ISSN 2078–5097. Вісн. Львів. ун-ту. Сер. пр. матем. та інф. 2012. Вип. 18. С. 46–53
Visnyk of the Lviv University. Series Appl. Math. and Informatics. Issue 18. P. 46–53

УДК 519.642

ПОРІВНЯННЯ МЕТОДУ УЗАГАЛЬНЕНОГО РОЗДІЛЕННЯ ЗМІННИХ І МЕТОДУ ВИРОДЖЕНИХ ЯДЕР ДЛЯ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ БАГАТОВИМІРНИХ ІНТЕГРАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

В. Білецький

Львівський національний університет імені Івана Франка,
вул. Університетська, 1, Львів, 79000, e-mail: vbiletskyy@gmail.com

Подано порівняння методу узагальненого розділення змінних і методу вироджених ядер. Розглянуто спосіб наближення ядра інтегрального рівняння виродженим, який аналогічний до способу побудови наближеного розв'язку методу узагальненого розділення змінних. Використовуючи основну теорему збіжності ітераційного процесу методу узагальненого розділення змінних, обґрунтовано збіжність розглянутого варіанта методу вироджених ядер. Наведено порівняння обчислювальної складності алгоритмів, що реалізують ці методи, та числові результати для модельних задач.

Ключові слова: багатовимірні інтегральні рівняння, розділення змінних, вироджене ядро, метод узагальненого розділення змінних, метод вироджених ядер.

1. ВСТУП

Розглянемо інтегральне рівняння Фредгольма другого роду у N-вимірному просторі

$$Au \equiv \int_D K(x,y)u(x)dx - \lambda u(y) = f(y)\,, \tag{1.1}$$

де

- $D = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \ldots \times [a_2, b_2]$ – обмежена область в R^N;
- $x = (x_1, x_2, \ldots, x_N)$, $y = (y_1, y_2, \ldots, y_N)$;
- $u, f \in L_2(D)$;
- $K \in L_2(D \times D)$;
- λ не належить до спектра ядра K.

Зі збільшенням розмірності задачі N експоненціально зростає обчислювальна складність відповідної дискретизованої задачі. Для того, щоб вирішити подібну проблему, наближений розв'язок шукають у спеціальному вигляді у деякому підпросторі простору $L_2(D)$. Метод узагальненого розділення змінних [2, 9, 15, 16] зводить розв'язання багатовимірної задачі до послідовності одновимірних задач та подає наближений розв'язок у вигляді

$$u_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \prod_{j=1}^{N} u_j^{(k)}(x_j)\,, \tag{1.2}$$

де $u_j \in L_2([a_j, b_j])$.

Метод вироджених ядер [7, 10, 11, 12, 13] замінює ядро K рівняння (1.1) на наближене вироджене ядро

$$K_n(x,y) = \sum_{k=1}^{n} a^{(k)}(x) b^{(k)}(y)\,. \tag{1.3}$$

Тут $a^{(k)}, b^{(k)} \in L_2(D)$.

Для випадку виродженого ядра (1.3) рівняння (1.1) зводиться до системи n лінійних алгебричних рівнянь. Так отримують відповідний наближений розв'язок.

Автори використовують різні способи заміни ядра на вироджене. У [6, 8] описано варіаційно-ітераційний метод наближення функції двох змінних у вигляді (1.3). Функції однієї змінної, сума парних добутків яких апроксимує вихідну функцію, формуються оптимально в сенсі мінімуму квадрата нев'язки. Ідея методу була запропонована в [4, 5] для апроксимації ядер інтегральних рівнянь як функцій двох змінних. Зауважимо, що цей метод легко узагальнити на багатовимірний випадок ядра інтегрального рівняння (1.1).

При подібних підходах важливим є питання збіжності отриманої послідовності наближених розв'язків до точного. У [14] для загального випадку доведено збіжність ітераційного процесу методу узагальненого розділення змінних. У [3] описано модифікацію методу, що гарантує монотонність послідовності норм відхилення точного та наближеного розв'язків. Основну теорему з [14] можна використати для доведення збіжності методу вироджених ядер для випадку заміни ядра згідно з [4, 5, 6, 8].

2. МЕТОД УЗАГАЛЬНЕНОГО РОЗДІЛЕННЯ ЗМІННИХ

Варіаційно-ітераційний метод узагальненого розділення змінних [1, 17] використовують для розв'язання багатовимірних інтегральних рівнянь. Коротко опишемо алгоритм методу.

Наближений розв'язок знаходять у вигляді суми (1.2), кожен доданок якої є добутком функцій однієї змінної. На кожному кроці методу знаходять новий доданок згідно з умовою мінімуму квадрата нев'язки

$$J_n(u) = \|f_n - Au\|^2 = \int_D |f_n(x) - (Au)(x)|^2 dx \to \min , \qquad (2.1)$$

де

$$f_n = f - Au_n , \; u(x) = \prod_{j=1}^{N} u_j(x_j) .$$

З необхідних умов мінімуму функціонала (2.1) отримаємо систему N одновимірних рівнянь Ейлера для функцій $u_j(x_j)$. Кожне з рівнянь такої системи є лінійним стосовно однієї з функцій $u_j(x_j)$, а отже, його можна розглядати окремо як умову мінімуму функціонала (2.1) за цією функцією при фіксованих інших співмножниках. Отже, циклічно-послідовне розв'язування рівнянь системи стосовно $u_j(x_j)$, $j = 1,\ldots,N$ еквівалентне покомпонентній мінімізації функціонала J_n. Зауважимо, що його можна мінімізувати по-іншому, наприклад, будь-яким градієнтним методом.

3. МЕТОД ВИРОДЖЕНИХ ЯДЕР

Ідея методу вироджених ядер [7, 12] полягає у заміні ядра інтегрального рівняння (1.1) на вироджене ядро (1.3). Для випадку рівняння з виродженим ядром K_n знаходження розв'язку значно спрощується [11].

$$u(y) = \frac{1}{\lambda}\left(\int_D \sum_{k=1}^{n} a^{(k)}(x) b^{(k)}(y) dx - f(y) \right);$$

$$u(y) = \frac{1}{\lambda}\left(\sum_{k=1}^{n} c_k b^{(k)}(y) - f(y) \right),$$

де

$$c_k = \int_D a^{(k)}(x)u(x)dx = \frac{1}{\lambda}\left(\sum_{j=1}^{n} c_j \int_D a^{(k)}(x)b^{(j)}(x)dx - \int_D a^{(k)}(x)f(x)dx\right).$$

Отже, відшукання розв'язку інтегрального рівняння зводиться до системи лінійних алгебричних рівнянь

$$\sum_{j=1}^{n} \alpha_{jk} c_j - c_k = \beta_k, \ k = 1,\ldots,n, \tag{3.1}$$

де

$$\alpha_{jk} = \frac{1}{\lambda}\int_D a^{(k)}(x)b^{(j)}(x)dx,$$

$$\beta_k = \frac{1}{\lambda}\int_D a^{(k)}(x)f(x)dx.$$

Існує багато способів наближення ядра інтегрального рівняння (1.1) виродженим. Наприклад, як наближення можна взяти відрізок ряду Тейлора чи відрізок ряду Фур'є ядра K. У [7, 13] розглянуто деякі способи заміни ядра інтегрального рівняння.

У [4, 5] запропоновано ітераційний метод наближення ядра у вигляді (1.3), де

$$a^{(k)}(x) = \sum_{j=1}^{N} a_j^{(k)}(x_j), \ b^{(k)}(y) = \sum_{j=1}^{N} b_j^{(k)}(y_j).$$

На кожному кроці методу новий доданок знаходять згідно з умовою мінімуму квадрата нев'язки

$$J_n(a,b) = \int_D \int_D \left|K(x,y) - K_n(x,y) - a(x)b(y)\right|^2 dxdy \to \min, \tag{3.2}$$

де

$$a(x) = \sum_{j=1}^{N} a_j(x_j), \ b(y) = \sum_{j=1}^{N} b_j(y_j).$$

Для мінімізації (3.2) можна використати довільний підхід, наприклад, згаданий вище покомпонентний циклічно-послідовний метод.

4. ОБҐРУНТУВАННЯ ЗБІЖНОСТІ

У [14] доведено збіжність методу узагальненого розділення змінних. Тобто послідовність наближених розв'язків (1.2) збігається до точного розв'язку рівняння (1.1). Використовуючи основну теорему з [14], покажемо збіжність розглянутого варіанта методу вироджених ядер. Для цього опишемо метод узагальненого розділення змінних для операторного рівняння.

Нехай $H_1,\ldots,H_n$ – деякі гільбертові простори. Позначимо через H тензорний добуток цих просторів

$$H = \bigotimes_{j=1}^{n} H_j. \tag{4.1}$$

Нехай $A: H \to H$ – лінійний обмежений оператор, для якого існує обмежений обернений оператор в H. Розглянемо лінійне операторне рівняння

$$Au = f, \tag{4.2}$$

де $u, f \in H$.

Побудуємо послідовність наближених розв'язків так:

$$u_{k+1} = u_k + u^{(k)}, \tag{4.3}$$

де

$$u_0 = 0,\ u^{(k)} = u^{(k,0)} \otimes u^{(k,1)} \otimes \ldots \otimes u^{(k,n)},$$

$$u^{(k,j)} \in H_j,\ j = 1,\ldots,n,$$

$$J_k(u^{(k,0)},\ldots,u^{(k,n)}) = \min_{v^{(j)} \in H_j} J_k(v^{(0)},\ldots,v^{(n)}),$$

$$J_k(v^{(0)},\ldots,v^{(n)}) = \left\| f_k - A(v^{(0)} \otimes v^{(1)} \otimes \ldots \otimes v^{(n)}) \right\|^2,$$

$$f_k = f - Au_k.$$

Основна теорема обґрунтування збіжності методу узагальненого розділення змінних доводить монотонну збіжність до нуля послідовності

$$\left\{ \|f_k\| \right\}_{k=0}^{\infty}. \tag{4.4}$$

Розглянемо іншу послідовність

$$\left\{ \left\| u_k - A^{-1} f \right\| \right\}_{k=0}^{\infty}. \tag{4.5}$$

Зауважимо, що ця послідовність також є збіжною до нуля, але на відміну від (4.4), загалом, не є монотонною. У [3] описано модифікацію методу узагальненого розділення змінних, що забезпечує монотонність послідовності (4.5). Для доведення збіжності модифікації методу у [3] також використано основну теорему.

Для випадку розглянутого варіанта методу вироджених ядер, прийнявши $A = I$ та використавши основну теорему, отримаємо монотонну збіжність до нуля послідовності

$$\left\{ \|K - K_n\| \right\}_{k=0}^{\infty}. \tag{4.6}$$

Як показано у [11] та [18], якщо послідовність (4.6) збіжна до нуля, то відповідна послідовність наближених розв'язків рівняння (1.1) збігається до точного.

Отже, ми показали збіжність послідовності наближених розв'язків розглянутого варіанта методу вироджених ядер до точного. На відміну від використання відрізка ряду Тейлора чи відрізка ряду Фур'є ми не маємо додаткових обмежень на ядро інтегрального рівняння. Зауважимо, що метод узагальненого розділення змінних забезпечує монотонну збіжність послідовності (4.4), модифікація методу узагальненого розділення змінних – послідовності (4.5), а метод вироджених ядер – послідовності (4.6).

5. ПОРІВНЯННЯ МЕТОДІВ І ЧИСЛОВІ РЕЗУЛЬТАТИ

Нехай після дискретизації задачі (1.1) по кожному з вимірів маємо M вузлів розбиття. Визначимо обчислювальну складність однієї ітерації методу узагальненого розділення змінних. Для побудови системи лінійних алгебричних рівнянь необхідно порядку M^{2N} операцій , а для її розв'язання – M^3. Отож, обчислювальна складність однієї ітерації – $O(M^{2N} + M^3)$. Аналогічна обчислювальна складність притаманна модифікації методу.

Одна ітерація методу вироджених ядер потребує порядку M^{2N} операцій, а для побудови наближеного розв'язку потрібно розв'язати систему лінійних алгебричних рівнянь (3.1).

Тож при побудові L послідовних наближень ядра рівняння (1.1) загальна обчислювальна складність становить $O(LM^{2N} + L^3)$. Для порівняння, загальна обчислювальна складність методу узагальненого розділення змінних при L доданках наближеного розв'язку дорівнює $O(LM^{2N}+LM^3)$.

Легко бачити, що при $N>1$ та незначній кількості доданків L обидва методи мають однакову обчислювальну складність $O(LM^{2N})$.

Розглянемо результати роботи методів для такої модельної задачі

$$Au\equiv\int_0^1\int_0^1\cos(xy+\hat{x}^2-\hat{y}^2)u(x,y)dxdy-4u(\hat{x},\hat{y})=f(\hat{x},\hat{y}), \tag{5.1}$$

де права частина $f(\hat{x},\hat{y})$ обчислюється на підставі точного розв'язку рівняння

$$u_T(\hat{x},\hat{y})=\sin(\hat{x}^2+\hat{y}^2).$$

Нехай u_k – наближення розв'язку задачі після k кроків, а

$$f_k=f-Au_k.$$

Позначимо

$$\alpha_k=\frac{\|f_k\|}{\|f\|},$$

$$\beta_k=\frac{\|u_k-u_T\|}{\|u_T\|}.$$

Для методу вироджених ядер введемо ще один параметр

$$\gamma_k=\frac{\|K-K_k\|}{\|K\|}.$$

Зміну введених параметрів наведено у таких таблицях.

Таблиця 1

Метод узагальненого розділення змінних

k	1	2	3	4	5	6	7
$\alpha_k\cdot 100\%$	22,79211	1,3319	0,0626	0,0025	0,0010	0,0006	0,0001
$\beta_k\cdot 100\%$	19,4323	1,4018	0,0530	0,0026	0,0008	0,0005	0,0001

Таблиця 2

Модифікація методу узагальненого розділення змінних

k	1	2	3	4	5	6	7
$\alpha_k\cdot 100\%$	21,4849	0,6833	0,0531	0,0250	0,0004	0,0001	0,0000
$\beta_k\cdot 100\%$	18,2056	0,7173	0,0450	0,0211	0,0004	0,0001	0,0000

Таблиця 3

Метод вироджених ядер

k	1	2	3	4	5	6	7
$\alpha_k \cdot 100\%$	2,4517	0,8169	0,8510	0,8203	0,6897	0,2337	0,1799
$\beta_k \cdot 100\%$	2,0793	0,8182	0,8985	0,8634	0,7398	0,2023	0,1594
$\gamma_k \cdot 100\%$	14,1861	10,2172	7,0525	5,8469	3,5683	1,8313	1,2631

Як видно з результатів, метод вироджених ядер демонструє повільнішу збіжність, хоча перші його ітерації зазвичай дають ліпші наближення. Також на підставі числових експериментів можна зробити висновок про на порядок більшу дисперсію параметрів α_k та β_k для методу вироджених ядер. Це пояснюється тим, що цей метод мінімізує відхилення ядра від його наближення, тобто γ_k, а не один з параметрів α_k, β_k. Загалом модифікація методу узагальненого розділення змінних демонструє ліпшу збіжність завдяки мінімізації на кожному кроці відхилення наближеного розв'язку від точного.

Список використаної літератури

1. *Баляш Ю.Г.* Вариационно-итерационный метод решения многомерных интегральных уравнений / Ю.Г. Баляш, Н. Н. Войтович // Интегральные уравнения в прикладном моделировании: Тез. докл. XX республ. конф. – Киев: Ин-т электродинамики АН УССР, 1986. – Ч. 2. – С. 23.
2. *Білецький В.* Ітераційний метод узагальненого розділення змінних для розв'язання двовимірних інтегральних рівнянь / В. Білецький // Вісник Львів. ун-ту. Серія прикл. матем. та інформ. – 2009. – 15. – С. 33-42.
3. *Білецький В.* Модифікація методу узагальненого відокремлення змінних для розв'язування багатовимірних інтегральних рівнянь / В. Білецький // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2010. – 53, № 4. – С. 44-50.
4. *Верлань А.Ф.* Способ аппроксимации ядер при решении интегральных уравнений на аналоговых и гибридных вычислительных машинах / А.Ф. Верлань // Гибридные вычислительные машины и комплексы: тезисы докл. семинара. – К.: Наук. думка, 1972. – С. 18.
5. *Верлань А.Ф.* Комбинированный метод аппроксимации ядер интегральных уравнений / А.Ф. Верлань, И.Е. Ефимов // Точность и надежность кибернетических систем. – 1974. – Вып. 3. – С. 68-74.
6. *Верлань А.Ф.* К вопросу сходимости вариационно-итерационного метода аппроксимации функции двух переменных / А.Ф. Верлань, И.А. Серикова // Точность и надежность кибернетических систем. – 1975. – Вып. 3. – С. 10-12.
7. *Верлань А.Ф.* Методы решения интегральных уравнений с программами для ЭВМ / А.Ф. Верлань, В.С. Сизиков. – К.: Наук. думка, 1978.
8. *Верлань Д.А.* Ітераційні алгоритми апроксимації функцій двох змінних / Д.А. Верлань // Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія: Технічні науки. – 2009. – Вип. 2. – С. 24-32.

9. *Войтович М.М.* Варіаційно-ітераційний метод узагальненого розділення змінних для розв'язування багатовимірних інтегральних рівнянь / М.М. Войтович, С.А. Ярошко // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 1997. – 40, № 4. – С. 122-126.
10. *Демидович Б.П.* Численные методы анализа / Б.П. Демидович, И.А. Марон, Э.З. Шувалова.– М.: Наука, 1967.
11. *Канторович Л.В.* Приближенные методы высшего анализа / Л.В. Канторович, В.И. Крылов. – М.: Физматлит, 1962.
12. *Манжиров А.В.* Методы решения интегральных уравнений: Справочник / А.В. Манжиров, А.Д. Полянин. – М.: Факториал, 1999.
13. *Михлин С.Г.* Приближенные методы решения дифференциальных и интегральных уравнений / С.Г. Михлин, Х.Л. Смолицкий. – М.: Наука, 1965.
14. *Biletskyy V.* An iterative method of generalized separation of variables for solving linear operator equations / V. Biletskyy // Journal of Numerical and Applied Mathematics. – 2010. – 1(100). – P. 2-9.
15. *Biletskyy V.* A method of generalized separation of variables for solving many-dimensional linear Fredholm integral equations / V. Biletskyy, S. Yaroshko // Direct and inverse problems of electromagnetic and acoustic wave theory: Proc. XIIth Int. Seminar/Workshop, Lviv, Sept. 17-20, 2007. – Lviv, 2007. – P. 94-97.
16. *Biletskyy V.* A method of generalized separation of variables for solving three-dimensional integral equations / V. Biletskyy, S. Yaroshko // Direct and inverse problems of electromagnetic and acoustic wave theory: Proc. XIth Int. Seminar/Workshop, Tbilisi, Oct. 11-13, 2006. – Lviv-Tbilisi, 2006. – P. 164-168.
17. *Bulatsyk O.* Phase Optimization Problems: Applications in Wave Field Theory / O. Bulatsyk, B. Katsenelenbaum, Y. Topolyuk, N. Voitovich. – WILEY-VCH Verlag GmbH \& Co. KGaA, Weinheim.– 2010.
18. *Tricomi F.G.* Integral equations / F. G. Tricomi.– New York, Interscience, 1957.
19. *Velytiak T.* A method of generalized separation of variables for solving two-dimensional integral equations / T. Velytiak, S. Yaroshko // Direct and inverse problems of electromagnetic and acoustic wave theory: Proc. IIIrd Int. Seminar/Workshop, Tbilisi, Nov. 2-5, 1998. – Tbilisi, 1998. – P. 81-85.

Стаття: надійшла до редколегії 22.03.2011
доопрацьована 09.06.2011
прийнята до друку 08.09.2011

СРАВНЕНИЕ МЕТОДА ОБОБЩЕННОГО РАЗДЕЛЕНИЯ ПЕРЕМЕННЫХ И МЕТОДА ВЫРОЖДЕННЫХ ЯДЕР ДЛЯ РЕШЕНИЯ МНОГОМЕРНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

В. Билецкий

Львовский национальный университет имени Ивана Франко,
ул. Университетская, 1, Львов, 79000, e-mail: vbiletskyy@gmail.com

Приведено сравнение метода обобщенного разделения переменных и метода вырожденных ядер. Рассмотрен способ приближения ядра интегрального уравнения вырожденным, который аналогичен к способу построения приближенного решения метода обобщенного разделения переменных. Используя основную теорему сходимости итерационного процесса метода обобщенного разделения переменных, обоснована сходимость рассмотренного варианта метода вырожденных ядер. Приведено сравнение вычислительной сложности алгоритмов данных методов, а также численные результаты для модельных задач.

Ключевые слова: многомерные интегральные уравнения, разделение переменных, вырожденное ядро, метод обобщенного разделения переменных, метод вырожденных ядер.

A COMPERISON OF METHOD OF GENERALIZED SEPARATION OF VARIABLES AND DEGENERATE KERNEL METHOD FOR SOLVING MANY-DIMENSIONAL INTEGRAL EQUATIONS

V. Biletskyy

Ivan Franko National University of Lviv,
Universytetska str, 1, Lviv, 79000, e-mail: vbiletskyy@gmail.com

A method of generalized separation of variables and a degenerate kernel method are compared. The way of integral equation kernel approximation is considered that is similar to approximate solution construction of the method of generalized separation of variables. The main convergence theorem of the method of generalized separation of variables is used to prove the convergence of the given modification of the degenerate kernel method. Also the computational complexity and numerical results for model problems are given.

Key words: many-dimensional integral equations, separation of variables, degenerate kernel, method of generalized separation of variables, method of degenerate kernels.