_{t_j} = [\mathbf{u}^{\Delta t}(t)]'\Big|_{t_j} = \boldsymbol{\upsilon}^j, \\ \theta^{\Delta t}(t_j) = \theta^j, \quad \theta^{\Delta t}(t_{j+1}) = \theta^{j+1}.\end{cases} \tag{3.2}$$

Отож, частинами визначена у (3.1) апроксимація $\boldsymbol{\psi}^{\Delta t}(t) = (\mathbf{u}^{\Delta t}(t), \theta^{\Delta t}(t))$ має такі властивості:

(i) $$\boldsymbol{\psi}^{\Delta t}(t_j) = (\mathbf{u}^j, \theta^j), \ \boldsymbol{\psi}^{\Delta t}(t_{j+1}) = (\mathbf{u}^{j+1}, \theta^{j+1}) \tag{3.3}$$

тобто частина шуканих коефіцієнтів апроксимації (2.1) є *значеннями зміщень* і *температури* у вузлах сітки;

(ii) останній із коефіцієнтів, а саме $\boldsymbol{\upsilon}^j$ є значенням апроксимації *швидкості зміщення* в вузлі $t = t_j$; отже, якщо до (1.1) на місця трійки $\{\mathbf{u}^j, \boldsymbol{\upsilon}^j, \mathbf{u}^{j+1}\} \subset \mathbf{V}$ підставити точні значення зміщення $\{\mathbf{u}(t_j), \boldsymbol{\upsilon}(t_j), \mathbf{u}(t_{j+1})\} \subset \mathbf{V}$, то апроксимація $\mathbf{u}^{\Delta t}(t)$ перетвориться в *інтерполяційний поліном Ерміта* другого порядку;

(iii) $$[\mathbf{u}^{\Delta t}(t)]'' = \frac{1}{\Delta t}[2\Delta t^{-1}(\mathbf{u}^{j+1} - \mathbf{u}^j) - 2\boldsymbol{\upsilon}^j],$$

тому вектор

$$\dot{\mathbf{\upsilon}}^{j+1/2} := \frac{2}{\Delta t}\left[\frac{\mathbf{u}^{j+1}-\mathbf{u}^{j}}{\Delta t} - \mathbf{\upsilon}^{j}\right] \tag{3.4}$$

визначає наближене значення *пришвидшення*, яке є сталим на кожному кроці інтегрування в часі.

Лема 3.1 про апроксимацію приросту температури.

Нехай апроксимація температури $\theta^{\Delta t} = \theta^{\Delta t}(t)$ *описується поліномом першого порядку вигляду*

$$\begin{cases} \theta^{\Delta t}(t) := [1-\omega_j(t)]\theta^{j} + \omega_j(t)\theta^{j+1}, \\ \omega_j(t) := \Delta t^{-1}(t-t_j) \qquad \forall t \in [t_j, t_{j+1}], \qquad j = 0,\dots,N-1. \end{cases} \tag{3.5}$$

Тоді, ввівши позначення

$$\begin{cases} \theta^{j+1/2} := \frac{1}{2}(\theta^{j+1}+\theta^{j}) \qquad \{\, = \theta^{\Delta t}(t_{j+1/2}),\ t_{j+1/2} := \frac{1}{2}(t_{j+1}+t_j)\}, \\ \dot{\theta}^{j+1/2} := (\theta^{j+1}-\theta^{j})\Delta t^{-1} \ \ \{\, = [\theta^{\Delta t}(t)]' \,\}, \end{cases} \tag{3.6}$$

цю апроксимацію температури можна подати виразом

$$\theta^{\Delta t}(t) = \theta^{j} + \Delta t\omega_j(t)\dot{\theta}^{j+1/2} = \theta^{j+1/2} + \Delta t[\omega_j(t) - \tfrac{1}{2}]\dot{\theta}^{j+1/2} \quad \forall t \in [t_j, t_{j+1}],\ j = 0,\dots,N-1. \tag{3.7}$$

Доведення. Ланцюжок наведених нижче перетворень доводить таке твердження:

$$\begin{aligned} \theta^{\Delta t}(t) &= [1-\omega_j(t)]\theta^{j} + \omega_j(t)\theta^{j+1} = \theta^{j} + \omega_j(t)(\theta^{j+1}-\theta^{j}) = \theta^{j} + \Delta t\omega_j(t)\dot{\theta}^{j+1/2} \\ &= \tfrac{1}{2}[\theta^{j+1}+\theta^{j}] - \tfrac{1}{2}[\theta^{j+1}-\theta^{j}] + \Delta t\omega_j(t)\dot{\theta}^{j+1/2} = \theta^{j+1/2} + \Delta t[\omega_j(t)-\tfrac{1}{2}]\dot{\theta}^{j+1/2} \ \forall t \in [t_j, t_{j+1}]. \end{aligned} \tag{3.8}$$

Пропозиція 3.1 про апроксимацію акустичного зміщення.

Нехай вектор апроксимації акустичного зміщення $\mathbf{u}^{\Delta t} = \mathbf{u}^{\Delta t}(t)$ *є поліномом другого порядку, який описується виразом*

$$\begin{cases} \mathbf{u}^{\Delta t}(t) = [1-\omega_j^2(t)]\mathbf{u}^{j} + \Delta t[1-\omega_j(t)]\omega_j(t)\mathbf{\upsilon}^{j} + \omega_j^2(t)\mathbf{u}^{j+1}, \\ \omega_j(t) = (t-t_j)\Delta t^{-1} \qquad \forall t \in [t_j, t_{j+1}], \qquad j = 0, \ \dots\ , N-1. \end{cases} \tag{3.9}$$

Якщо запровадити позначення

$$\begin{cases} \mathbf{\upsilon}^{j+1/2} := \frac{1}{2}(\mathbf{\upsilon}^{j+1}+\mathbf{\upsilon}^{j}), \qquad \dot{\mathbf{\upsilon}}^{j+1/2} := (\mathbf{\upsilon}^{j+1}-\mathbf{\upsilon}^{j})\Delta t^{-1}, \\ \mathbf{u}^{j+1} := \mathbf{u}^{j} + \Delta t\mathbf{\upsilon}^{j} + \frac{1}{2}\Delta t^2\dot{\mathbf{\upsilon}}^{j+1/2}, \\ \mathbf{u}^{j+1/2} := \frac{1}{2}(\mathbf{u}^{j+1}+\mathbf{u}^{j}) - \frac{1}{8}\Delta t^2\dot{\mathbf{\upsilon}}^{j+1/2}, \quad \dot{\mathbf{u}}^{j+1/2} := (\mathbf{u}^{j+1}-\mathbf{u}^{j})\Delta t^{-1}, \end{cases} \tag{3.10}$$

то будуть правильними такі:

(!) *тотожності*

$$\dot{\mathbf{u}}^{j+1/2} = \mathbf{\upsilon}^{j+1/2} = \mathbf{\upsilon}^{j} + \tfrac{1}{2}\Delta t\dot{\mathbf{\upsilon}}^{j+1/2}, \tag{3.11}$$

(!!) *форми запису апроксимації зміщення*

$$\mathbf{u}^{\Delta t}(t) = \mathbf{u}^{j} + \Delta t\omega_j(t)\mathbf{\upsilon}^{j} + \tfrac{1}{2}[\Delta t\omega_j(t)]^2\dot{\mathbf{\upsilon}}^{j+1/2} \qquad \forall t \in [t_j, t_{j+1}] \tag{3.12}$$

або

$$\mathbf{u}^{\Delta t}(t) = \mathbf{u}^{j+1/2} + \Delta t[\omega_j(t)-\tfrac{1}{2}]\mathbf{\upsilon}^{j+1/2} + \tfrac{1}{2}\Delta t^2[\omega_j(t)-\tfrac{1}{2}]^2\dot{\mathbf{\upsilon}}^{j+1/2} \quad \forall t \in [t_j, t_{j+1}]. \tag{3.13}$$

Доведення. Після диференціювання $\mathbf{u}^{\Delta t}(t)$ зауважимо , що

$$[\mathbf{u}^{\Delta t}(t)]'|_{t=t_{j+1}} = 2\Delta t^{-1}\left[\mathbf{u}^{j+1} - \mathbf{u}^{j} - \Delta t\mathbf{\upsilon}^{j}\right] + \mathbf{\upsilon}^{j} = \mathbf{\upsilon}^{j+1};$$

звідси одержимо $\Delta t^{-1}(\mathbf{u}^{j+1}-\mathbf{u}^{j})=\frac{1}{2}(\boldsymbol{\upsilon}^{j+1}+\boldsymbol{\upsilon}^{j})$, що з огляду на (3.10) є іншим записом першої з тотожностей (3.11).

Використавши (3.9), отримаємо

$$\mathbf{u}^{\Delta t}(t):=\mathbf{u}^{j}+\omega_j^2(t)(\mathbf{u}^{j+1}-\mathbf{u}^{j})+\Delta t[1-\omega_j(t)]\omega_j(t)\boldsymbol{\upsilon}^{j}=\mathbf{u}^{j}+\Delta t\omega_j(t)\boldsymbol{\upsilon}^{j}+\Delta t\omega_j^2(t)[\dot{\mathbf{u}}^{j+1/2}-\boldsymbol{\upsilon}^{j}]$$
$$=\mathbf{u}^{j}+\Delta t\omega_j(t)\boldsymbol{\upsilon}^{j}+\Delta t\omega_j^2(t)[\boldsymbol{\upsilon}^{j+1/2}-\boldsymbol{\upsilon}^{j}]=\mathbf{u}^{j}+\Delta t\omega_j(t)\boldsymbol{\upsilon}^{j}+\tfrac{1}{2}\Delta t^2\omega_j^2(t)\dot{\boldsymbol{\upsilon}}^{j+1/2}.$$

З іншого боку,

$$\begin{aligned}\mathbf{u}^{\Delta t}(t)&=\mathbf{u}^{j}+\Delta t\omega_j(t)\boldsymbol{\upsilon}^{j}+\tfrac{1}{2}[\Delta t\omega_j(t)]^2\dot{\boldsymbol{\upsilon}}^{j+1/2}\\
&=\tfrac{1}{2}(\mathbf{u}^{j+1}+\mathbf{u}^{j})-\tfrac{1}{2}\Delta t\boldsymbol{\upsilon}^{j+1/2}+\Delta t\omega_j(t)[\boldsymbol{\upsilon}^{j+1/2}-\tfrac{1}{2}\Delta t\dot{\boldsymbol{\upsilon}}^{j+1/2}]+\tfrac{1}{2}[\Delta t\omega_j(t)]^2\dot{\boldsymbol{\upsilon}}^{j+1/2}\\
&=\tfrac{1}{2}(\mathbf{u}^{j+1}+\mathbf{u}^{j})+\Delta t[\omega_j(t)-\tfrac{1}{2}]\boldsymbol{\upsilon}^{j+1/2}+\tfrac{1}{2}\Delta t^2\omega_j(t)[\omega_j(t)-1]\dot{\boldsymbol{\upsilon}}^{j+1/2}\\
&=\tfrac{1}{2}(\mathbf{u}^{j+1}+\mathbf{u}^{j})-\tfrac{1}{8}\Delta t^2\dot{\boldsymbol{\upsilon}}^{j+1/2}+\Delta t[\omega_j(t)-\tfrac{1}{2}]\boldsymbol{\upsilon}^{j+1/2}+\tfrac{1}{2}\Delta t^2[\omega_j^2(t)-\omega_j(t)+\tfrac{1}{4}]\dot{\boldsymbol{\upsilon}}^{j+1/2}\\
&=\mathbf{u}^{j+1/2}+\Delta t[\omega_j(t)-\tfrac{1}{2}]\boldsymbol{\upsilon}^{j+1/2}+\tfrac{1}{2}\Delta t^2[\omega_j(t)-\tfrac{1}{2}]^2\dot{\boldsymbol{\upsilon}}^{j+1/2}.\end{aligned}$$

3.2. *АПРОКСИМАЦІЯ ПОЧАТКОВИХ УМОВ ЗАДАЧІ*

Оскільки апроксимацію акустичного зміщення на кожному кроці інтегрування в часі вибрано у формі інтерполяційного полінома Ерміта, то виконання початкових умов задачі (2.2) перетворюється у рутинну процедуру, а саме, на першому кроці $[t_0,t_1]$ апроксимацію зміщення та температури вибираємо у вигляді

$$\begin{cases}\mathbf{u}^{\Delta t}(t)=\mathbf{u}_0+\Delta t\omega_0(t)\boldsymbol{\upsilon}_0+\tfrac{1}{2}[\Delta t\omega_0(t)]^2\dot{\boldsymbol{\upsilon}}^{1/2},\\ \theta^{\Delta t}(t)=\theta_0+\Delta t\omega_0(t)\dot{\theta}^{1/2}\qquad\forall t\in[t_0,t_1].\end{cases}\tag{3.16}$$

Отож, зроблений тут вибір ґатунку апроксимації розв'язку задачі акустики гарантує *точне виконання її початкових умов.*

З іншого боку, у правій частині (3.16) залишилася пара невідомих $\left\{\dot{\boldsymbol{\upsilon}}^{1/2},\dot{\theta}^{1/2}\right\}\in\mathbf{V}\times G$, яка відтворює акустичне пришвидшення та швидкість зміни температури на цьому часовому кроці аналізу задачі. Для їхнього визначення маємо ще незадіяну систему двох варіаційних рівнянь, яку певним способом треба перетворити до належної системи алгебричних рівнянь. Для цього використаємо проекційну процедуру Петрова-Гальоркіна.

Зрештою, після підстановки обчисленої певним способом пари $\left\{\dot{\boldsymbol{\upsilon}}^{1/2},\dot{\theta}^{1/2}\right\}\in\mathbf{V}\times G$ ми, з огляду на (3.17), простим перерахунком обчислюємо

$$\begin{cases}\boldsymbol{\upsilon}^1=\boldsymbol{\upsilon}^0+\Delta t\dot{\boldsymbol{\upsilon}}^{1/2} & \{\,[\mathbf{u}^{\Delta t}(t)]'\big|_{t=t_1}\cong\mathbf{u}'(t_1)\},\\ \mathbf{u}^1=\mathbf{u}^0+\tfrac{1}{2}\Delta t(\boldsymbol{\upsilon}^1+\boldsymbol{\upsilon}^0) & \{\,[\mathbf{u}^{\Delta t}(t_1)]\cong\mathbf{u}(t_1)\},\\ \theta^1=\theta^0+\Delta t\dot{\theta}^{1/2} & \{\,[\theta^{\Delta t}(t_1)]\cong\theta(t_1)\}\end{cases}\tag{3.17}$$

залишаючи в (3.12) для чергового кроку інтегрування з $j=1$ нову пару невідомих $\left\{\dot{\boldsymbol{\upsilon}}^{j+1/2},\dot{\theta}^{j+1/2}\right\}\in\mathbf{V}\times G$. Так створюються передумови конструювання *алгоритму покрокових рекурентних обчислень наближеного розв'язку* задачі акустики (2.2).

4. ПРОЕКЦІЙНІ РІВНЯННЯ ДИСКРЕТИЗОВАНОЇ В ЧАСІ ЗАДАЧІ АКУСТИКИ

Підставляючи апроксимації (3.1) у варіаційну задачу (2.2), будемо вимагати, щоб на проміжку часу $[t_j, t_{j+1}]$ нев'язки цих підстановок були ортогональні до функцій $\varepsilon(t) \ge 0$ таких, що

$$\int_{t_j}^{t_{j+1}} \varepsilon(t)dt = 1 \tag{4.1}$$

Теорема 4.1. про дискретизовану в часі систему варіаційних рівнянь акустики.

Нехай для апроксимації розв'язку $\boldsymbol{\psi}(t) = \{\mathbf{u}(t), \theta(t)\}$ *варіаційної задачі акустики* (2.2) *використовується частинами визначене наближення* $\boldsymbol{\psi}^{\Delta t}(t) = \{\mathbf{u}^{\Delta t}(t), \theta^{\Delta t}(t)\}$, *яке описується виразами* (3.12) і (3.7), *відповідно. Припустимо також, що лінійні функціонали правих частин рівнянь цієї задачі наближаються в частинно лінійний спосіб згідно з правилом*

$$\begin{cases} < l(t), \mathbf{v} > \cong [1-\omega(t)] < l(t_j), \mathbf{v} > +\omega(t) < l(t_{j+1}), \mathbf{v} >, \\ < \mu(t), \mathbf{v} > \cong [1-\omega(t)] < \mu(t_j), \mathbf{v} > +\omega(t) < \mu(t_{j+1}), \mathbf{v} >, \\ \omega(t) := \Delta t^{-1}(t-t_j) \qquad \forall t \in [t_j, t_{j+1}], \qquad j = 0, \dots, N-1. \end{cases} \tag{4.2}$$

Тоді для кожного відрізка часу $[t_j, t_{j+1}]$ *проекційні рівняння Петрова-Гальоркіна, обчислені за допомогою тестової функції* $\varepsilon(t) \ge 0$ *з властивістю* (4.1), *набудуть вигляду*

$$\begin{cases} m(\dot{\boldsymbol{\upsilon}}^{j+1/2}, \mathbf{v}) + a(\boldsymbol{\upsilon}^j + \Delta t\gamma\dot{\boldsymbol{\upsilon}}^{j+1/2}, \mathbf{v}) + c(\mathbf{u}^j + \Delta t\gamma\boldsymbol{\upsilon}^j + \tfrac{1}{2}\Delta t^2\beta\dot{\boldsymbol{\upsilon}}^{j+1/2}, \mathbf{v}) \\ \qquad - b(\theta^j + \Delta t\gamma\dot{\theta}^{j+1/2}, \mathbf{v}) = < l_{j+\gamma}, \mathbf{v} > \qquad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{V}, \\ s(\dot{\theta}^{j+1/2}, g) + k(\theta^j + \Delta t\gamma\dot{\theta}^{j+1/2}, g) + b(g, \boldsymbol{\upsilon}^j + \Delta t\gamma\dot{\boldsymbol{\upsilon}}^{j+1/2}) = < \mu_{j+\gamma}, g > \quad \forall g \in G, \end{cases} \tag{4.3}$$

де значення параметрів γ *та* β *обчислюють згідно з такими правилами:*

$$\gamma := \int_{t_j}^{t_{j+1}} \varepsilon(t)\omega(t)\,dt, \quad \beta := \int_{t_j}^{t_{j+1}} \varepsilon(t)\,\omega^2(t)\,dt \tag{4.4}$$

та

$$\begin{cases} < l_{j+\gamma}, \mathbf{v} > := (1-\gamma) < l(t_j), \mathbf{v} > +\gamma < l(t_{j+1}), \mathbf{v} > \qquad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{V}, \\ < \mu_{j+\gamma}, \mathbf{v} > := (1-\gamma) < \mu(t_j), \mathbf{v} > +\gamma < \mu(t_{j+1}), \mathbf{v} > \qquad \forall g \in G. \end{cases} \tag{4.5}$$

Доведення. Підставимо апроксимації (3.12), (3.7) і (4.2) у рівняння варіаційної задачі (2.2), результат домножимо на вибрану функцію $\varepsilon(t)$ і проінтегруємо на проміжку часу $[t_j, t_{j+1}]$, тоді

$$\begin{aligned} & m(\dot{\boldsymbol{\upsilon}}^{j+1/2}, \boldsymbol{\upsilon}) + a(\boldsymbol{\upsilon}^j, \mathbf{v}) + c(\mathbf{u}^j, \mathbf{v}) - b(\theta^j, \mathbf{v}) \\ & + \Delta t[a(\dot{\boldsymbol{\upsilon}}^{j+1/2}, \mathbf{v}) + c(\boldsymbol{\upsilon}^j, \mathbf{v}) - b(\dot{\theta}^{j+1/2}, \mathbf{v})]\int_{t_j}^{t_{j+1}} \varepsilon(t)\omega(t)dt + \tfrac{1}{2}\Delta t^2 c(\dot{\boldsymbol{\upsilon}}^{j+1/2}, \mathbf{v})\int_{t_j}^{t_{j+1}} \varepsilon(t)[\omega(t)]^2 dt \\ & \qquad = \int_{t_j}^{t_{j+1}} \varepsilon(t)[[1-\omega(t)] < l(t_j), \mathbf{v} > +\omega(t) < l(t_{j+1}), \mathbf{v} >]dt \qquad \forall \mathbf{v} \in V, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & s(\dot{\theta}^{j+1/2}, g) + k(\theta^j, g) + b(g, \boldsymbol{\upsilon}^j) + \Delta t[k(\dot{\theta}^{j+1/2}, g) + b(g, \dot{\boldsymbol{\upsilon}}^{j+1/2})]\int_{t_j}^{t_{j+1}} \varepsilon(t)\omega(t)dt \\ & \qquad = \int_{t_j}^{t_{j+1}} \varepsilon(t)[[1-\omega(t)] < \mu(t_j), \mathbf{v} > +\omega(t) < \mu(t_{j+1}), \mathbf{v} >]dt \quad \forall g \in G. \end{aligned}$$

Якщо тепер ввести позначення (4.4) та (4.5) і згрупувати доданки за відповідними білінійними формами, то прийдемо до задекларованого в (4.3) результату.

5. ОДНОКРОКОВА РЕКУРЕНТНА СХЕМА ІНТЕГРУВАННЯ В ЧАСІ

Для скорочення запису проекційних рівнянь (4.3) введемо симетричні білінійні форми

$$M(\Delta t,\gamma,\beta;\ .\ ,\ .\ ):\mathbf{V}\times\mathbf{V}\to \mathrm{R} \ \text{ та } \ S(\Delta t,\gamma;\ .\ ,\ .\ ):G\times G\to \mathrm{R}$$

згідно з правилами

$$M(\Delta t,\gamma,\beta;\mathbf{w},\mathbf{v}):=m(\mathbf{w},\mathbf{v})+\Delta t\gamma a(\mathbf{w},\mathbf{v})+\tfrac{1}{2}\Delta t^2\beta c(\mathbf{w},\mathbf{v}) \quad \forall \mathbf{w},\mathbf{v}\in\mathbf{V} \tag{5.1}$$

та

$$S(\Delta t,\gamma;\vartheta,g):=s(\vartheta,g)+\Delta t\gamma k(\vartheta,g) \qquad \forall\,\vartheta,g\in G \tag{5.2}$$

відповідно і визначимо лінійні неперервні функціонали

$$\begin{aligned} &< X_{j+\gamma},\mathbf{v}>:=< l_{j+\gamma},\mathbf{v}> -[a(\boldsymbol{\upsilon}^j,\mathbf{v})+c(\mathbf{u}^j+\Delta t\gamma\boldsymbol{\upsilon}^j,\mathbf{v})-b(\theta^j,\mathbf{v})] \qquad \forall\mathbf{v}\in\mathbf{V},\\ &< Y_{j+\gamma},g>:=<\mu_{j+\gamma},g>-[k(\theta^j,g)+b(g,\boldsymbol{\upsilon}^j)] \qquad \forall g\in G. \end{aligned} \tag{5.3}$$

Тепер на підставі теореми 4.1 можемо сформулювати теорему.

Теорема 5.1 про однокрокову рекурентну схему розв'язування задачі акустики.

Нехай розв'язок $\{\mathbf{u}(t),\theta(t)\}\in\mathbf{V}\times G$ *варіаційної задачі* (2.2) *на кожному кроці* $[t_j,t_{j+1}]$, $\Delta t=t_{j+1}-t_j$ *апроксимується поліномами вигляду* (3.12), (3.7).

Тоді процедура Петрова–Гальоркіна породжує однокрокову рекурентну схему вигляду:

$$\begin{cases} \textit{задано}\\ \{\mathbf{u}^0,\boldsymbol{\upsilon}^0,\theta^0\}\in\mathbf{V}\times\mathbf{V}\times G\\ \textit{та параметри}\ \ \Delta t>0,\quad \gamma,\beta\in[0,1];\\ \textit{знайти}\\ \{\dot{\boldsymbol{\upsilon}}^{j+1/2},\dot\theta^{j+1/2}\}\in\mathbf{V}\times G\ \ \textit{та}\ \ \{\mathbf{u}^{j+1},\boldsymbol{\upsilon}^{j+1},\theta^{j+1}\}\in\mathbf{V}\times\mathbf{V}\times G\\ \textit{такі, що}\\ M(\Delta t,\gamma,\beta;\ \dot{\boldsymbol{\upsilon}}^{j+1/2},\mathbf{v})-\Delta t\gamma b(\dot\theta^{j+1/2},\mathbf{v})=< X_{j+\gamma},\mathbf{v}> \qquad \forall\mathbf{v}\in\mathbf{V},\\ \quad S(\Delta t,\gamma;\dot\theta^{j+1/2},g)+\Delta t\gamma b(g,\dot{\boldsymbol{\upsilon}}^{j+1/2})=< Y_{j+\gamma},g> \qquad \forall g\in G,\\ \qquad \boldsymbol{\upsilon}^{j+1}=\boldsymbol{\upsilon}^j+\Delta t\dot{\boldsymbol{\upsilon}}^{j+1/2},\qquad \mathbf{u}^{j+1}=\mathbf{u}^j+\tfrac{1}{2}\Delta t(\boldsymbol{\upsilon}^{j+1}+\boldsymbol{\upsilon}^j),\\ \qquad \theta^{j+1}=\theta^j+\Delta t\dot\theta^{j+1/2} \qquad\qquad j=0,1,\ \dots\ ,N-1. \end{cases} \tag{5.4}$$

Доведення. Повертаючись до системи рівнянь (4.3), залишимо в лівій частині рівнянь лише доданки з індексом $j+1/2$, у підсумку одержимо

$$\begin{cases} m(\dot{\boldsymbol{\upsilon}}^{j+1/2},\mathbf{v})+\Delta t\gamma a(\dot{\boldsymbol{\upsilon}}^{j+1/2},\mathbf{v})+\tfrac{1}{2}\Delta t^2\beta c(\dot{\boldsymbol{\upsilon}}^{j+1/2},\mathbf{v})-\Delta t\gamma b(\dot\theta^{j+1/2},\mathbf{v})\\ \qquad =< l_{j+\gamma},\mathbf{v}>-[a(\boldsymbol{\upsilon}^j,\mathbf{v})+c(\mathbf{u}^j+\Delta t\gamma\boldsymbol{\upsilon}^j,\mathbf{v})-b(\theta^j,\mathbf{v})] \qquad \forall\mathbf{v}\in\mathbf{V},\\ \qquad\qquad s(\dot\theta^{j+1/2},g)+\Delta t\gamma k(\dot\theta^{j+1/2},g)+\Delta t\gamma b(g,\dot{\boldsymbol{\upsilon}}^{j+1/2})\\ \qquad\qquad\quad =<\mu_{j+\gamma},g>-[k(\theta^j,g)+b(g,\boldsymbol{\upsilon}^j)] \qquad \forall g\in G. \end{cases} \tag{5.5}$$

На завершення доведення залишилося застосувати визначення (5.1)-(5.3).

6. АБСТРАКТНА ФОРМА ПРОЕКЦІЙНИХ РІВНЯНЬ ОРС ТА ЇХНЯ РОЗВ'ЯЗУВАНІСТЬ

На декартовому добутку $Q := \mathbf{V} \times G$ введемо білінійну форму та лінійні функціонали згідно з такими правилами:

$$B(\pi,\phi) := M(\Delta t\gamma, \beta;\ \mathbf{\upsilon}, \mathbf{v}) + S(\Delta t, \gamma; \theta, g) - \Delta t\gamma[b(g,\mathbf{\upsilon}) - b(\theta,\mathbf{v})] \qquad \forall \pi = \{\mathbf{\upsilon},\theta\}, \phi = \{\mathbf{v}, g\}\mathbf{v} \in Q \tag{6.1}$$

та

$$< Z_{j+\gamma}, \phi > := < X_{j+\gamma}, \mathbf{v} > + < Y_{j+\gamma}, g > \qquad \forall \phi = \{\mathbf{v}, g\} \in Q = \mathbf{V} \times G. \tag{6.2}$$

У такому разі однокрокова рекурентна схема (5.4) на кожному етапі свого застосування передбачає розв'язування варіаційних задач вигляду

$$\begin{cases} \textit{знайти} \\ \pi^{j+1/2} = \left\{ \dot{\mathbf{\upsilon}}^{j+1/2}, \dot{\theta}^{j+1/2} \right\} \in Q \\ \textit{таке, що} \\ B(\pi^{j+1/2}, \phi) = < Z_{j+\gamma}, \phi > \qquad \forall \phi = \{\mathbf{v}, g\} \in Q. \end{cases} \tag{6.3}$$

Теорема 6.1 про коректність формулювання варіаційних рівнянь ОРС.

Нехай виконано умови теореми 4.1. Тоді для кожного $j = 0,1,\ \ldots\ , N-1$ *система варіаційних рівнянь* (6.3) *однокрокової рекурентної схеми* (5.4) *має єдиний розв'язок*

$$\pi^{j+1/2} = \left\{ \dot{\mathbf{\upsilon}}^{j+1/2}, \dot{\theta}^{j+1/2} \right\} \in Q$$

такий, що

$$\left\| \pi^{j+1/2} \right\|_Q \le \left\| \mathrm{Z}_{j+\gamma} \right\|_*, \tag{6.4}$$

де

$$\| \phi \|_Q = \sqrt{B(\phi,\phi)} \quad \forall \phi \in Q .$$

Доведення. Щоб дати відповідь на питання стосовно розв'язуваності системи рівнянь (4.3) або, що еквівалентно, задачі (6.3), достатньо перевірити виконання гіпотез теореми Лакса-Мільграма-Вишика. У зв'язку з цим зауважимо, що з огляду на зазначені в п.1 властивості білінійних форм (2.3)-(2.9) можна стверджувати, що білінійна форма $B(\ .\ ,\ .\ ) : Q \times Q \to R$ є неперервною та Q-еліптичною, оскільки

$$\begin{aligned} \Re(\phi,\phi) &= M(\Delta t, \gamma, \beta;\ \mathbf{v}, \mathbf{v}) + S(\Delta t, \gamma; g, g) \\ &= \| \mathbf{v} \|^2_{\mathbf{H}} + \Delta t\gamma \| \mathbf{v} \|^2_{\mathrm{V}} + \tfrac{1}{2}\Delta t^2 \beta \,|\, \mathbf{v} \,|^2_{\mathrm{V}} + \| g \|^2_H + \Delta t\gamma \| g \|^2_G \qquad \forall \phi = \{\mathbf{v}, g\} \in Q. \end{aligned}$$

Знову ж таки на підставі (2.3)-(2.10) неважко показати, що лінійний функціонал $\mathrm{Z}_{j+\gamma} : Q \to \mathbb{R}$ є неперервним на просторі Q. Отож, з огляду на теорему Лакса-Мільграма-Вишика задача (6.3) однозначно розв'язується і є правильною оцінка (6.4).

7. ЕКВІВАЛЕНТНА ЗАДАЧА ПРО СІДЛОВУ ТОЧКУ КВАДРАТИЧНОГО ФУНКЦІОНАЛА

Специфіку структури варіаційних рівнянь ОРС (5.4) та їхніх розв'язків характеризує теорема.

Теорема 7.1 про сідлову точку лагранжіану дискретизованої в часі варіаційної задачі акустики.

Розв'язок

$$\{\dot{\mathbf{v}}^{j+1/2},\dot{\theta}^{j+1/2}\}\in\mathbf{V}\times G$$

системи варіаційних рівнянь однокрокової рекурентної схеми (5.4) *є одночасно і розв'язком задачі про сідлову точку такого ґатунку*

$$\left\{\begin{array}{l}\textit{задано}\ \left\{\mathbf{u}^j,\mathbf{v}^j,\theta^j\right\}\in\mathbf{V}\times\mathbf{V}\times G\ \ \textit{та}\ \ \textit{параметри}\ \ \Delta t>0,\ \ \gamma,\beta\in[0,1];\\ \textit{знайти}\ \ \textit{пару}\ \ \left\{\dot{\mathbf{v}}^{j+1/2},\dot{\theta}^{j+1/2}\right\}\in\mathbf{V}\times G\ \ \textit{таку, що}\\ \quad L(\dot{\mathbf{v}}^{j+1/2},g)\le L(\dot{\mathbf{v}}^{j+1/2},\dot{\theta}^{j+1/2})\le L(\mathbf{v},\dot{\theta}^{j+1/2})\qquad\forall\phi=\{\mathbf{v},g\}\in Q,\\ \textit{де}\\ \quad L(\mathbf{v},g):=\tfrac{1}{2}[M(\Delta t\gamma,\beta;\ \mathbf{v},\mathbf{v})-S(\Delta t\gamma;g,g)]\\ \qquad\qquad +[\Delta t\gamma b(g,\mathbf{v})+<X_{j+\gamma},\mathbf{v}>-<Y_{j+\gamma},g>]\qquad\forall\phi=\{\mathbf{v},g\}\in Q.\end{array}\right.\tag{7.1}$$

і, навпаки, розв'язок задачі (7.1) *задовольняє варіаційні рівняння ОРС* (5.4).

Доведення виконують загальновживаною технікою варіаційного числення.

8. ЕНЕРГЕТИЧНЕ РІВНЯННЯ НАПІВДИСКРЕТИЗОВАНОЇ ЗАДАЧІ

Ключову роль у нашому аналізі однокрокової рекурентної схеми (5.4) відіграє теорема.

Теорема 8.1 про рівняння балансу енергії дискретизованої в часі задачі акустики.

Нехай апроксимацію $\left\{\mathbf{u}^{\Delta t}(t),\theta^{\Delta t}(t)\right\}\in\mathbf{V}\times G$ *розв'язку варіаційної задачі* (2.2) *описують частинами визначені поліноми вигляду* (3.12) і (3.7)*, коефіцієнти яких обчислюють за допомогою ОРС* (5.3) *зі значенням параметра* $\gamma=\frac{1}{2}$.

Тоді рівняння балансу енергії дискретизованої задачі акустики набувають вигляду

$$\begin{aligned}&\tfrac{1}{2}[\|\mathbf{v}^{n+1}\|^2_{\mathbf{H}}+|\mathbf{u}^{n+1}|^2_{\mathbf{V}}+\|\theta^{n+1}\|^2_H]+\\&\qquad+\Delta t\sum_{j=0}^{n}[\|\mathbf{v}^{j+1/2}\|^2_{\mathbf{V}}+\|\theta^{j+1/2}\|^2_G]+\tfrac{1}{4}\Delta t^2(\beta-\tfrac{1}{2})|\mathbf{v}^{n+1}|^2_{\mathbf{V}}\\&=\tfrac{1}{2}[\|\mathbf{v}^0\|^2_{\mathbf{H}}+|\mathbf{u}^0|^2_{\mathbf{V}}+\|\theta^0\|^2_H]+\tfrac{1}{4}\Delta t^2(\beta-\tfrac{1}{2})|\mathbf{v}^0|^2_{\mathbf{V}}\\&\qquad+\Delta t\sum_{j=0}^{n}[<l_{j+1/2},\mathbf{v}^{j+1/2}>+<\mu_{j+1/2},\theta^{j+1/2}>]\quad n=0,1,\ \dots\ .\end{aligned}\tag{8.1}$$

Доведення. За умови, що $\gamma=\frac{1}{2}$, рівняння дискретизованої варіаційної задачі (4.3) набудуть вигляду

$$\left\{\begin{array}{l}m(\dot{\mathbf{v}}^{j+1/2},\mathbf{v})+a(\mathbf{v}^{j+1/2},\mathbf{v})+c(\mathbf{u}^{j+1/2}+\tfrac{1}{2}[\Delta t]^2(\beta-\tfrac{1}{4})\dot{\mathbf{v}}^{j+1/2},\mathbf{v})\\ \qquad\qquad -b(\theta^{j+1/2},\mathbf{v})=<l_{j+1/2},\mathbf{v}>\qquad\forall\mathbf{v}\in\mathbf{V},\\ s(\dot{\theta}^{j+1/2},g)+k(\theta^{j+1/2},g)+b(g,\mathbf{v}^{j+1/2})=<\mu_{j+1/2},g>\qquad\forall g\in G.\end{array}\right.\tag{8.2}$$

Приймемо $\mathbf{v}=\mathbf{v}^{j+1/2}$, $g=\theta^{j+1/2}$ та додамо їх, у підсумку одержимо

$$\begin{aligned}&m(\dot{\mathbf{v}}^{j+1/2},\mathbf{v}^{j+1/2})+a(\mathbf{v}^{j+1/2},\mathbf{v}^{j+1/2})+c(\mathbf{u}^{j+1/2}+\tfrac{1}{2}[\Delta t]^2(\beta-\tfrac{1}{4})\dot{\mathbf{v}}^{j+1/2},\mathbf{v}^{j+1/2})\\&+s(\dot{\theta}^{j+1/2},\theta^{j+1/2})+k(\theta^{j+1/2},\theta^{j+1/2})=<l_{j+1/2},\mathbf{v}^{j+1/2}>+<\mu_{j+1/2},\theta^{j+1/2}>\end{aligned}$$

або, згадуючи визначення енергетичних норм,

$$\begin{aligned} & m(\dot{\mathbf{v}}^{j+1/2},\mathbf{v}^{j+1/2}) + \|\mathbf{v}^{j+1/2}\|_{\mathbf{V}}^2 + c(\mathbf{u}^{j+1/2},\mathbf{v}^{j+1/2}) + \tfrac{1}{2}[\Delta t]^2(\beta-\tfrac{1}{4})c(\dot{\mathbf{v}}^{j+1/2},\mathbf{v}^{j+1/2}) \\ & + s(\dot{\theta}^{j+1/2},\theta^{j+1/2}) + \|\theta^{j+1/2}\|_G^2 = < l_{j+1/2},\mathbf{v}^{j+1/2} > + < \mu_{j+1/2},\theta^{j+1/2} > . \end{aligned} \tag{8.3}$$

Решту доданків цього рівняння перетворимо тим самим способом, наприклад,

$$\begin{aligned} m(\dot{\mathbf{v}}^{j+1/2},\mathbf{v}^{j+1/2}) &= \tfrac{1}{2}\Delta t^{-1} m(\mathbf{v}^{j+1}-\mathbf{v}^{j},\mathbf{v}^{j+1}+\mathbf{v}^{j}) = \tfrac{1}{2}\Delta t^{-1}[m(\mathbf{v}^{j+1},\mathbf{v}^{j+1}) - m(\mathbf{v}^{j},\mathbf{v}^{j})] \\ &= \tfrac{1}{2}\Delta t^{-1}[\|\mathbf{v}^{j+1}\|_{\mathbf{H}}^2 - \|\mathbf{v}^{j}\|_{\mathbf{H}}^2]. \end{aligned} \tag{8.4}$$

Зауважимо, що з огляду на тотожність (3.11) пропозиції 3.1

$$\begin{aligned} c(\mathbf{u}^{j+1/2},\mathbf{v}^{j+1/2}) &= c(\tfrac{1}{2}(\mathbf{u}^{j+1}+\mathbf{u}^{j}) - \tfrac{1}{8}\Delta t^2\dot{\mathbf{v}}^{j+1/2},\mathbf{v}^{j+1/2}) = \\ &= c(\tfrac{1}{2}(\mathbf{u}^{j+1}+\mathbf{u}^{j}) - \tfrac{1}{8}\Delta t^2\dot{\mathbf{v}}^{j+1/2},\dot{\mathbf{u}}^{j+1/2}) = \\ &= \tfrac{1}{2}\Delta t^{-1}[|\mathbf{u}^{j+1}|_{\mathbf{V}}^2 - \|\mathbf{u}^{j}|_{\mathbf{V}}^2] - \tfrac{1}{16}\Delta t[|\mathbf{v}^{j+1}|_{\mathbf{V}}^2 - |\mathbf{v}^{j}|_{\mathbf{V}}^2]. \end{aligned} \tag{8.5}$$

Зібравши тотожності вигляду (8.4) та (8.5) у (8.3), одержимо

$$\begin{aligned} & \tfrac{1}{2}\Delta t^{-1}[\|\mathbf{v}^{j+1}\|_{\mathbf{H}}^2 - \|\mathbf{v}^{j}\|_{\mathbf{H}}^2] + \|\mathbf{v}^{j+1/2}\|_{\mathbf{V}}^2 \\ & + \tfrac{1}{2}\Delta t^{-1}[|\mathbf{u}^{j+1}|_{\mathbf{V}}^2 - |\mathbf{u}^{j}|_{\mathbf{V}}^2] + \tfrac{1}{4}\Delta t(\beta-\tfrac{1}{2})[|\mathbf{v}^{j+1}|_{\mathbf{V}}^2 - |\mathbf{v}^{j}|_{\mathbf{V}}^2] \\ & + \tfrac{1}{2}\Delta t^{-1}[\|\theta^{j+1}\|_H^2 - \|\theta^{j}\|_H^2] + \|\theta^{j+1/2}\|_G^2 = < l_{j+1/2},\mathbf{v}^{j+1/2} > + < \mu_{j+1/2},\theta^{j+1/2} > . \end{aligned} \tag{8.6}$$

Нарешті, додавши тотожності (8.6) з індексами $j = 0,1,\dots,n$, після очевидних спрощень приходимо до такого виразу:

$$\begin{aligned} & \tfrac{1}{2}[\|\mathbf{v}^{n+1}\|_{\mathbf{H}}^2 + |\mathbf{u}^{n+1}|_{\mathbf{V}}^2 + \|\theta^{n+1}\|_H^2] + \\ & \qquad + \Delta t\sum_{j=0}^{n}[\|\mathbf{v}^{j+1/2}\|_{\mathbf{V}}^2 + \|\theta^{j+1/2}\|_G^2] + \tfrac{1}{4}\Delta t^2(\beta-\tfrac{1}{2})|\mathbf{v}^{n+1}|_{\mathbf{V}}^2 \\ & = \tfrac{1}{2}[\|\mathbf{v}^{0}\|_{\mathbf{H}}^2 + |\mathbf{u}^{0}|_{\mathbf{V}}^2 + \|\theta^{0}\|_H^2] + \tfrac{1}{4}\Delta t^2(\beta-\tfrac{1}{2})|\mathbf{v}^{0}|_{\mathbf{V}}^2 \\ & \qquad + \Delta t\sum_{j=0}^{n}[< l_{j+1/2},\mathbf{v}^{j+1/2} > + < \mu_{j+1/2},\theta^{j+1/2} >] \quad n = 0,1,\ \dots\ . \end{aligned} \tag{8.7}$$

Враховуючи початкові умови задачі, знайдемо тотожність, задекларовану в (8.1).

9. АНАЛІЗ СТІЙКОСТІ ОДНОКРОКОВОЇ РЕКУРЕНТНОЇ СХЕМИ

Порівнюючи рівняння балансу енергії дискретизованої задачі (8.7) та цього ж рівняння неперервної задачі (див. (2.11)), зазначимо, що вжита нами дискретизація в часі задачі акустики вносить збурення з доданками, які пропорційні значенням множника $(\beta-\tfrac{1}{2})$. Згадані доданки з $\beta < \tfrac{1}{2}$ мають нефізичний зміст. Отже, на перший погляд допустимими значеннями параметрів однокрокової рекурентної схеми (5.4) є такі, що задовольняють умови

$$\gamma = \tfrac{1}{2}, \quad \tfrac{1}{2} \le \beta \le 1. \tag{9.1}$$

Це вступне зауваження засвідчує, що конструювання схем дискретизації задач за часовою змінною є нетривіальною задачею і потребує ґрунтовного аналізу передусім стійкості таких схем.

9.1. *АПРІОРНІ ОЦІНКИ*

З огляду на обмеженість лінійних функціоналів l і μ скористаємося оцінками вигляду

$$|< l_{j+1/2},\mathbf{v}^{j+1/2} >| \le \tfrac{1}{2}\|\mathbf{v}^{j+1/2}\|_{\mathbf{V}}^2 + \tfrac{1}{2}C\|l_{j+1/2}\|_{\mathbf{V}'}^2, \quad C = const > 0$$

та

$$|<\mu_{j+1/2},\theta^{j+1/2}>|\le \tfrac{1}{2}\|\theta^{j+1/2}\|_G^2+\tfrac{1}{2}C\|\mu_{j+1/2}\|_{G'}^2,$$

де $\mathbf{V}'$ та G' – простори, спряжені до $\mathbf{V}$ та G, відповідно. Тут і далі тим самим символом C ми позначаємо різні додатні сталі, значення яких не залежать від величин, які нас цікавлять.

Підставимо наведені оцінки до енергетичного рівняння (8.1) та після приведення подібних отримаємо нерівності вигляду

$$\begin{aligned}
&\tfrac{1}{2}[\|\boldsymbol{\upsilon}^{n+1}\|_{\mathbf{H}}^2+|\mathbf{u}^{n+1}|_{\mathbf{V}}^2+\|\theta^{n+1}\|_H^2]+\\
&\quad+\tfrac{1}{2}\Delta t\sum_{j=0}^{n}[\|\boldsymbol{\upsilon}^{j+1/2}\|_{\mathbf{V}}^2+\|\theta^{j+1/2}\|_G^2]+\tfrac{1}{4}\Delta t^2(\beta-\tfrac{1}{2})|\boldsymbol{\upsilon}^{n+1}|_{\mathbf{V}}^2\\
&\le \tfrac{1}{2}[\|\boldsymbol{\upsilon}_0\|_{\mathbf{H}}^2+|\mathbf{u}_0|_{\mathbf{V}}^2+\|\theta_0\|_H^2]+\tfrac{1}{4}\Delta t^2(\beta-\tfrac{1}{2})|\boldsymbol{\upsilon}_0|_{\mathbf{V}}^2\\
&\quad+\tfrac{1}{2}\Delta t\,C\sum_{j=0}^{n}[\|l_{j+1/2}\|_{\mathbf{V}'}^2+\|\mu_{j+1/2}\|_{G'}^2]\qquad n=0,1,\dots N-1.
\end{aligned}\tag{9.2}$$

Оскільки праві частини нерівностей (9.2) залежать лише від даних варіаційної задачі акустики, то звідси робимо висновок про те, що буде правильною теорема.

Теорема 9.1 про достатню умову стійкості однокрокової рекурентної схеми.

Нехай апроксимацію $\left\{\mathbf{u}^{\Delta t}(t),\theta^{\Delta t}(t)\right\}\in\mathbf{V}\times G$ *розв'язку варіаційної задачі* (2.2) *описують частинами визначені поліноми вигляду* (3.12) і (3.7), *коефіцієнти яких обчислюють однокроковою рекурентною схемою* (5.4) *зі значеннями параметрів* γ *та* β*, що задовольняють умови*

$$\gamma=\tfrac{1}{2},\quad \tfrac{1}{2}\le\beta\le 1.\tag{9.3}$$

Тоді однокрокова рекурентна схема (5.4) *є безумовно стійкою стосовно вибору довжини кроку інтегрування і для знайдених наближень* $\{\mathbf{u}^{n+1},\boldsymbol{\upsilon}^{n+1},\theta^{n+1}\}\in\mathbf{V}\times\mathbf{V}\times G$ *будуть правильними такі апріорні оцінки:*

$$\begin{aligned}
&\tfrac{1}{2}[\|\boldsymbol{\upsilon}^{n+1}\|_{\mathbf{H}}^2+|\mathbf{u}^{n+1}|_{\mathbf{V}}^2+\|\theta^{n+1}\|_H^2]+\\
&\quad+\tfrac{1}{2}\Delta t\sum_{j=0}^{n}[\|\boldsymbol{\upsilon}^{j+1/2}\|_{\mathbf{V}}^2+\|\theta^{j+1/2}\|_G^2]+\tfrac{1}{4}\Delta t^2(\beta-\tfrac{1}{2})|\boldsymbol{\upsilon}^{n+1}|_{\mathbf{V}}^2\\
&\le \tfrac{1}{2}[\|\boldsymbol{\upsilon}_0\|_{\mathbf{H}}^2+|\mathbf{u}_0|_{\mathbf{V}}^2+\|\theta_0\|_H^2]+\tfrac{1}{2}\Delta t\,C\sum_{j=0}^{n}[\|l_{j+1/2}\|_{\mathbf{V}'}^2+\|\mu_{j+1/2}\|_{G'}^2]+\\
&\quad+\tfrac{1}{4}\Delta t^2(\beta-\tfrac{1}{2})|\boldsymbol{\upsilon}_0|_{\mathbf{V}}^2\qquad n=0,1,\dots\ N-1.
\end{aligned}\tag{9.4}$$

Зауваження 9.1. Якщо $\gamma=\tfrac{1}{2}$ і $0\le\beta<\tfrac{1}{2}$, то доданки з множником $(\beta-\tfrac{1}{2})$ в (9.4) є величинами порядку $O(\Delta t^2)$, тому за достатньо малих значень Δt схема (5.4) може залишатися стійкою.

10. АПОСТЕРІОРНІ ОЦІНКИ ПОХИБОК АПРОКСИМАЦІЇ В ЧАСІ

10.1. *ВАРІАЦІЙНА ЗАДАЧА ПРО ПОХИБКУ АПРОКСИМАЦІЇ В ЧАСІ*

З огляду на декомпозицію розв'язку $\boldsymbol{\psi}(t)=\{\mathbf{u}(t),\theta(t)\}$ вигляду

$$\begin{cases}\mathbf{u}(t)=\mathbf{u}^{\Delta t}(t)+\mathbf{e}(t)=\mathbf{u}^j+\Delta t\omega_j(t)\boldsymbol{\upsilon}^j+\tfrac{1}{2}[\Delta t\omega_j(t)]^2\dot{\boldsymbol{\upsilon}}^{j+1/2}+\mathbf{e}(t),\\ \theta(t)=\theta^{\Delta t}(t_j)+\varepsilon(t)=\theta^j+\Delta t\omega_j(t)\dot{\theta}^{j+1/2}+\varepsilon(t)\qquad \forall t\in[t_j,t_{j+1}]\end{cases}\tag{10.1}$$

та його похідні за змінною часу

$$\begin{cases} \mathbf{u}'(t) = [\mathbf{u}^{\Delta t}(t) + \mathbf{e}(t)]' = \boldsymbol{\upsilon}^j + [\Delta t \omega_j(t)] \dot{\boldsymbol{\upsilon}}^{j+1/2} + \mathbf{e}'(t), \\ \mathbf{u}''(t) = [\mathbf{u}^{\Delta t}(t) + \mathbf{e}(t)]'' = \dot{\boldsymbol{\upsilon}}^{j+1/2} + \mathbf{e}''(t) \\ \theta'(t) = [\theta^{\Delta t}(t_j) + \varepsilon(t)]' = \dot{\theta}^{j+1/2} + \varepsilon'(t) \qquad \forall t \in [t_j, t_{j+1}] \quad j = 0, 1, \ldots \end{cases} \tag{10.2}$$

після невеликої алгебри варіаційну задачу акустики (2.2) переформулюємо у задачу про похибку апроксимації її розв'язку

$$\begin{cases} m(\mathbf{e}''(t), \mathbf{v}) + a(\mathbf{e}'(t), \mathbf{v}) + c(\mathbf{e}(t), \mathbf{v}) - b(\varepsilon(t), \mathbf{v}) \\ = < l(t), \mathbf{v} > - [m(\dot{\boldsymbol{\upsilon}}^{j+1/2}, \mathbf{v}) + a(\boldsymbol{\upsilon}^j + [\Delta t \omega_j(t)] \dot{\boldsymbol{\upsilon}}^{j+1/2}, \mathbf{v}) \\ \qquad + c(\mathbf{u}^j + \Delta t \omega_j(t) \boldsymbol{\upsilon}^j + \tfrac{1}{2} [\Delta t \omega_j(t)]^2 \dot{\boldsymbol{\upsilon}}^{j+1/2}, \mathbf{v}) - b(\theta^j + \Delta t \omega_j(t) \dot{\theta}^{j+1/2}, \mathbf{v})], \\ s(\varepsilon'(t), g) + k(\varepsilon(t), g) + b(g, \mathbf{e}'(t)) \\ = < \mu(t), g > - [s(\dot{\theta}^{j+1/2}, g) + k(\theta^j + \Delta t \omega_j(t) \dot{\theta}^{j+1/2}, g) \\ \qquad + b(g, \boldsymbol{\upsilon}^j + [\Delta t \omega_j(t)] \dot{\boldsymbol{\upsilon}}^{j+1/2})] \qquad \forall t \in [t_j, t_{j+1}], \ j = 0, \ldots, \\ \quad m(\mathbf{e}'(0), \mathbf{v}) = 0, \quad c(\mathbf{e}(0), \mathbf{v}) = 0 \qquad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{V}, \\ \qquad s(\varepsilon(0), g) = 0 \qquad \forall g \in G. \end{cases} \tag{10.3}$$

Пропозиція 10.1 стосовно задачі про похибку апроксимації в часі.

Нехай виконано умови теореми 4.1.

Тоді похибка апроксимації зміщення та температури

$$\mathbf{E}(t) := \{\mathbf{e}(t), \varepsilon(t)\} \equiv \{\mathbf{u}(t) - \mathbf{u}^{\Delta t}(t), \theta(t) - \theta^{\Delta t}(t)\} \in \mathbf{V} \times G \tag{10.4}$$

є розв'язком такої варіаційної задачі

$$\begin{cases} \text{задано } \left\{\mathbf{e}(t_j), \mathbf{e}'(t_j), \varepsilon(t_j)\right\} \in \mathbf{V} \times \mathbf{V} \times G \ \text{ та } \ \Delta t > 0, \quad \gamma, \beta \in [0,1]; \\ \text{знайти } \left\{\mathbf{e}(t), \varepsilon(t)\right\} \in \mathbf{V} \times G \ \text{ такі, що} \\ m(\mathbf{e}''(t), \mathbf{v}) + a(\mathbf{e}'(t), \mathbf{v}) + c(\mathbf{e}(t), \mathbf{v}) - b(\varepsilon(t), \mathbf{v}) = < l(t) - l_{j+\gamma}, \mathbf{v} > \\ \quad - \Delta t [\omega_j(t) - \gamma][a(\dot{\boldsymbol{\upsilon}}^{j+1/2}, \mathbf{v}) + c(\boldsymbol{\upsilon}^j, \mathbf{v}) - b(\dot{\theta}^{j+1/2}, \mathbf{v})] \\ \qquad - \tfrac{1}{2} \Delta t^2 [\omega_j^2(t) - \beta] \, c(\dot{\boldsymbol{\upsilon}}^{j+1/2}, \mathbf{v}) \qquad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{V}, \\ s(\varepsilon'(t), g) + k(\varepsilon(t), g) + b(g, \mathbf{e}'(t)) = < \mu(t) - \mu_{j+\gamma}, g > \\ \quad - \Delta t [\omega_j(t) - \gamma][k(\dot{\theta}^{j+1/2}, g) + b(g, \dot{\boldsymbol{\upsilon}}^{j+1/2})] \quad \forall g \in G \quad \forall t \in [t_j, t_{j+1}] \quad j = 0, 1, \ldots. \end{cases} \tag{10.5}$$

Доведення. З огляду на систему рівнянь (4.3) дискретизованої задачі проаналізуємо джерела можливих похибок спочатку рівняння руху, а пізніше теплопровідності. Для наочності спочатку випишемо в квадратних дужках доданки, які трапляються у відповідних рівняннях із (4.3).

Отже, з огляду на перше з рівнянь (4.3)

$$\begin{aligned} & m(\mathbf{e}''(t), \mathbf{v}) + a(\mathbf{e}'(t), \mathbf{v}) + c(\mathbf{e}(t), \mathbf{v}) - b(\varepsilon(t), \mathbf{v}) \\ & = [< l_{j+\gamma}, \mathbf{v} > - m(\dot{\boldsymbol{\upsilon}}^{j+1/2}, \mathbf{v}) - a(\boldsymbol{\upsilon}^j + \Delta t \gamma \dot{\boldsymbol{\upsilon}}^{j+1/2}, \mathbf{v}) - c(\mathbf{u}^j + \Delta t \gamma \boldsymbol{\upsilon}^j + \tfrac{1}{2} \Delta t^2 \beta \dot{\boldsymbol{\upsilon}}^{j+1/2}, \mathbf{v}) + \\ & + b(\theta^j + \Delta t \gamma \dot{\theta}^{j+1/2}, \mathbf{v})] + < l(t), \mathbf{v} > - < l_{j+\gamma}, \mathbf{v} > - a(\Delta t [\omega_j(t) - \gamma] \dot{\boldsymbol{\upsilon}}^{j+1/2}, \mathbf{v}) \\ & - c(\Delta t [\omega_j(t) - \gamma] \boldsymbol{\upsilon}^j + \tfrac{1}{2} \Delta t^2 [\omega_j(t)^2 - \beta] \, \dot{\boldsymbol{\upsilon}}^{j+1/2}, \mathbf{v}) + b(\Delta t [\omega_j(t) - \gamma] \dot{\theta}^{j+1/2}, \mathbf{v}) \\ & = < l(t) - l_{j+\gamma}, \mathbf{v} > - \Delta t [\omega_j(t) - \gamma][a(\dot{\boldsymbol{\upsilon}}^{j+1/2}, \mathbf{v}) + c(\boldsymbol{\upsilon}^j, \mathbf{v}) - b(\dot{\theta}^{j+1/2}, \mathbf{v})] - \\ & - \tfrac{1}{2} \Delta t^2 [\omega_j^2(t) - \beta] \, c(\dot{\boldsymbol{\upsilon}}^{j+1/2}, \mathbf{v}). \end{aligned}$$

Подібно

$$
\begin{aligned}
& s(\varepsilon'(t),g)+k(\varepsilon(t)\ ,g)+b(g,\mathbf{e}'(t)) \\
& =[<\mu_{j+\gamma},g>-s(\dot\theta^{j+1/2},g)-k(\theta^j+\Delta t\gamma\dot\theta^{j+1/2},g)-b(g,\mathbf{v}^j+\Delta t\gamma\dot{\mathbf{v}}^{j+1/2})] \\
& +<\mu(t),g>-<\mu_{j+\gamma},g>-k(\Delta t[\omega_j(t)-\gamma]\dot\theta^{j+1/2},g)-b(g,\Delta t[\omega_j(t)-\gamma]\dot{\mathbf{v}}^{j+1/2}) \\
& =<\mu(t)-\mu_{j+\gamma},g>-\Delta t[\omega_j(t)-\gamma][k(\dot\theta^{j+1/2},g)+b(g,\dot{\mathbf{v}}^{j+1/2})].
\end{aligned}
$$

Отож, після скорочення подібних отримаємо рівняння для обчислення похибок апроксимації в часі (10.5).

Зауваження 10.1. Праві частини рівнянь (10.5) явно засвідчують, що джерелами похибок однокрокової схеми інтегрування в часі є похибки апроксимації функціоналів правих частин варіаційних рівнянь задачі (2.2) та деякі характеристики швидкості змін її апроксимацій і пришвидшення з множниками $w(t):=\Delta t[\omega_j(t)-\gamma]$ та $z(t):=\frac{1}{2}\Delta t^2[\omega_j(t)^2-\beta]$, відповідно.

10.2. *РІВНЯННЯ БАЛАНСУ ЗАДАЧІ ПРО ПОХИБКУ АПРОКСИМАЦІЇ В ЧАСІ*

Підставимо до рівнянь задачі (10.5) $\mathbf{v}=\mathbf{e}'(t)$ та $g=\varepsilon(t)$, додамо їх, результати проінтегруємо на проміжку $[t_j,t_{j+1}]$, тоді одержимо рівняння балансу такого вигляду:

$$
\begin{aligned}
& \tfrac{1}{2}[\|\mathbf{e}'(t_{j+1})\|^2_{\mathbf{H}}+|\mathbf{e}(t_{j+1})|^2_{\mathbf{V}}+\|\varepsilon(t_{j+1})\|^2_H]+\int_{t_j}^{t_{j+1}}[\|\mathbf{e}'(\tau)\|^2_{\mathbf{V}}+\|\varepsilon(\tau)\|^2_G]d\tau= \\
& =\tfrac{1}{2}[\|\mathbf{e}'(t_j)\|^2_{\mathbf{H}}+|\mathbf{e}(t_j)|^2_{\mathbf{V}}+\|\varepsilon(t_j)\|^2_H]+ \\
& +\int_{t_j}^{t_{j+1}}[<l(\tau)-l_{j+\gamma},\mathbf{e}'(\tau)>+<\mu(\tau)-\mu_{j+\gamma},g>]d\tau- \\
& -\left\{\int_{t_j}^{t_{j+1}}w(\tau)\Big[a(\dot{\mathbf{v}}^{j+1/2},\mathbf{e}'(\tau))+c(\mathbf{v}^j,\mathbf{e}'(\tau))-b(\dot\theta^{j+1/2},\mathbf{e}'(\tau))\Big]d\tau\right\}- \\
& -\int_{t_j}^{t_{j+1}}z(\tau)c(\dot{\mathbf{v}}^{j+1/2},\mathbf{e}'(\tau))d\tau- \\
& -\left\{\int_{t_j}^{t_{j+1}}w(\tau)[k(\dot\theta^{j+1/2},\varepsilon(\tau))+b(\varepsilon(\tau),\dot{\mathbf{v}}^{j+1/2})]d\tau\right\} \qquad j=0,1,\ldots,
\end{aligned}
\tag{10.6}
$$

де

$$
w(\tau):=\Delta t[\omega_j(\tau)-\gamma], \qquad z(\tau):=\tfrac{1}{2}\Delta t^2[\omega_j(\tau)^2-\beta].
$$

З огляду на наявність у рівності (10.6) дисипативних складових похибки

$$
\int_{t_j}^{t_{j+1}}[\|\mathbf{e}'(\tau)\|^2_{\mathbf{V}}+\|\varepsilon(\tau)\|^2_G]d\tau
$$

зробимо оцінки її правої частини з використанням нерівності Коші-Буняковського-Шварца та елементарної нерівності такого вигляду:

$$
|ab|=|(\sqrt{2\lambda}a)(\frac{1}{\sqrt{2\lambda}}b)|\le\lambda a^2+\frac{1}{4\lambda}b^2 \quad \forall\lambda>0 \qquad \forall a,b\in R .
$$

Отже, наприклад,

$$
\begin{aligned}
\int_{t_j}^{t_{j+1}}<l(\tau)-l_{j+\gamma},\mathbf{e}'(\tau)>d\tau &\le C\int_{t_j}^{t_{j+1}}\|l(\tau)-l_{j+\gamma}\|_*\|\mathbf{e}'(\tau)\|_{\mathbf{V}}\ d\tau \\
&\le\lambda C^2\int_{t_j}^{t_{j+1}}\|l(\tau)-l_{j+\gamma}\|^2_*\ d\tau+\frac{1}{4\lambda}\int_{t_j}^{t_{j+1}}\|\mathbf{e}'(\tau)\|^2_{\mathbf{V}}\ d\tau.
\end{aligned}
\tag{10.7}
$$

Тут і далі тим самим символом C позначаємо додатні сталі, які в різних місцях можуть набувати різних значень, що не залежать від величин, які нас цікавлять.

Громіздкіших обчислень потребує доданок правої частини (10.6) з множником $w(\tau) := \Delta t[\omega_j(\tau) - \gamma]$

$$\begin{aligned}
&\int_{t_j}^{t_{j+1}} w(\tau)[a(\dot{\mathbf{v}}^{j+1/2}, \mathbf{e}'(\tau)) + c(\mathbf{v}^j, \mathbf{e}'(\tau)) - b(\dot{\theta}^{j+1/2}, \mathbf{e}'(\tau))]d\tau \\
&\le C\int_{t_j}^{t_{j+1}} | w(\tau) | \Big[\| \dot{\mathbf{v}}^{j+1/2} \|_V + \| \mathbf{v}^j \|_V + \| \dot{\theta}^{j+1/2} \|_G \Big] \| \mathbf{e}'(\tau) \|_V \, d\tau \\
&\le C^2\lambda \Big[\| \dot{\mathbf{v}}^{j+1/2} \|_V + \| \mathbf{v}^j \|_V + \| \dot{\theta}^{j+1/2} \|_G \Big]^2 \int_{t_j}^{t_{j+1}} w^2(\tau) d\tau + \\
&\qquad + \frac{1}{4\lambda}\int_{t_j}^{t_{j+1}} \| \mathbf{e}'(\tau) \|_V^2 \, d\tau \\
&= \Delta t^3[(\gamma - \tfrac{1}{2})^2 + \tfrac{1}{12}] C^2\lambda \Big[\| \dot{\mathbf{v}}^{j+1/2} \|_V + \| \mathbf{v}^j \|_V + \| \dot{\theta}^{j+1/2} \|_G \Big]^2 + \\
&\qquad + \frac{1}{4\lambda}\int_{t_j}^{t_{j+1}} \| \mathbf{e}'(\tau) \|_V^2 \, d\tau \quad \forall \lambda > 0.
\end{aligned} \tag{10.8}$$

У цьому ж стилі зробимо оцінку доданку з множником

$$z(\tau) := \frac{1}{2}\Delta t^2[\omega_j^2(\tau) - \beta]$$

$$\begin{aligned}
&\int_{t_j}^{t_{j+1}} z(\tau) c(\dot{\mathbf{v}}^{j+1/2}, \mathbf{e}'(\tau)) d\tau \le \int_{t_j}^{t_{j+1}} | z(\tau) \| c(\dot{\mathbf{v}}^{j+1/2}, \mathbf{e}'(\tau)) | \, d\tau \\
&\le \int_{t_j}^{t_{j+1}} \left[C^2\lambda |z(\tau)|^2 \| \dot{\mathbf{v}}^{j+1/2} \|_V^2 + \frac{1}{4\lambda} \| \mathbf{e}'(\tau) \|_V^2 \right] d\tau \\
&= \frac{1}{4}\Delta t^5 \Big[(\beta - \tfrac{1}{3})^2 + \tfrac{4}{45} \Big] C^2\lambda \| \dot{\mathbf{v}}^{j+1/2} \|_V^2 + \\
&+ \frac{1}{4\lambda}\int_{t_j}^{t_{j+1}} \| \mathbf{e}'(\tau) \|_V^2 \, d\tau \quad \forall \lambda > 0.
\end{aligned} \tag{10.9}$$

Застосовуючи ту саму техніку, знайдемо, що

$$\begin{aligned}
&\int_{t_j}^{t_{j+1}} w(\tau)[k(\dot{\theta}^{j+1/2}, \varepsilon(\tau)) + b(\varepsilon(\tau), \dot{\mathbf{v}}^{j+1/2})] d\tau \le \\
&\le \alpha\Delta t^3[(\gamma - \tfrac{1}{2})^2 + \tfrac{1}{12}] C \Big[\| \dot{\theta}^{j+1/2} \|_G^2 + \| \dot{\mathbf{v}}^{j+1/2} \|_V^2 \Big] + \\
&+ \frac{1}{4\alpha}\int_{t_j}^{t_{j+1}} \| \varepsilon(\tau) \|_G^2 \, d\tau \quad \forall \alpha > 0
\end{aligned} \tag{10.10}$$

та

$$\begin{aligned}
&\int_{t_j}^{t_{j+1}} < \mu(\tau) - \mu_{j+\gamma}, \varepsilon(\tau) > d\tau \le \\
&\le \alpha C^2 \int_{t_j}^{t_{j+1}} \| \mu(\tau) - \mu_{j+\gamma} \|_*^2 \, d\tau + \\
&+ \frac{1}{4\alpha}\int_{t_j}^{t_{j+1}} \| \varepsilon(\tau) \|_G^2 \, d\tau \qquad \forall \alpha > 0.
\end{aligned} \tag{10.11}$$

Отже, збираючи (10.7)-(10.11) в рівнянні (10.6), приходимо до оцінки енергетичних норм похибок апроксимації на кожному кроці інтегрування в часі такого ґатунку:

$$\begin{aligned}
&\tfrac{1}{2}[\|\mathbf{e}'(t_{j+1})\|_{\mathbf{H}}^2+|\mathbf{e}(t_{j+1})|_{\mathbf{V}}^2+\|\varepsilon(t_{j+1})\|_H^2]+\int_{t_j}^{t_{j+1}}[\|\mathbf{e}'(\tau)\|_{\mathbf{V}}^2+\|\varepsilon(\tau)\|_G^2]d\tau\\
&\le \tfrac{1}{2}[\|\mathbf{e}'(t_j)\|_{\mathbf{H}}^2+|\mathbf{e}(t_j)|_{\mathbf{V}}^2+\|\varepsilon(t_j)\|_H^2]+\frac{3}{4\lambda}\int_{t_j}^{t_{j+1}}\|\mathbf{e}'(\tau)\|_{\mathbf{V}}^2\,d\tau+\frac{1}{2\alpha}\int_{t_j}^{t_{j+1}}\|\varepsilon(\tau)\|_G^2\,d\tau\\
&+C\int_{t_j}^{t_{j+1}}\Big[\lambda\,\|l(\tau)-l_{j+\gamma}\|_*^2+\alpha\,\|\mu(\tau)-\mu_{j+\gamma}\|_*^2\Big]d\tau\\
&+\Delta t^3C(\alpha+\lambda)\Big[\|\dot{\mathbf{\upsilon}}^{j+1/2}\|_{\mathbf{V}}^2+\|\mathbf{\upsilon}^j\|_{\mathbf{V}}^2+\|\dot\theta^{j+1/2}\|_G^2\Big]\qquad \forall\lambda,\alpha>0.
\end{aligned}\tag{10.12}$$

Вибравши тепер $\lambda=3/2,\alpha=1$ і звівши подібні, надамо енергетичній нерівності остаточного вигляду

$$\begin{aligned}
&\tfrac{1}{2}[\|\mathbf{e}'(t_{j+1})\|_{\mathbf{H}}^2+\|\mathbf{e}(t_{j+1})\|_V^2+\|\varepsilon(t_{j+1})\|_H^2]+\\
&\quad+\frac{1}{2}\int_{t_j}^{t_{j+1}}[|\mathbf{e}'(\tau)|_V^2+|\varepsilon(\tau)\|_G^2]d\tau\\
&\le\frac{1}{2}[\|\mathbf{e}'(t_j)\|_{\mathbf{H}}^2+\|\mathbf{e}(t_j)\|_V^2+\|\varepsilon(t_j)\|_H^2]+\\
&\quad+C\int_{t_j}^{t_{j+1}}[\|l(\tau)-l_{j+\gamma}\|_*^2+\|\mu(\tau)-\mu_{j+\gamma}\|_*^2]d\tau\\
&\quad+\Delta t^2C\Big[|\mathbf{\upsilon}^j|_V^2+|\dot{\mathbf{\upsilon}}^{j+1/2}|_V^2+\|\dot\theta^{j+1/2}\|_G^2\Big]\qquad j=0,1,\dots\,.
\end{aligned}\tag{10.13}$$

Нарешті, додамо почленно перші з цього списку нерівності з номерами $j=0,1,\dots,n$; результати підсумовування набудуть такого вигляду:

$$\begin{aligned}
&\tfrac{1}{2}[\|\mathbf{e}'(t_{n+1})\|_{\mathbf{H}}^2+|\mathbf{e}(t_{n+1})|_{\mathbf{V}}^2+\|\varepsilon(t_{n+1})\|_H^2]+\tfrac{1}{2}\sum_{j=0}^{n}\int_{t_j}^{t_{j+1}}[\|\mathbf{e}'(\tau)\|_{\mathbf{V}}^2+|\varepsilon(\tau)\|_G^2]d\tau\\
&\le C\Bigg\{\sum_{j=0}^{n}\int_{t_j}^{t_{j+1}}[\|l(\tau)-l_{j+\gamma}\|_*^2+\|\mu(\tau)-\mu_{j+\gamma}\|_*^2]d\tau\\
&\quad+\Delta t^3\sum_{j=0}^{N}\Big[\|\mathbf{\upsilon}^j\|_{\mathbf{V}}^2+\|\dot{\mathbf{\upsilon}}^{j+1/2}\|_{\mathbf{V}}^2+\|\dot\theta^{j+1/2}\|_G^2\Big]\Bigg\}\qquad n=0,1,\dots,N-1.
\end{aligned}\tag{10.14}$$

Теорема 10.1 стосовно апроксимативності однокрокової рекурентної схеми.

Нехай апроксимацію $\{\mathbf{u}^{\Delta t}(t),\theta^{\Delta t}(t)\}\in\mathbf{V}\times G$ *розв'язку* s *варіаційної задачі дисипативної акустики* (2.2) *описують частинами визначені поліноми вигляду*

$$\begin{cases}\mathbf{u}^{\Delta t}(t)=\mathbf{u}^j+\Delta t\omega_j(t)\mathbf{\upsilon}^j+\tfrac{1}{2}[\Delta t\omega_j(t)]^2\,\dot{\mathbf{\upsilon}}^{j+1/2},\\ \theta^{\Delta t}(t)=\theta^j+\Delta t\omega_j(t)\dot\theta^{j+1/2}\quad \forall t\in[t_j,t_{j+1}]\quad j=0,1\ \dots\ N-1,\end{cases}\tag{10.15}$$

коефіцієнти яких обчислюють однокроковою рекурентною схемою (5.4). *На додаток до цього припустимо, що послідовності частинами визначених наближень* $\{l_{j+\gamma}\}_{j\ge0}\subset\mathbf{V}'$ *та* $\{\mu_{j+\gamma}\}_{j\ge0}\subset G'$ *апроксимують функціонали даних варіаційних рівнянь* $l(t)\in\mathbf{V}'$ *та* $\mu(t)\in G'$ *в тому сенсі, що знайдуться такі сталі* $C>0$ *та* $p\ge1$ *такі, що допускають оцінку*

$$\int_{t_j}^{t_{j+1}}[\|l(\tau)-l_{j+\gamma}\|_*^2+\|\mu(\tau)-\mu_{j+\gamma}\|_*^2]d\tau\le C\Delta t^{2p+1}\quad j=0,1,\ \dots\,.\tag{10.16}$$

Тоді однокрокова рекурентна схема (5.4) *апроксимує варіаційну задачу* (2.2) *і для похибок апроксимації зміщення та температури*

$$\mathbf{E}(t) := \{\mathbf{e}(t), \varepsilon(t)\} = \{\mathbf{u}(t) - \mathbf{u}^{\Delta t}(t), \theta(t) - \theta^{\Delta t}(t)\} \in \mathbf{V} \times G$$

будуть правильними такі апостеріорні оцінки:

$$\begin{aligned} &\tfrac{1}{2}[\| \mathbf{e}'(t_{n+1}) \|_{\mathbf{H}}^2 + | \mathbf{e}(t_{n+1}) |_{\mathbf{V}}^2 + \| \varepsilon(t_{n+1}) \|_H^2] + \tfrac{1}{2}\sum_{j=0}^{n} \int_{t_j}^{t_{j+1}} [\| \mathbf{e}'(\tau) \|_{\mathbf{V}}^2 + | \varepsilon(\tau) \|_G^2] d\tau \\ &\le CT\left\{\Delta t^{2p} + \Delta t^2 \max_{j=0,\dots,n} \left[\| \boldsymbol{\upsilon}^j \|_{\mathbf{V}}^2 + \| \dot{\boldsymbol{\upsilon}}^{j+1/2} \|_{\mathbf{V}}^2 + \| \dot{\theta}^{j+1/2} \|_G^2\right]\right\} \quad n = 0,1, \dots, N-1, \end{aligned} \tag{10.17}$$

де $C = const > 0$, *значення якої не залежить від величин, що нас цікавлять.*

Доведення. Достатньо підставити (10.16) до (10.14).

11. ЗБІЖНІСТЬ ОДНОКРОКОВОЇ РЕКУРЕНТНОЇ СХЕМИ

Теорема 11.1 про збіжність однокрокової рекурентної схеми.

Нехай для кожного $N \in \mathbb{N}$ *послідовності трійок* $U_{\Delta t} = \left\{\mathbf{u}^j, \boldsymbol{\upsilon}^j, \theta^j\right\}_{j=0}^{N} \subset \mathbf{V} \times \mathbf{V} \times G,\ N\Delta t = T,$ *обчислюються однокроковою рекурентною схемою* (5.4) *зі значеннями параметрів* γ *та* β, *які задовольняють умови*

$$\gamma = \frac{1}{2}, \quad \frac{1}{2} \le \beta \le 1 \tag{11.1}$$

Тоді будуть правильними такі твердження.

1. *Обчислені таким способом послідовності* $U_{\Delta t} = \{\mathbf{u}^j, \boldsymbol{\upsilon}^j, \theta^j\}_{j=0}^N$ *є обмеженими в нормі простору* $\mathbf{V} \times \mathbf{V} \times G$ *; знайдеться* $C = const > 0$ *така, що*

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2}[\| \boldsymbol{\upsilon}^{n+1} \|_{\mathbf{H}}^2 + | \mathbf{u}^{n+1} |_{\mathbf{V}}^2 + \| \theta^{n+1} \|_H^2] + \frac{1}{2}\Delta t \sum_{j=0}^{n} [\| \boldsymbol{\upsilon}^{j+1/2} \|_{\mathbf{V}}^2 + \| \theta^{j+1/2} \|_G^2] \\ &\le \frac{1}{2}[\| \boldsymbol{\upsilon}_0 \|_{\mathbf{H}}^2 + | \mathbf{u}_0 |_{\mathbf{V}}^2 + \| \theta_0 \|_H^2] + \\ &\quad + \frac{1}{2}\Delta t\, C \sum_{j=0}^{n} [\| l_{j+1/2} \|_{\mathbf{V}'}^2 + \| \mu_{j+1/2} \|_{G'}^2] + \frac{1}{4}\Delta t^2 \, | \boldsymbol{\upsilon}_0 |_{\mathbf{V}}^2 \\ &\qquad n = 0,1, \dots N-1. \end{aligned} \tag{11.2}$$

2. *Кожна з послідовностей* $U_{\Delta t} = \{\mathbf{u}^j, \boldsymbol{\upsilon}^j, \theta^j\}_{j=0}^N$ *генерує частинами визначену вектор-функцію* $\left\{\mathbf{u}^{\Delta t}(t), \theta^{\Delta t}(t)\right\} \in C^1(0,T;\mathbf{V}) \times C^0(0,T;G)$, *кожна ланка якої набуває вигляду*

$$\begin{cases} \mathbf{u}^{\Delta t}(t) = \mathbf{u}^j + \Delta t \omega_j(t) \boldsymbol{\upsilon}^j + \tfrac{1}{2}[\Delta t \omega_j(t)]^2 \dot{\boldsymbol{\upsilon}}^{j+1/2}, \\ \theta^{\Delta t}(t) = \theta^j + \Delta t \omega_j(t) \dot{\theta}^{j+1/2} \quad \forall t \in [t_j, t_{j+1}] \quad j = 0,1 \ \dots \ N-1. \end{cases} \tag{11.3}$$

На додаток до цього, якщо послідовності $\{l_{j+1/2}\}_{j=0}^{N-1} \subset \mathbf{V}'$ *та* $\{\mu_{j+1/2}\}_{j=0}^{N-1} \subset G'$ *наближають функціонали* $l(t) \subset \mathbf{V}'$ *та* $\mu(t) \subset G'$ *варіаційної задачі* (2.2) *так, що*

$$\int_{t_j}^{t_{j+1}} [\| l(\tau) - l_{j+1/2} \|_*^2 + \| \mu(\tau) - \mu_{j+1/2} \|_*^2] d\tau \le C\Delta t^{2p+1}, \ j = 0,1, \dots N-1, \tag{11.4}$$

то знайдена пара $\left\{\mathbf{u}^{\Delta t}(t), \theta^{\Delta t}(t)\right\} \in \mathbf{V} \times G$ *апроксимує розв'язок* $\{\mathbf{u}(t), \theta(t)\} \in \mathbf{V} \times G$ *задачі* (2.2) *і її похибка*

$$\mathbf{E}(t) := \{\mathbf{e}(t), \varepsilon(t)\} = \{\mathbf{u}(t) - \mathbf{u}^{\Delta t}(t), \theta(t) - \theta^{\Delta t}(t)\} \in \mathbf{V} \times G$$

характеризується такою оцінкою:

$$\begin{aligned}&\tfrac{1}{2}[\|\mathbf{e}'(t_{n+1})\|_{\mathbf{H}}^2+|\mathbf{e}(t_{n+1})|_{\mathbf{V}}^2+\|\varepsilon(t_{n+1})\|_H^2]+\tfrac{1}{2}\int_0^{t_{n+1}}[\|\mathbf{e}'(\tau)\|_{\mathbf{V}}^2+|\varepsilon(\tau)\|_G^2]d\tau\\&\le CT\left\{\Delta t^{2p}+\Delta t^2\max_{j=0,\ldots,n}\left[\|\mathbf{v}^j\|_{\mathbf{V}}^2+\|\dot{\mathbf{v}}^{j+1/2}\|_{\mathbf{V}}^2+\|\dot\theta^{j+1/2}\|_G^2\right]\right\}\qquad n=0,1,\ldots,N-1.\end{aligned}\tag{11.5}$$

3. *Послідовність апроксимацій* $\left\{\mathbf{u}^{\Delta t}(t),\theta^{\Delta t}(t)\right\}\in\mathbf{V}\times G$ *збігається до розв'язку* $\{\mathbf{u}(t),\theta(t)\}\in\mathbf{V}\times G$ *варіаційної задачі* (2.2) разом із $\Delta t\to 0$ *і в нормі*

$$\begin{aligned}\left\|\{\mathbf{u}^{\Delta t},\theta^{\Delta t}\}\right\|^2:=[\|\mathbf{u}'(T)\|_{\mathbf{H}}^2+|\mathbf{u}(T)|_{\mathbf{V}}^2+\|\theta(T)\|_H^2]+\\+\int_0^T[\|\mathbf{u}'(\tau)\|_{\mathbf{V}}^2+|\theta(\tau)\|_G^2]d\tau\end{aligned}\tag{11.6}$$

порядок швидкості збіжності цих похибок буде не меншим від

$$q=\sqrt{\min\{1,p\}}\tag{11.7}$$

точніше,

$$\begin{aligned}&\left\|\{\mathbf{u}-\mathbf{u}^{\Delta t},\theta-\theta^{\Delta t}\}\right\|\le\\&\le\Delta t^q\left\{CT\left[\Delta t^{p-2q}+\Delta t^{2(1-q)}\max_{j=0,\ldots,n}(\|\mathbf{v}^j\|_{\mathbf{V}}^2+\|\dot{\mathbf{v}}^{j+1/2}\|_{\mathbf{V}}^2+\|\dot\theta^{j+1/2}\|_G^2)\right]\right\}^{1/2}.\end{aligned}$$

Доведення. Два перших твердження визначають стійкість та апроксимативність однокрокової рекурентної схеми (5.4) і становлять незначне переформулювання теорем 9.1 та 10.1. Третє твердження, з огляду на теорему Лакса-Філіпова (див., наприклад, [1]), є безпосереднім наслідком теорем 9.1 та 10.2.

12. ВИСНОВКИ

Ми побудували числову схему інтегрування в часі лінійної початково-крайової задачі акустики в'язкої теплопровідної рідини, яка характеризується взаємозв'язаністю фундаментальних рівнянь початково-крайової задачі (2.2) та їхнього варіаційного варіанту (3.1). Подібні моделі процесу поширення акустичних хвиль у рідині розглядали в працях [5,7], а також у статті [4], де додатково припускали безвихрову структуру поля акустичних зміщень рідини. Іншою відмінністю цитованої статті [4] є побудова та аналіз двокрокових схем інтегрування за часовою змінною, які, на противагу пропонованій нами однокроковій схемі, потребують певної апроксимації початкових умов задачі та дослідження її властивостей у просторах $H(div,\Omega)$. Побудована рекурентна схема (5.4) ґрунтується на частинами визначених поліноміальних апроксимаціях (10.5), структура яких дає змогу точно задовольняти початкові умови задачі (2.2) і змінювати величину кроку інтегрування в часі без порушення однорідності рекурентних обчислень, за деталями див. [3]. Якщо аналіз збіжності цієї схеми в цілому засновано на традиційних енергетичних міркуваннях [1-3], то її апроксимативність доведено конструюванням апостеріорних оцінок похибок, що містять показники швидкості збіжності в явному вигляді. Цей інструмент закладає основу для розробки $\Delta t-$адаптивних схем інтегрування в часі задач акустики та споріднених з ними, зокрема, задач термопружності.

Зрештою, природа варіаційної задачі (2.2) дає змогу вживати для її дискретизації за просторовими змінними класичні простори апроксимацій МСЕ, а отже, й великі можливості виконання комп'ютерних експериментів із застосуванням добре розвинутих програмних реалізацій його схем, зокрема, і $h-$адаптивних.

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. *Годунов С.К.* Разностные схемы (введение в теорию) / С.К. Годунов, В.С. Рябенький. – М.: Наука, 1977. – 440 с.
2. *Самарский А.А.* Теория разностных схем / А.А. Самарский. – М.: Наука, 1977. – 656 с.
3. *Шинкаренко Г.А.* Проекційно-сіткові методи розв'язування початково-крайових задач / Г.А. Шинкаренко. – К.: УМКВО, 1991. – 88 с.
4. *Bermudez A.* Two discretization schemes for a time-domain dissipative acoustics problem / A. Bermudez , R. Rodrigues, D. Santamarina // Math. Models and Methods Appl. Sci. – 2006. – Vol. 16, Issue 10. – 1559-1598 pp.
5. *Bruneau M.* Fundamentals of acoustics / M. Bruneau, T. Scelo. – London: ISTE Ltd, 2006. – 637 pp.
6. *Pierce A.D.* Acoustics: An Introduction to Its Physical Principles and Applications / A.D. Pierce. – New York: ASA through AIP, 1991. – 678 pp.
7. Springer Handbook of Acoustics / T.D. Rossing, ed. – New York: Springer, 2007. – 1036 pp.

Стаття: надійшла до редколегії 24.10.2011
доопрацьована 10.11.2011
прийнята до друку 24.11.2011

ПОСТРОЕНИЕ И АНАЛИЗ ОДНОШАГОВОЙ РЕКУРРЕНТНОЙ СХЕМЫ ИНТЕГРИРОВАНИЯ ВО ВРЕМЕНИ ВАРИАЦИОННОЙ ЗАДАЧИ АКУСТИКИ ВЯЗКОЙ ТЕПЛОПРОВОДНОЙ ЖИДКОСТИ

В. Горлач[*], И. Клименко[*], Г. Шинкаренко[*,]**

[*]*Львовский национальный университет имени Ивана Франко,*
ул. Университетская, 1, Львов, 79000, e-mail: kis@lnu.edu.ua
[**]*Политехника Опольская, ул. Любошицкая, 5, Ополе, 45043, Польша,*
e-mail: h.shynkarenko@po.opole.pl

Рассмотрено построение и анализ одношаговой рекуррентной схемы (ОРС) интегрирования во времени задачи акустики вязкой теплопроводной жидкости. Построение схемы выполнено на основании смешанной вариационной задачи для линеаризированной системы уравнений термогидродинамики в терминах смещение-температура и процедуры Петрова-Галеркина с кусочно-квадратичной (соотв. кусочно-линейной) аппроксимацией смещений (соотв. температуры). Показано, что решение системы вариационных уравнений ОРС эквивалентно отысканию седловой точки определенного квадратического функционала. С помощью уравнения баланса энергии дискретизированной задачи построены априорные оценки и подано достаточный критерий устойчивости ОРС. Аппроксимативность ОРС характеризировано апостериорными оценками погрешностей, которые согласно теоремы Лакса-Филлипова определяют порядки скорости ее сходимости.

Ключевые слова: термогидроакустика, начально-краевая задача, вариационная задача, одношаговая рекуррентная схема, аппроксимация, устойчивость, сходимость.

CONSTRUCTION AND ANALYSIS OF ONE-STEP RECURRENT SCHEME FOR TIME INTEGRATION OF A VARIATIONAL DISSIPATIVE ACOUSTICS PROBLEM

V. Horlatch[*], I. Klymenko[*], H. Shynkarenko[*,]**

[*]*Ivan Franko National University of Lviv,*
Universytetska str, 1, Lviv, 79000, e-mail: kis@lnu.edu.ua
[**]*Politechnika Opolska, Luboszycka, 5, Opole, 45036, Poland,*
e-mail: h.shynkarenko@po.opole.pl

This work is devoted to construction and analysis of one-step recurrent scheme (ORS) for time integration of a problem of acoustic wave propagation in a viscous heat-conducting Newtonian fluid. The scheme is based on a mixed variational problem for systems of linear thermo-hydrodynamics equations in terms of displacement and temperature and Petrov-Galerkin procedure with piecewise-quadratic approximation of displacements and piecewise-linear approximation of temperature. Taking into account computational aspects it was noted that solving the system of recurrent equations of the ORS is equivalent to finding a saddle point of a quadratic functional. To analyze the stability of the ORS the energy balance equation of discrete problem is used, and a sufficient criterion for its unconditional stability is provided. Approximability of the ORS is characterized by a posteriori error estimates, which determine the convergence orders of the proposed scheme taking into account the Lax-Fillipov theorem.

Key words: dissipative acoustics, initial-boundary problem, variational problem, one-step recurrent scheme, approximation, stability.