

ПРО ТОЧНІСТЬ АПРОКСИМАЦІЇ ФУНКЦІЇ ДВОХ ДІЙСНИХ ЗМІННИХ НЕКЛАСИЧНОЮ МАЖОРАНТОЮ НЬЮТОНА

М. Глебена*, Н. Грипинська**, Г. Цегелик***

*Ужгородський національний університет,
вул. Підгірна 46, Ужгород, 88000,

**Хмельницький національний університет,
вул. Інститутська, 11, Хмельницький, 29016,

***Львівський національний університет імені Івана Франка,
вул. Університетська, 1, Львів, 79000, e-mail: kafmmsep@franko.lviv.ua

Визначено точність наближення функції двох дійсних змінних неklasичною мажорантою Ньютона функції, заданої таблично.

Ключові слова: методи оптимізації, мажоранта та діаграма Ньютона, точність апроксимації.

1. ВСТУП

В [1,2] розроблено апарат неklasичних мажорант і діаграм Ньютона функцій двох дійсних змінних, заданих таблично. В [3] цей апарат використано для побудови формули для наближеного обчислення визначених подвійних інтегралів. В [4,5], використовуючи властивості неklasичних мажорант і діаграм Ньютона, побудовано чисельні методи відшукування абсолютного екстремуму негладких логарифмічно вигнутих функцій двох дійсних змінних. Наша мета – розглянути питання точності наближення функції двох дійсних змінних неklasичною мажорантою Ньютона.

2. ФОРМУЛЮВАННЯ ЗАДАЧІ

Нехай функція двох дійсних змінних $z = f(x, y)$ задана своїми значеннями в точках (x_i, y_j) ($i = 1, 2, \dots, n; j = 1, 2, \dots, m$)

$$f(x_i, y_j) = z_{ij} \quad (i = 1, 2, \dots, n; j = 1, 2, \dots, m),$$

де $x_1 < x_2 < \dots < x_n$, $y_1 < y_2 < \dots < y_m$, $|z_{ij}| = a_{ij} \leq M$ і $a_{11} \cdot a_{1m} \cdot a_{n1} \cdot a_{nm} \neq 0$.

В просторі x, y, z побудуємо точки зображення $P_{ij}(x_i, y_j - \ln a_{ij})$ ($i = 1, 2, \dots, n; j = 1, 2, \dots, m$) і з кожної точки P_{ij} проведемо півпрямую в додатному напрямі осі Oz , перпендикулярно до площини x, y . Множину точок цих півпрямих позначимо через S , а її опуклу оболонку – через $C(S)$. Для кожної точки $(x, y) \in R$, де $R = \{(x, y) \mid x_1 \leq x \leq x_n, y_1 \leq y \leq y_m\}$, визначимо точку $B(x, y, \kappa(x, y))$, де

$$\kappa(x, y) = \inf_{(x, y, z) \in C(S)} z.$$

Множина точок $B(x, y, \kappa(x, y))$, $(x, y) \in R$, утворює багатогранну поверхню, яка обмежує $C(S)$ знизу. Ця поверхня називається неklasичною діаграмою Ньютона функції $z = f(x, y)$ на R , а її рівняння $z = \kappa(x, y)$, $(x, y) \in R$. Функція

$$M_f(x, y) = \exp(-\kappa(x, y)), \quad (x, y) \in R,$$

називається неklasичною мажорантою Ньютона функції $z = f(x, y)$ на R .

В [2] знайдено явний вигляд $M_f(x, y)$ для функції $z = f(x, y)$, заданої своїми значеннями у вершинах трикутника Δ з вершинами (a_1, b_1) , (a_2, b_2) , (a_3, b_3) . Якщо $f(a_1, b_1) = A$, $f(a_2, b_2) = B$, $f(a_3, b_3) = C$, то

$$M_f(x, y) = \left(|A|^{h_{32}(x,y)} |B|^{h_{13}(x,y)} |C|^{h_{21}(x,y)} \right)^{\frac{1}{h_{13}(a_2, b_2)}}, \quad (1)$$

де

$$h_{ij}(x, y) = \left| \begin{array}{cc} x - a_i & y - b_i \\ a_j - a_i & b_j - b_i \end{array} \right|, \quad (i, j = 1, 2, 3; i \neq j).$$

Використовуючи формулу (1), оцінимо точність наближення функції $z = f(x, y)$ неklasичною мажорантою Ньютона.

3. РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧІ

Нехай областю, в якій треба наблизити неперервну функцію $f(x, y)$, є прямокутник

$$D = \{(x, y) | a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}.$$

Розіб'ємо область D на прямокутники прямими $x = x_i$ ($i = 1, 2, \dots, p$) і $y = y_j$ ($j = 1, 2, \dots, q$), де $x_{i+1} = x_i + h_1$, $y_{j+1} = y_j + h_2$, $h_1 = (b - a)/p$, $h_2 = (d - c)/q$. Кожний прямокутник діагонально розіб'ємо на два трикутники: верхній і нижній. Якщо прямокутник утворено перетином прямих $x = x_{i-1}$, $x = x_i$ і $y = y_{j-1}$, $y = y_j$, то вершинами нижнього трикутника будуть точки (x_{i-1}, y_{j-1}) , (x_{i-1}, y_j) , (x_i, y_{j-1}) , а верхнього (x_{i-1}, y_j) , (x_i, y_j) , (x_i, y_{j-1}) . Нижній трикутник позначимо через D_{ij}^- , а верхній – D_{ij}^+ .

Теорема. Якщо виконуються умови

$$1 \leq f(x, y) \leq M, \quad \forall (x, y) \in D,$$

$$|f(x_1, y_1) - f(x_2, y_2)| \leq L(|x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|), \quad \forall (x_1, y_1), (x_2, y_2) \in D, \quad (2)$$

то точність наближення функції $f(x, y)$ мажорантою Ньютона $M_f(x, y)$ визначається нерівністю

$$|f(x, y) - M_f(x, y)| \leq 2hL(1 + M),$$

де $h = \max(h_1, h_2)$.

Доведення. На кожному нижньому трикутнику D_{ij}^- ($i = 1, 2, \dots, p; j = 1, 2, \dots, q$), використовуючи формулу (1), наблизимо функцію $f(x, y)$ неklasичною мажорантою Ньютона

$$M_{f,i,j}^-(x, y) = \left(f(x_{i-1}, y_{j-1})^{h_{32}(x,y)} f(x_{i-1}, y_j)^{h_{13}(x,y)} f(x_i, y_{j-1})^{h_{21}(x,y)} \right)^{\frac{1}{h_{13}(x_{i-1}, y_j)}},$$

де

$$h_{32}(x, y) = \left| \begin{array}{cc} x - x_i & y - y_{j-1} \\ x_{i-1} - x_i & y_j - y_{j-1} \end{array} \right| = h_1(y - y_{j-1}) + h_2(x - x_i),$$

$$h_{13}(x, y) = \begin{vmatrix} x - x_{i-1} & y - y_{j-1} \\ x_i - x_{i-1} & y_{j-1} - y_{j-1} \end{vmatrix} = -h_1(y - y_{j-1}),$$

$$h_{21}(x, y) = \begin{vmatrix} x - x_{i-1} & y - y_j \\ x_{i-1} - x_{i-1} & y_{j-1} - y_j \end{vmatrix} = -h_2(x - x_{i-1}),$$

$$h_{13}(x_{i-1}, y_j) = \begin{vmatrix} x_{i-1} - x_{i-1} & y_j - y_{j-1} \\ x_i - x_{i-1} & y_{j-1} - y_{j-1} \end{vmatrix} = -h_1 h_2.$$

Отже,

$$M_{f,i,j}^-(x, y) = f(x_{i-1}, y_{j-1}) \frac{x_i - x}{h_1} f(x_{i-1}, y_{j-1}) \frac{y_{j-1} - y}{h_2} f(x_{i-1}, y_j) \frac{y - y_{j-1}}{h_2} f(x_i, y_{j-1}) \frac{x - x_{i-1}}{h_1}.$$

Розглянемо похибку

$$z_{ij}^-(x, y) = f(x, y) - M_{f,i,j}^-(x, y), \quad (x, y) \in D_{ij}^-.$$

Тоді

$$\begin{aligned} |z_{ij}^-(x, y)| &\leq |f(x, y) - f(x, y_{j-1})| + |f(x, y_{j-1}) - f(x_{i-1}, y_{j-1})| + \\ &+ \left| f(x_{i-1}, y_{j-1}) - f(x_{i-1}, y_{j-1}) \frac{x_i - x}{h_1} f(x_{i-1}, y_{j-1}) \frac{y_{j-1} - y}{h_2} f(x_{i-1}, y_j) \frac{y - y_{j-1}}{h_2} f(x_i, y_{j-1}) \frac{x - x_{i-1}}{h_1} \right|. \end{aligned}$$

Оскільки

$$\begin{aligned} &\left| f(x_{i-1}, y_{j-1}) - f(x_{i-1}, y_{j-1}) \frac{x_i - x}{h_1} f(x_{i-1}, y_{j-1}) \frac{y_{j-1} - y}{h_2} f(x_{i-1}, y_j) \frac{y - y_{j-1}}{h_2} f(x_i, y_{j-1}) \frac{x - x_{i-1}}{h_1} \right| = \\ &= f(x_{i-1}, y_{j-1}) \frac{x_i - x}{h_1} \left| f(x_{i-1}, y_{j-1}) \frac{x - x_{i-1}}{h_1} - f(x_{i-1}, y_{j-1}) \frac{y_{j-1} - y}{h_2} f(x_{i-1}, y_j) \frac{y - y_{j-1}}{h_2} f(x_i, y_{j-1}) \frac{x - x_{i-1}}{h_1} \right| = \\ &= f(x_{i-1}, y_{j-1}) \frac{x_i - x}{h_1} \left| f(x_{i-1}, y_{j-1}) \frac{x - x_{i-1}}{h_1} - f(x_i, y_{j-1}) \frac{x - x_{i-1}}{h_1} + f(x_i, y_{j-1}) \frac{x - x_{i-1}}{h_1} - \right. \\ &\quad \left. - f(x_{i-1}, y_{j-1}) \frac{y_{j-1} - y}{h_2} f(x_{i-1}, y_j) \frac{y - y_{j-1}}{h_2} f(x_i, y_{j-1}) \frac{x - x_{i-1}}{h_1} \right| \leq \\ &\leq f(x_{i-1}, y_{j-1}) \frac{x_i - x}{h_1} \left| f(x_{i-1}, y_{j-1}) \frac{x - x_{i-1}}{h_1} - f(x_i, y_{j-1}) \frac{x - x_{i-1}}{h_1} \right| + \\ &+ f(x_{i-1}, y_{j-1}) \frac{x_i - x}{h_1} f(x_i, y_{j-1}) \frac{x - x_{i-1}}{h_1} \left| 1 - f(x_{i-1}, y_{j-1}) \frac{y_{j-1} - y}{h_2} f(x_{i-1}, y_j) \frac{y - y_{j-1}}{h_2} \right| = \\ &= f(x_{i-1}, y_{j-1}) \frac{x_i - x}{h_1} \left| f(x_{i-1}, y_{j-1}) \frac{x - x_{i-1}}{h_1} - f(x_i, y_{j-1}) \frac{x - x_{i-1}}{h_1} \right| + \\ &+ f(x_{i-1}, y_{j-1}) \frac{x_i - x}{h_1} f(x_i, y_{j-1}) \frac{x - x_{i-1}}{h_1} f(x_{i-1}, y_{j-1}) \frac{y_{j-1} - y}{h_2} \left| f(x_{i-1}, y_{j-1}) \frac{y - y_{j-1}}{h_2} - f(x_{i-1}, y_j) \frac{y - y_{j-1}}{h_2} \right| \end{aligned}$$

і

$$\begin{aligned} |f(x, y) - f(x, y_{j-1})| &\leq L|y - y_{j-1}|, \\ |f(x, y_{j-1}) - f(x_{i-1}, y_{j-1})| &\leq L|x - x_{i-1}|, \\ \left| f(x_{i-1}, y_{j-1}) \frac{x - x_{i-1}}{h_1} - f(x_i, y_{j-1}) \frac{x - x_{i-1}}{h_1} \right| &\leq |f(x_{i-1}, y_{j-1}) - f(x_i, y_{j-1})| \leq L|x_{i-1} - x_i|, \end{aligned}$$

$$\left| f(x_{i-1}, y_{j-1}) \frac{y-y_{j-1}}{h_2} - f(x_{i-1}, y_j) \frac{y-y_{j-1}}{h_2} \right| \leq |f(x_{i-1}, y_{j-1}) - f(x_{i-1}, y_j)| \leq L|y_{j-1} - y_j|,$$

то врахувавши умови (2), одержимо

$$|z_{ij}^-(x, y)| \leq Lh_2 + Lh_1 + MLh_1 + M \frac{x_i - x_{i-1}}{h_1} + \frac{x - x_{i-1}}{h_1} Lh_2 = L(h_1 + h_2 + Mh_1 + Mh_2) = L(h_1 + h_2)(1 + M).$$

Аналогічно для похибки

$$z_{ij}^+(x, y) = f(x, y) - M_{f,i,j}^+(x, y), \quad (x, y) \in D_{ij}^+,$$

у верхньому елементарному трикутнику одержуємо оцінку

$$|z_{ij}^+(x, y)| \leq L(h_1 + h_2)(1 + M),$$

де

$$\begin{aligned} M_{f,i,j}^+(x, y) &= \left(f(x_{i-1}, y_j) \right)^{h_{32}(x,y)} f(x_i, y_j)^{h_{13}(x,y)} f(x_i, y_{j-1})^{h_{21}(x,y)} \frac{1}{h_{13}(x,y)}, \\ h_{32}(x, y) &= h_2(x - x_i), \quad h_{13}(x, y) = -h_2(x - x_{i-1}) - h_1(y - y_j), \\ h_{21}(x, y) &= h_1(y - y_j), \quad h_{13}(x_i, y_j) = -h_1h_2. \end{aligned}$$

Справді,

$$M_{f,i,j}^+(x, y) = f(x_{i-1}, y_j) \frac{x_i - x}{h_1} f(x_i, y_j) \frac{x - x_{i-1}}{h_1} f(x_i, y_j) \frac{y - y_j}{h_2} f(x_i, y_{j-1}) \frac{y_j - y}{h_2}.$$

Тому

$$\begin{aligned} |z_{ij}^+(x, y)| &\leq |f(x, y) - f(x, y_{j-1})| + |f(x, y_{j-1}) - f(x_i, y_{j-1})| + \\ &+ \left| f(x_i, y_{j-1}) - f(x_{i-1}, y_j) \frac{x_i - x}{h_1} f(x_i, y_j) \frac{x - x_{i-1}}{h_1} f(x_i, y_j) \frac{y - y_j}{h_2} f(x_i, y_{j-1}) \frac{y_j - y}{h_2} \right|. \end{aligned}$$

Оскільки

$$\begin{aligned} &\left| f(x_i, y_{j-1}) - f(x_{i-1}, y_j) \frac{x_i - x}{h_1} f(x_i, y_j) \frac{x - x_{i-1}}{h_1} f(x_i, y_j) \frac{y - y_j}{h_2} f(x_i, y_{j-1}) \frac{y_j - y}{h_2} \right| = \\ &= f(x_i, y_{j-1}) \frac{y_j - y}{h_2} \left| f(x_i, y_{j-1}) \frac{y - y_{j-1}}{h_2} - f(x_{i-1}, y_j) \frac{x_i - x}{h_1} f(x_i, y_j) \frac{x - x_{i-1}}{h_1} f(x_i, y_j) \frac{y - y_j}{h_2} \right| = \\ &= f(x_i, y_{j-1}) \frac{y_j - y}{h_2} \left| f(x_i, y_{j-1}) \frac{y - y_{j-1}}{h_2} - f(x_i, y_j) \frac{y - y_{j-1}}{h_2} + f(x_i, y_j) \frac{y - y_{j-1}}{h_2} - \right. \\ &\quad \left. - f(x_{i-1}, y_j) \frac{x_i - x}{h_1} f(x_i, y_j) \frac{x - x_{i-1}}{h_1} f(x_i, y_j) \frac{y - y_j}{h_2} \right| \leq \\ &\leq f(x_i, y_{j-1}) \frac{y_j - y}{h_2} \left| f(x_i, y_{j-1}) \frac{y - y_{j-1}}{h_2} - f(x_i, y_j) \frac{y - y_{j-1}}{h_2} \right| + \\ &+ f(x_i, y_{j-1}) \frac{y_j - y}{h_2} f(x_i, y_j) \frac{y - y_j}{h_2} \left| f(x_i, y_j) - f(x_{i-1}, y_j) \frac{x_i - x}{h_1} f(x_i, y_j) \frac{x - x_{i-1}}{h_1} \right| = \\ &= f(x_i, y_{j-1}) \frac{y_j - y}{h_2} \left| f(x_i, y_{j-1}) \frac{y - y_{j-1}}{h_2} - f(x_i, y_j) \frac{y - y_{j-1}}{h_2} \right| + \\ &+ f(x_i, y_{j-1}) \frac{y_j - y}{h_2} f(x_i, y_j) \frac{y - y_j}{h_2} \left| f(x_i, y_j) \frac{x_i - x}{h_1} - f(x_{i-1}, y_j) \frac{x_i - x}{h_1} \right| \end{aligned}$$

i

$$\begin{aligned} |f(x, y) - f(x, y_{j-1})| &\leq L|y - y_{j-1}|, \\ |f(x, y_{j-1}) - f(x_i, y_{j-1})| &\leq L|x - x_i|, \\ \left| f(x_i, y_j)^{\frac{x_i - x}{h_1}} - f(x_{i-1}, y_j)^{\frac{x_i - x}{h_1}} \right| &\leq |f(x_i, y_j) - f(x_{i-1}, y_j)| \leq L|x_i - x_{i-1}|, \\ \left| f(x_i, y_{j-1})^{\frac{y - y_{j-1}}{h_2}} - f(x_i, y_j)^{\frac{y - y_{j-1}}{h_2}} \right| &\leq |f(x_i, y_{j-1}) - f(x_i, y_j)| \leq L|y_{j-1} - y_j|, \end{aligned}$$

то, врахувавши умови (2), одержимо

$$|z_{ij}^+(x, y)| \leq Lh_2 + Lh_1 + MLh_1 + MLh_2 = L(h_1 + h_2 + Mh_1 + Mh_2) = L(h_1 + h_2)(1 + M).$$

Позначимо

$$M_f(x, y) = \begin{cases} M_{f,i,j}^-, & (x, y) \in D_{ij}^-, \\ M_{f,i,j}^+, & (x, y) \in D_{ij}^+, \end{cases}$$

де $i = 1, 2, \dots, p$; $j = 1, 2, \dots, q$, наближення функції $f(x, y)$ у всьому прямокутнику D , а через

$$z(x, y) = \begin{cases} z_{ij}^-, & (x, y) \in D_{ij}^-, \\ z_{ij}^+, & (x, y) \in D_{ij}^+, \end{cases}$$

де $i = 1, 2, \dots, p$; $j = 1, 2, \dots, q$, його похибку. Тоді

$$|f(x, y) - M_f(x, y)| \leq 2hL(1 + M),$$

де $h = \max(h_1, h_2)$. Теорему доведено.

4. ВИСНОВКИ

Ми розглянули питання точності наближення функції двох дійсних змінних неklasичною мажорантою Ньютона. Доведено теорему про точність наближення функції двох дійсних змінних неklasичною мажорантою Ньютона.

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Цегелик Г.Г. Апарат неklasичних мажорант і діаграм Ньютона функцій двох дійсних змінних, заданих таблично / Г.Г. Цегелик, Н.В. Федчишин // Вісник Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. – 1998. – Вип. 50. – С. 209-211.
2. Цегелик Г.Г. До побудови апарату неklasичних мажорант і діаграм Ньютона функцій двох дійсних змінних, заданих таблично / Г.Г. Цегелик, Н.В. Федчишин // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. – 1999. – Вип. 52. – С. 111-116.
3. Цегелик Г.Г. Нова формула мажорантного типу для наближеного обчислення подвійних інтегралів / Г.Г. Цегелик, Н.В. Федчишин // Волинський матем. вісник. – 2000. – Вип. 7. С. 159-164.
4. Глебена М.І. Чисельний метод відшукування екстремуму негладких функцій двох дійсних змінних / М.І. Глебена, Г.Г. Цегелик // Прикладні проблеми механіки і матем. – 2007. – Вип. 5. – С. 17-21.

5. Цегелик Г.Г. Чисельний метод мажорантного типу відшукування абсолютного екстремуму довільних негладких функцій двох дійсних змінних / Г.Г. Цегелик, М.І. Глебена // Вісник Львів. ун-ту. Серія прикл. матем. та інформ. – 2010. – Вип. 16. – С. 63-70.

Стаття: надійшла до редколегії 15.11.2011

доопрацьована 01.12.2011

прийнята до друку 15.12.2011

О ТОЧНОСТИ АПРОКСИМАЦИИ ФУНКЦИИ ДВУХ ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫХ ПЕРЕМЕННЫХ НЕКЛАССИЧЕСКОЙ МАЖОРАНТОЙ НЬЮТОНА

М. Глебена *, Н. Грипинская **, Г. Цегелик ***

*Ужгородский национальный университет,
ул. Подгорная, 46, Ужгород, 88000,

**Хмельницкий национальный университет,
ул. Иститутская, 11, Хмельницкий, 29016,

***Львовский национальный университет имени Ивана Франко,
ул. Университетская, 1, Львов, 79000, e-mail: kafmmsep@franko.lviv.ua

Рассмотрено вопрос точности приближения функции двух действительных переменных неклассической мажорантой Ньютона.

Ключевые слова: методы оптимизации, мажоранта и диаграмма Ньютона, точность аппроксимации.

THE ACCURACY OF APPROXIMATION FUNCTION OF TWO REAL VARIABLES OF NON-CLASSICAL NEWTONIAN MAJORANT

M. Hlebena *, N. Hrypynska **, H. Tsehelyk ***

*Uzhgorod National University,
Pidgirna str., 46, Uzhgorod, 88000,

**Khmelnitsky National University,
Instytutska str., 11, Khmelnytsky, 29016,

***Ivan Franko National University of Lviv,
Universytetska str, 1, Lviv, 79000, e-mail: kafmmsep@franko.lviv.ua

In the article is suggested the question of the accuracy of approximation function of two real variables of non-classical Newtonian majorant.

Key words: method of optimization, majorant and diagrams of Newton, accuracy of approximation.