ISSN 2078–5097. Вісн. Львів. ун-ту. Сер. пр. матем. та інф. 2012. Вип. 18. С. 30–45
Visnyk of the Lviv University. Series Appl. Math. and Informatics. Issue 18. P. 30–45

УДК 517.95

ІСНУВАННЯ ТА НЕІСНУВАННЯ ГЛОБАЛЬНИХ РОЗВ'ЯЗКІВ МІШАНОЇ ЗАДАЧІ ДЛЯ НЕЛІНІЙНОГО ПАРАБОЛІЧНОГО РІВНЯННЯ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКУ

Г. Базиляк, В. Кирилич

Львівський національний університет імені Івана Франка,
вул. Університетська, 1, Львів, 79000, e-mail: torgan_g@yahoo.com, vkyrylych@ukr.net

Визначено достатні умови існування локального та існування і неіснування глобальних розв'язків мішаної задачі для нелінійного параболічного рівняння четвертого порядку за просторовими змінними і другого порядку за часом. Для доведення використано методи Гальоркіна, монотонності та компактності.

Ключові слова: мішана задача, метод Гальоркіна, узагальнений розв'язок.

1. ВСТУП. ФОРМУЛЮВАННЯ ЗАДАЧІ ТА ОЗНАЧЕННЯ УЗАГАЛЬНЕНОГО РОЗВ'ЯЗКУ

Нехай Ω – обмежена область в $\mathbb{R}^n$ з межею $\partial\Omega \in C^1$, а $\Omega_\tau = \Omega \times \{t = \tau\}$, де $\tau \geq 0$ і $Q = \Omega \times (0, \infty)$, $Q_T = \Omega \times (0, T)$, де $T > 0$.

В області Q ми дослідили мішану задачу для рівняння

$$u_{tt} + \sum_{i,j,s,l=1}^{n} (a_{ij}^{sl}(x) u_{x_i x_j})_{x_s x_l} - \sum_{i=1}^{n} (a_i(x) |u_{tx_i}|^{p-2} u_{tx_i})_{x_i} - \sum_{i=1}^{n} (b_i(x) |u_{x_i}|^{q-2} u_{x_i})_{x_i} +$$
$$+ b_1(x) |u_t|^{m-2} u_t + a_0(x) u_t = b_0(x) |u|^{r-2} u \quad (1)$$

з дійснозначними додатними коефіцієнтами та початково-крайовими умовами

$$u(x,0) = u_0(x), \; u_t(x,0) = u_1(x), \; x \in \Omega, \quad (2)$$

$$u|_{\partial\Omega \times (0,\infty)} = \frac{\partial u}{\partial \nu}|_{\partial\Omega \times (0,\infty)} = 0, \quad (3)$$

де ν – зовнішня одинична нормаль до $\partial\Omega \times (0, \infty)$, $p > 2, q > 2, m > 2, r > 2$.

Параболічні рівняння четвертого порядку за просторовими змінними та другого порядку за часом типу (1) моделюють процеси фазового переходу у в'язкопружних середовищах з капілярністю [7]-[10]. Задачі для різних випадків нелінійності рівняння (1) в необмеженій області за часом досліджено в [1], [5], [6]. Зокрема, в праці [1] визначено поведінку при $t \to +\infty$ узагальнених розв'язків мішаної задачі для нелінійного рівняння (1) у випадку, коли $m = 2$, $p = q$ і $b_0(x) < 0$; у [5] одержано умови за яких узагальнений розв'язок задачі для рівняння (1) з $q = 2, m = 2, 1 < p < 2$ стає необмеженим у скінченний момент часу.

Наша мета – узагальнити попередні результати та визначити умови існування локального й умови існування та неіснування глобального узагальненого розв'язку для задачі (1)-(3).

Ми використовуватимемо такі простори: $L^r(\Omega), r > 1$, з нормою $\|\cdot\|_r^r$ [[2], с. 37], $H_0^2(\Omega)$ [[2], с. 45], $W_0^{1,r}(\Omega)$, $W_0^{2,r}(\Omega)$ [[2], с. 44], а також $L^r((0,T);B)$, де B – банахів простір, $T > 0$ [[2], с. 154] і

$$L^r_{\text{loc}}([0,T);L^r(\Omega)) = \{u:\ u \in L^r((0,T_0);L^r(\Omega))$$

для всіх $T_0 \in (0,T)\}$.

Нехай коефіцієнти рівняння (1) задовольняють умови:

(**A**): $a_{ij}^{sl},\, a_i,\, a_0 \in L^\infty(\Omega),\ i,j,s,l \in \{1,...,n\}$,

$a_0(x) \ge A_0 > 0$, $a_i(x) \ge A_1 > 0$ для майже всіх $x \in \Omega$, всіх $i \in \{1,...,n\}$ і, крім того, $\sum\limits_{i,j,s,l=1}^{n} a_{ij}^{sl}(x)\xi_{ij}\xi_{sl} \ge A_2 \sum\limits_{i,j=1}^{n} |\xi_{ij}|^2,\ A_2 > 0$ для майже всіх $x \in \Omega$ і всіх $i,j,s,l \in \{1,...,n\},\ \xi_{ij} \in \mathrm{R}$;

(**B**): $b_i,\, b_0,\, b_1 \in L^\infty(\Omega),\ i \in \{1,...,n\}$,

$b_0(x) \ge B_0 > 0$, $b_1(x) \ge B_1 > 0$, $b_i(x) \ge B_2 > 0$ для майже всіх $x \in \Omega$ і всіх $i \in \{1,...,n\}$.

Означення. *Функцію* $u \in L^2_{\text{loc}}([0,T);H_0^2(\Omega)) \cap L^p_{\text{loc}}([0,T);W_0^{1,q}(\Omega)) \cap L^r_{\text{loc}}([0,T);L^r(\Omega))$, $u_t \in L^\infty_{\text{loc}}([0,T);H_0^2(\Omega)) \cap L^p_{\text{loc}}([0,T);W_0^{1,p}(\Omega)) \cap L^m_{\text{loc}}([0,T);L^m(\Omega))$, $u_{tt} \in L^\infty_{\text{loc}}([0,T);L^2(\Omega))$, *яка задовольняє початкові умови* (2), (3) *та інтегральну рівність*

$$\int\limits_{\Omega}[u_{tt}v + \sum_{i,j,s,l=1}^{n} a_{ij}^{sl}(x)u_{x_ix_j}v_{x_sx_l} + \sum_{i=1}^{n}a_i(x)|u_{tx_i}|^{p-2}u_{tx_i}v_{x_i} + \sum_{i=1}^{n}b_i(x)|u_{x_i}|^{q-2}u_{x_i}v_{x_i} +$$
$$+ b_1(x)|u_t|^{m-2}u_tv + a_0(x)u_tv]dx = \int\limits_{\Omega_t} b_0(x)|u|^{r-2}uvdx \tag{4}$$

для майже всіх $t \in (0,T)$ *і всіх* $v \in H_0^2(\Omega) \cap W_0^{1,\max\{p;q\}}(\Omega) \cap L^{\max\{m;r\}}(\Omega)$ *називаємо узагальненим розв'язком задачі* (1)-(3). *Якщо* $T < +\infty$, *то розв'язок назвемо локальним, якщо ж* $T = +\infty$, *то глобальним*.

Введемо позначення

$$E(t) = \frac{1}{2}\int\limits_{\Omega_t}[|u_t|^2 + \sum_{i,j,s,l=1}^{n} a_{ij}^{sl}(x)u_{x_ix_j}u_{x_sx_l}]dx + \frac{1}{q}\int\limits_{\Omega_t}\sum_{i=1}^{n}b_i(x)|u_{x_i}|^q\,dx - \frac{1}{r}\int\limits_{\Omega_t}a_0(x)|u|^r\,dx, \tag{5}$$

$$G(t) = E(t) + \frac{2}{r}\int\limits_{\Omega_t}a_0(x)|u|^r\,dx.$$

2. ІСНУВАННЯ ЛОКАЛЬНОГО РОЗВ'ЯЗКУ

Теорема 1. *Нехай виконуються умови* (**A**), (**B**), $a_{ij}^{sl} \in W^{2,\infty}(\Omega)$, $a_i, b_i \in W^{1,\infty}(\Omega)$; $u_0 \in W_0^{1,q}(\Omega) \cap W_0^{2,2(q-1)}(\Omega) \cap H^4(\Omega)$, $u_1 \in W_0^{2,r_0}(\Omega) \cap L^{2(m-1)}(\Omega)$, *де* $r_0 = \dfrac{2n(p-1)}{n+2p-2}$ *при* $n > 2$ *і* $r_0 > 2$ *при* $n \in \{1,2\}$; $m > 2$; $r \le \dfrac{2n-4}{n-4}$ *при* $n > 4$ *і* $r > 2$ *при* $n \in \{1,...,4\}$; $q \le \dfrac{2n}{n-2}$ *при* $n > 2$ *і* $q \ge 3$ *при* $n \in \{1,2\}$; $r \le \dfrac{3nm-2n-8m}{m(n-4)}$ *при* $n > 4$ *і* $r > 2$ *при* $n \in \{1,...,4\}$. *Тоді існує локальний узагальнений розв'язок задачі* (1)-(3).

Доведення. Для доведення існування розв'язку використаємо метод Фаедо-Гальоркіна. Оскільки простір $W_0^{2,\max\{r_0,2(q-1)\}}(\Omega) \cap H^4(\Omega) \cap W_0^{1,q}(\Omega) \cap L^{\max\{m,r\}}(\Omega)$ –

сепарабельний банахів, то в ньому існує така зліченна множина $\{\omega^k\}$, що будь-яка скінченна кількість елементів цієї множини лінійно незалежна і замикання її лінійної оболонки в $W_0^{2,\max\{r_0,2(q-1)\}}(\Omega)\cap H^4(\Omega)\cap L^{\max\{m,r\}}(\Omega)$ збігається з цим простором. Можемо прийняти, що $\{\omega^k\}$ ортонормована в $L^2(\Omega)$.

Розглянемо функції $u^N(x,t)=\sum_{k=1}^{N}c_k^N(t)\omega^k(x),\ N=1,2...,$ де $c_1^N,c_2^N,...,c_N^N$ – розв'язки відповідних задач Коші

$$\int_\Omega[u_{tt}^N\omega^k+\sum_{i,j,s,l=1}^{n}a_{ij}^{sl}(x)u_{x_ix_j}^N\omega_{x_sx_l}^k+\sum_{i=1}^{n}a_i(x)|u_{tx_i}^N|^{p-2}u_{tx_i}^N\omega_{x_i}^k+\sum_{i=1}^{n}b_i(x)|u_{x_i}^N|^{q-2}u_{x_i}^N\omega_{x_i}^k+ \tag{6}$$

$$+b_1(x)|u_t^N|^{m-2}u_t^N\omega^k+a_0(x)u_t^N\omega^k-b_0(x)|u^N|^{r-2}u^N\omega^k]dx=0,\ t\in[0,T],$$

$$c_k^N(0)=u_{0,k}^N,\ c_{kt}^N(0)=u_{1,k}^N,\ k=1,...,N, \tag{7}$$

а

$$u_0^N(x)=\sum_{k=1}^{N}u_{0,k}^N\omega^k(x),\ \|u_0^N-u_0\|_{W_0^{1,q}(\Omega)\cap W_0^{2,2(q-1)}(\Omega)\cap H^4(\Omega)}\to 0, \tag{8}$$

$$u_1^N(x)=\sum_{k=1}^{N}u_{1,k}^N\omega^k(x),\ \|u_1^N-u_1\|_{W_0^{2,r_0}(\Omega)\cap L^{2(m-1)}(\Omega)}\to 0\ \text{для}\ N\to\infty.$$

На підставі теореми Каратеодорі [[4], с. 54] існує розв'язок задачі (6), (7), який має абсолютно неперервну похідну на проміжку $[0,t_N)$. З оцінок, одержаних нижче, випливає, що $t_N=T$, де додатне число T залежить від початкових даних задачі та коефіцієнтів рівняння.

Домножимо (6) на c_{kt}^N, підсумуємо за k від 1 до N і проінтегруємо за t від 0 до τ, де $\tau\in(0,t_N)$. Одержимо рівність

$$\int_{Q_\tau}[u_{tt}^Nu_t^N+\sum_{i,j,s,l=1}^{n}a_{ij}^{sl}(x)u_{x_ix_j}^Nu_{tx_sx_l}^N+\sum_{i=1}^{n}a_i(x)|u_{tx_i}^N|^p+\sum_{i=1}^{n}b_i(x)|u_{x_i}^N|^{q-2}u_{x_i}^Nu_{tx_i}^N+ \tag{9}$$

$$+b_1(x)|u_t^N|^m+a_0(x)|u_t^N|^2-b_0(x)|u^N|^{r-2}u^Nu_t^N]dxdt=0.$$

Очевидно,

$$J_1:=\int_{Q_\tau}u_{tt}^Nu_t^Ndxdt=\frac{1}{2}\int_{\Omega_\tau}|u_t^N|^2dx-\frac{1}{2}\int_{\Omega_0}|u_1^N|^2dx.$$

Згідно з умовою (**A**)

$$J_2:=\int_{Q_\tau}\sum_{i,j,s,l=1}^{n}a_{ij}^{sl}(x)u_{x_ix_j}^Nu_{tx_sx_l}^Ndxdt\ge\frac{A_2}{2}\int_{\Omega_\tau}\sum_{i,j=1}^{n}|u_{x_ix_j}^N|^2dx-\frac{A_{2,0}+1}{4}\int_{\Omega_0}\sum_{i,j=1}^{n}|u_{0x_ix_j}^N|^2dx,$$

де $A_{2,0}=\operatorname{ess\,sup}_Q\sum_{i,j,s,l=1}^{n}|a_{ij}^{sl}(x)|^2$;

$$J_3:=\int_{Q_\tau}\sum_{i=1}^{n}a_i(x)|u_{tx_i}^N|^p\,dxdt\ge A_1\int_{Q_\tau}\sum_{i=1}^{n}|u_{tx_i}^N|^p\,dxdt;$$

$$J_4:=\int_{Q_\tau}a_0(x)|u_t^N|^2dxdt\ge A_0\int_{Q_\tau}|u_t^N|^2dxdt.$$

З умови (**B**) отримаємо

$$J_5 := \int_{Q_\tau} \sum_{i=1}^n b_i(x) | u_{x_i}^N |^{q-2} u_{x_i}^N u_{tx_i}^N dxdt \geq \frac{B_2}{q} \int_{\Omega_\tau} \sum_{i=1}^n | u_{x_i}^N |^q dx - \frac{B_{2,0}}{q} \int_{\Omega_0} \sum_{i=1}^n | u_{0x_i}^N |^q dx,$$

де $B_{2,0} = \operatorname{ess\,sup}_Q \sum_{i=1}^n | b_i(x) |$;

$$J_6 := \int_{Q_\tau} b_1(x) | u_t^N |^m dxdt \geq B_1 \int_{Q_\tau} | u_t^N |^m dxdt;$$

$$J_7 := \int_{Q_\tau} b_0(x) | u^N |^{r-2} u^N u_t^N dxdt \leq \int_{Q_\tau} [\frac{B_{0,0}\delta_1}{2} | u_t^N |^2 + \frac{1}{\delta_1} | u^N |^{2(r-1)}] dxdt,$$

де $\delta_1 > 0$, $B_{0,0} = \operatorname{ess\,sup}_Q | b_0(x) |^2$.

На підставі теореми вкладення [[2], с.47] для майже всіх $t \in (0, \tau)$

$$\int_{\Omega_t} | u^N |^{2(r-1)} dx \leq M_0 (\int_{\Omega_t} \sum_{i,j=1}^n | u_{x_i x_j}^N |^2 dx)^{r-1},$$

причому $r \leq \frac{2n-4}{n-4}$ при $n > 4$, M_0 – деяка додатна стала, яка залежить від Ω. Отже,

$$J_7 \leq \frac{B_{0,0}\delta_1}{2} \int_{Q_\tau} | u_t^N |^2 dxdt + \frac{M_0}{2\delta_1} \int_0^\tau (\int_{\Omega_t} \sum_{i,j=1}^n | u_{x_i x_j}^N |^2 dx)^{r-1} dt.$$

Враховуючи одержані оцінки інтегралів $J_1 - J_7$, з (9) отримаємо нерівність

$$\int_{\Omega_\tau} [\frac{1}{2} | u_t^N |^2 + \frac{A_2}{2} \sum_{i,j=1}^n | u_{x_i x_j}^N |^2 + \frac{B_2}{q} \sum_{i=1}^n | u_{x_i}^N |^q] dx + \int_{Q_\tau} [(A_0 - \frac{B_{0,0}\delta_1}{2}) | u_t^N |^2 +$$
$$+ A_1 \sum_{i=1}^n | u_{tx_i}^N |^p + B_1 | u_t^N |^m] dxdt \leq \int_{\Omega_0} [\frac{1}{2} | u_1^N |^2 + \frac{A_{2,0}+1}{4} \sum_{i,j=1}^n | u_{0,x_i x_j}^N |^2 + \tag{10}$$
$$+ \frac{B_{2,0}}{q} \sum_{i=1}^n | u_{0x_i}^N |^q] dx + \frac{M_0}{2\delta_1} \int_0^\tau (\int_{\Omega_\tau} \sum_{i,j=1}^n | u_{x_i x_j}^N |^2 dx)^{r-1} dt \leq$$
$$\leq \mu_1 \int_0^\tau (\int_{\Omega_\tau} \sum_{i,j=1}^n | u_{x_i x_j}^N |^2 dx)^{r-1} dt + \mu_2$$

Тут μ_1, μ_2 – додатні сталі, які не залежать від N.

Виберемо $\delta_1 < \frac{2A_0}{B_{0,0}}$ і застосуємо до останньої нерівності лему Біхарі [[3], с. 110], тоді одержимо оцінку

$$\int_{\Omega_\tau} [| u_t^N |^2 + \sum_{i,j=1}^n | u_{x_i x_j}^N |^2 + \sum_{i=1}^n | u_{x_i}^N |^q] dx + \int_{Q_\tau} [| u_t^N |^2 + \sum_{i=1}^n | u_{tx_i}^N |^p +$$
$$+ | u_t^N |^m] dxdt \leq \frac{\mu_2}{[1-(r-2)\mu_2^{r-2}\mu_1\tau]^{1/(r-2)}}.$$

Нехай τ таке, що $1-(r-2)\mu_2^{r-2}\mu_1\tau > 0$. Тоді

$$\int_{\Omega_\tau}[|u_t^N|^2+\sum_{i,j=1}^n|u_{x_ix_j}^N|^2+\sum_{i=1}^n|u_{x_i}^N|^q]dx+\int_{Q_\tau}[|u_t^N|^2+\sum_{i=1}^n|u_{tx_i}^N|^p+|u_t^N|^m]dxdt\le\mu_3, \quad (11)$$

при $\tau\in[0,T_0], T_0<\dfrac{1}{(p-2)\mu_2^{p-2}\mu_1}$, $\mu_3>0$.

Отже,

$$\|u_t^N\|_{L^\infty((0,T_0);L^2(\Omega))\cap L^p(0,T_0;W_0^{1,p}(\Omega))\cap L^m(0,T_0;L^m(\Omega))\cap L^2(0,T_0;L^2(\Omega))}\le\mu_3, \quad (12)$$

$$\|u^N\|_{L^\infty((0,T_0);H_0^2(\Omega)\cap W_0^{1,q}(\Omega))}\le\mu_3.$$

Продиференціюємо за t рівність (6) (це можливо на підставі умов теореми). Отримаємо

$$\int_\Omega[u_{ttt}^N\omega^k+\sum_{i,j,s,l=1}^n a_{ij}^{sl}(x)u_{tx_ix_j}^N\omega_{x_sx_l}^k+(p-1)\sum_{i=1}^n a_i(x)|u_{tx_i}^N|^{p-2}u_{ttx_i}^N\omega_{x_i}^k+$$

$$+(q-1)\sum_{i=1}^n b_i(x)|u_{x_i}^N|^{q-2}u_{tx_i}^N\omega_{x_i}^k+(m-1)b_1(x)|u_t^N|^{m-2}u_{tt}^N\omega^k+a_0(x)u_{tt}^N\omega^k-$$

$$-(r-1)b_0(x)|u^N|^{r-2}u_t^N\omega^k]dx=0.$$

Домножимо останню рівність на c_{ktt}^N, підсумуємо за k від 1 до N і проінтегруємо за t від 0 до τ, де $\tau\in(0,T_0]$. Одержимо рівність

$$\int_{Q_\tau}[u_{ttt}^Nu_{tt}^N+\sum_{i,j,s,l=1}^n a_{ij}^{sl}(x)u_{tx_ix_j}^Nu_{ttx_sx_l}^N+(p-1)\sum_{i=1}^n a_i(x)|u_{tx_i}^N|^{p-2}|u_{ttx_i}^N|^2+$$

$$+(q-1)\sum_{i=1}^n b_i(x)|u_{x_i}^N|^{q-2}u_{tx_i}^Nu_{ttx_i}^N+(m-1)b_1(x)|u_t^N|^{m-2}|u_{tt}^N|^2+a_0(x)|u_{tt}^N|^2-$$

$$-(r-1)b_0(x)|u^N|^{r-2}u_t^Nu_{tt}^N]dxdt=0. \quad (13)$$

Подібно як для J_1, J_2, J_4 отримаємо

$$J_8:=\int_{Q_\tau}[u_{ttt}^Nu_{tt}^N+\sum_{i,j,s,l=1}^n a_{ij}^{sl}(x)u_{tx_ix_j}^Nu_{ttx_sx_l}^N+a_0(x)|u_{tt}^N|^2]dxdt\ge$$

$$\ge\int_{\Omega_\tau}[\frac{1}{2}|u_{tt}^N|^2+\frac{A_2}{2}\sum_{i,j=1}^n|u_{tx_ix_j}^N|^2]dx+A_0\int_{Q_\tau}|u_{tt}^N|^2\,dxdt-$$

$$-\int_{\Omega_0}[\frac{1}{2}|u_{tt}^N|^2+\frac{A_{2,0}+1}{4}\sum_{i,j=1}^n|u_{1x_ix_j}^N|^2]dx.$$

Згідно з умовою (**A**)

$$J_9:=\int_{Q_\tau}\sum_{i=1}^n a_i(x)|u_{tx_i}^N|^{p-2}|u_{ttx_i}^N|^2\,dxdt\ge A_1\int_{Q_\tau}\sum_{i=1}^n|u_{tx_i}^N|^{p-2}|u_{ttx_i}^N|^2\,dxdt.$$

З умови (**B**) отримаємо

$$J_{10}:=\frac{q-1}{2}\int_{Q_\tau}\sum_{i=1}^n b_i(x)|u_{x_i}^N|^{q-2}[(u_{tx_i}^N)^2]_t\,dxdt\ge\frac{(q-1)B_2}{2}\int_{\Omega_\tau}\sum_{i=1}^n|u_{x_i}^N|^{q-2}|u_{tx_i}^N|^2\,dx-$$

$$-\frac{(q-1)(q-2)B_{2,0}}{2}\int_{Q_\tau}\sum_{i=1}^n|u_{x_i}^N|^{q-3}|u_{tx_i}^N|^3\,dxdt-\frac{(q-1)B_{2,0}}{2}\int_{\Omega_0}\sum_{i=1}^n|u_{0x_i}^N|^{q-2}|u_{1x_i}^N|^2\,dx.$$

Нехай $q>3$, тоді

$$J_{10}^2 := \int\limits_{Q_\tau}\sum_{i=1}^{n}|u_{x_i}^N|^{q-3}|u_{tx_i}^N|^3\,dxdt \le \frac{(q-3)}{q}\int\limits_{Q_\tau}\sum_{i=1}^{n}|u_{x_i}^N|^q\,dxdt + \frac{3}{q}\int\limits_{Q_\tau}\sum_{i=1}^{n}|u_{tx_i}^N|^q\,dxdt.$$

Якщо $q=3$, то одержимо

$$J_{10} := \int\limits_{Q_\tau}\sum_{i=1}^{n}b_i(x)|u_{x_i}^N|^{q-2}[(u_{tx_i}^N)^2]_t\,dxdt = \int\limits_{\Omega_\tau}\sum_{i=1}^{n}b_i(x)|u_{x_i}^N|^{q-2}|u_{tx_i}^N|^2\,dx -$$

$$-\int\limits_{Q_\tau}\sum_{i=1}^{n}b_i(x)|u_{tx_i}^N|^q\,dxdt - \int\limits_{\Omega_0}\sum_{i=1}^{n}b_i(x)|u_{0x_i}^N|^{q-2}|u_{1x_j}^N|^2\,dx.$$

За теоремою вкладення [[2], с. 47]

$$\int\limits_{Q_\tau}\sum_{i=1}^{n}|u_{tx_i}^N|^q\,dxdt \le M_1\int\limits_0^\tau\Big(\int\limits_{\Omega_\tau}\sum_{i,j=1}^{n}|u_{tx_ix_j}^N|^2\,dx\Big)^{q/2}dt,$$

якщо $q \le \dfrac{2n}{n-2}$ і $n>2$.

Далі

$$J_{11} := \int\limits_{Q_\tau}b_0(x)|u^N|^{r-2}u_t^N u_{tt}^N\,dxdt \le \frac{B_{0,0}\delta_2^2}{2}\int\limits_{Q_\tau}|u_{tt}^N|^2\,dxdt +$$

$$+\frac{m-2}{2m\delta_2^{2m/(m-2)}}\int\limits_{Q_\tau}|u^N|^{(r-2)2m/(m-2)}\,dxdt + \frac{1}{m\delta_2^m}\int\limits_{Q_\tau}|u_t^N|^m\,dxdt,\ \delta_2>0.$$

На підставі теореми вкладення і (12)

$$J_{11}^2 := \int\limits_{Q_\tau}|u^N|^{(r-2)2m/(m-2)}\,dxdt \le M_2\int\limits_0^\tau\Big(\int\limits_{\Omega_\tau}\sum_{i,j=1}^{n}|u_{x_ix_j}^N|^2\,dx\Big)^{(r-2)m/(m-2)}dt \le \mu_4$$

при $\tau\in[0,T_0]$ і $r \le \dfrac{3nm-2n-8m}{nm-4m}$, якщо $n>4$;

$$J_{12} := \int\limits_{Q_\tau}b_1(x)|u_t^N|^{m-2}|u_{tt}^N|^2\,dxdt \ge B_1\int\limits_{Q_\tau}|u_t^N|^{m-2}|u_{tt}^N|^2\,dxdt.$$

Враховуючи одержані оцінки інтегралів J_8-J_{12}, з (13) отримаємо нерівність (при q>3)

$$\int\limits_{\Omega_\tau}\Big[\frac{1}{2}|u_{tt}^N|^2 + \frac{A_2}{2}\sum_{i,j=1}^{n}|u_{tx_ix_j}^N|^2 + \frac{B_2(q-1)}{2}\sum_{i=1}^{n}|u_{x_i}^N|^{q-2}|u_{tx_i}^N|^2\Big]dx + \int\limits_{Q_\tau}\Big[\Big(A_0-\frac{B_{0,0}\delta_2^2}{2}\Big)|u_{tt}^N|^2 +$$

$$+A_1(p-1)\sum_{i=1}^{n}|u_{tx_i}^N|^{p-2}|u_{ttx_i}^N|^2 + B_1(m-1)|u_t^N|^{m-2}|u_{tt}^N|^2\Big]dxdt \le \frac{1}{m\delta_2^m}\int\limits_{Q_\tau}|u_t^N|^m\,dxdt +$$

$$+\frac{M_2(m-2)(r-1)}{2m\delta_2^{2m/(m-2)}}\int\limits_0^\tau\Big(\int\limits_{\Omega_\tau}\sum_{i,j=1}^{n}|u_{x_ix_j}^N|^2\,dx\Big)^{(r-2)m/(m-2)}dt + \tag{14}$$

$$+\frac{3(q-1)(q-2)B_{2,0}M_1}{2q}\int\limits_0^\tau\Big(\int\limits_{\Omega_\tau}\sum_{i,j=1}^{n}|u_{tx_ix_j}^N|^2\,dx\Big)^{q/2}dt + \frac{(q-1)(q-2)(q-3)}{2q}\int\limits_{Q_\tau}\sum_{i=1}^{n}|u_{x_i}^N|^q\,dxdt +$$

$$+\int_{\Omega_0}[\frac{1}{2}|u_{tt}^N|^2+\frac{A_{2,0}+1}{4}\sum_{i,j=1}^{n}|u_{1x_ix_j}^N|^2+\frac{B_{2,0}(q-1)}{2}\sum_{i=1}^{n}|u_{0x_i}^N|^{q-2}|u_{1x_i}^N|^2]dx,\ \tau\in[0,T_0].$$

Виберемо $\delta_2<\frac{2A_0}{B_{0,0}}$, тоді підінтегральний вираз лівої частини останньої нерівності буде додатним.

Оцінимо $\int_{\Omega_0}|u_{tt}^N|^2\,dz$. Домножимо (6) на $c_{ktt}^N(0)$ і підсумуємо за k від 1 до N. Отримаємо

$$\int_{\Omega_0}[|u_{tt}^N|^2+\sum_{i,j,s,l=1}^{n}(a_{ij}^{sl}(x)u_{0x_ix_j}^N)_{x_sx_l}u_{tt}^N-\sum_{i=1}^{n}(a_i(x)|u_{1x_i}^N|^{p-2}u_{1x_i}^N)_{x_i}u_{tt}^N-$$
$$-\sum_{i=1}^{n}(b_i(x)|u_{0x_i}^N|^{q-2}u_{0x_i}^N)_{x_i}u_{tt}^N-b_0(x)|u_0^N|^{r-2}u_0^Nu_{tt}^N+a_0(x)u_1^Nu_{tt}^N+\tag{15}$$
$$+b_1(x)|u_1^N|^{m-2}u_1^Nu_{tt}^N]dx=0.$$

Після нескладних перетворень з (15) одержимо

$$(1-3\delta_3)\int_{\Omega_0}|u_{tt}^N|^2\,dx\le\frac{1}{2\delta_3}\int_{\Omega_0}\Bigg([\sum_{i,j,s,l=1}^{n}(a_{ij}^{sl}(x)u_{0x_ix_j}^N)_{x_sx_l}]^2+$$
$$+[\sum_{i=1}^{n}(a_i(x)|u_{1x_i}^N|^{p-2}u_{1x_i}^N)_{x_i}]^2+[\sum_{i=1}^{n}(b_i(x)|u_{0x_i}^N|^{q-2}u_{0x_i}^N)_{x_i}]^2+$$
$$+[a_0(x)u_1^N]^2+[b_0(x)|u_0^N|^{r-2}u_0^N]^2+[b_1(x)|u_1^N|^{m-2}u_1^N]^2\Bigg)dx,$$

де $0<\delta_3<\frac{1}{3}$.

Враховуючи умови на u_0,u_1 і коефіцієнти та параметри рівняння (1), одержимо

$$\int_{\Omega_0}|u_{tt}^N|^2\,dx\le\mu_5,\tag{16}$$

де μ_5 – деяка стала, яка не залежить від N.

Отже, з (14) одержимо нерівність

$$\int_{\Omega_\tau}\sum_{i,j=1}^{n}|u_{tx_ix_j}^N|^2\,dx\le\mu_6+\mu_7\int_0^\tau(\int_{\Omega_\tau}\sum_{i,j=1}^{n}|u_{tx_ix_j}^N|^2\,dx)^{q/2}dt,\ \tau\in[0,T_0],\tag{17}$$

де μ_6,μ_7 – деякі сталі, які не залежать від N.

До нерівності (17) знову застосуємо лему Біхарі [[3], с. 110]

$$\int_{\Omega_\tau}\sum_{i,j=1}^{n}|u_{tx_ix_j}^N|^2\,dx\le\frac{\mu_6}{\left[1-\left(\frac{q}{2}-1\right)\mu_6^{q/2-1}\mu_7\tau\right]^{\frac{1}{q-2}}},\tag{18}$$

де $\tau\in[0,T_1]$, $T_1\le T_0$ і $T_1<\frac{2}{(q-2)\mu_6^{q/2-1}\mu_7}$. Тоді на проміжку $[0,T_1]$, $T_1<T$ з (14), (16) і (18) одержимо оцінку

$$\int_{\Omega_\tau}[|u_{tt}^N|^2+\sum_{i,j=1}^{n}|u_{tx_ix_j}^N|^2+\sum_{i=1}^{n}|u_{x_i}^N|^{q-2}|u_{tx_i}^N|^2]dx+$$

$$+\int_{Q_\tau}[|u_{tt}^N|^2+\sum_{i=1}^{n}|u_{tx_1}^N|^{p-2}|u_{ttx_i}^N|^2+|u_t^N|^{m-2}|u_{tt}^N|^2]dxdt\le\mu_8.$$

Зазначимо, що $T=\min\{\frac{1}{(p-2)\mu_2^{p-2}\mu_1},\frac{2}{(q-2)\mu_7\mu_6^{(q-2)/2}}\}$.

Отже,

$$\|u_t^N\|_{L^\infty((0,T_1);H_0^2(\Omega))}\le\mu_8,\ \|u_{tt}^N\|_{L^\infty((0,T_1);L^2(\Omega))}\le\mu_8,$$

$$\||u_{x_i}^N|^{q-2}|u_{tx_i}^N|^2\|_{L^\infty((0,T_1);L^1(\Omega))}\le\mu_8, \tag{19}$$

де стала μ_8 не залежить від N. Аналогічні оцінки одержимо і для $q=3$.

На підставі (12), (19) існує підпослідовність $\{u^{N_k}\}\subset\{u^N\}$ така, що

$$u^{N_k}\to u \text{ *–слабко в } L^\infty((0,T_1);H_0^2(\Omega)\cap W_0^{1,q}(\Omega)), \tag{20}$$

$$u_t^{N_k}\to u_t \text{ *–слабко в } L^\infty((0,T_1);H_0^2(\Omega)),$$

$$u_t^{N_k}\to u_t \text{ слабко в } L^p((0,T_1);W_0^{1,p}(\Omega))\cap L^m((0,T_1);L^m(\Omega)),$$

$$u_{tt}^{N_k}\to u_{tt} \text{ *–слабко в } L^\infty((0,T_1);L^2(\Omega)) \text{ при } N_k\to\infty.$$

Крім того,

$$\int_{Q_{T_1}}\left|\sum_{i=1}^{n}a_i(x)|u_{tx_i}^N|^{p-2}u_{tx_i}^N\right|^{p'}dxdt\le\mu_9,\quad \int_{Q_{T_1}}\left|\sum_{i=1}^{n}b_i(x)|u_{x_i}^N|^{q-2}u_{x_i}^N\right|^{q'}dxdt\le\mu_{10},$$

$$\int_{Q_{T_1}}\left|b_0(x)|u^N|^{r-2}u^N\right|^{r'}dxdt\le\mu_{11},\quad \int_{Q_{T_1}}\left|b_1(x)|u_t^N|^{m-2}u_t^N\right|^{m'}dxdt\le\mu_{12}.$$

Введемо оператор

$$A: L^p((0,T_1);W_0^{1,p}(\Omega))\cap L^m((0,T_1);L^m(\Omega))\to L^{p'}((0,T_1);(W_0^{1,p}(\Omega))^*)+L^{m'}((0,T_1);L^{m'}(\Omega))$$

формулою

$$\langle A(u_t),v\rangle=\int_{Q_{T_1}}[\sum_{i=1}^{n}a_i(x)|u_{tx_i}|^{p-2}u_{tx_i}v_{x_i}+b_1(x)|u_t|^{m-2}u_tv]dxdt,$$

де $\langle\cdot,\cdot\rangle$ – скалярний добуток між елементами простору $L^{p'}((0,T_1);(W_0^{1,p}(\Omega))^*)+L^{m'}((0,T_1);L^{m'}(\Omega))$ і $L^p((0,T_1);W_0^{1,p}(\Omega))\cap L^m((0,T_1);L^m(\Omega))$.

З отриманих оцінок випливає, що

$$b_0(x)|u^{N_k}|^{r-2}u^{N_k}\to\chi_0 \text{ слабко в } L^{r'}((0,T_1);L^{r'}(\Omega)),$$

$$\sum_{i=1}^{n}b_i(x)|u_{x_i}^{N_k}|^{q-2}u_{x_i}^{N_k}\to\chi_1 \text{ слабко в } L^{q'}((0,T_1);(W_0^{1,q}(\Omega))^*),$$

$$A(u_t^{N_k})\to\chi_2 \text{ слабко в } L^{p'}((0,T_1);(W_0^{1,p}(\Omega))^*)+L^{m'}((0,T_1);L^{m'}(\Omega)) \text{ при } N_k\to\infty.$$

Зазначимо, що послідовність $\{u^N\}$ обмежена в $L^2((0,T_1);H_0^2(\Omega))$, а послідовність $\{u_t^N\}$ обмежена в $L^q((0,T_1);W_0^{1,q}(\Omega))$. Оскільки $H_0^2(\Omega)\subset W_0^{1,q}(\Omega)$ компактно при

$q \in \left[3, \frac{2n}{n-2}\right), n \in \{3,4,5\}$ і при $q \in [3,+\infty), n \in \{1,2\}$, то на підставі теореми 5.1 [2, с. 70] можемо вважати, що $u^{N_k} \to u$ сильно в $L^q((0,T_1);W_0^{1,q}(\Omega))$ і майже всюди в Q_{T_1}.

Тому

$$\chi_1 = \sum_{i=1}^{n} b_i(x)\,|u_{x_i}|^{q-2}\,u_{x_i}.$$

Аналогічно, враховуючи те, що за умовою теореми (при вибраних параметрах r і n) $H_0^2(\Omega) \subset L^r(\Omega)$ компактно, одержимо рівність

$$\chi_0 = b_0(x)\,|u|^{r-2}\,u \text{ майже всюди в } Q_{T_1}.$$

Врахувавши (6), легко отримати рівність

$$\int_{Q_\tau} [u_{tt}\eta + \sum_{i,j,s,l=1}^{n} a_{ij}^{sl}(x) u_{x_i x_j} \eta_{x_s x_l} + \sum_{i=1}^{n} b_i(x)\,|u_{x_i}|^{q-2}\,u_{x_i}\eta_{x_i} + \tag{21}$$

$$+ a_0(x) u_t \eta - b_0(x)\,|u|^{r-2}\,u\eta]dxdt + \langle \chi_2, \eta \rangle = 0,$$

яка виконується для довільних $\eta \in H_0^2(\Omega) \cap W_0^{1,\max\{p,q\}}(\Omega) \cap L^{\max\{m,r\}}(\Omega)$ і всіх $\tau \in (0,T_1)$.

Далі, використавши метод монотонності, доведемо, що $A(u_t) = \chi_2$. Розглянемо

$$0 \le \langle A(u_t^{N_k}) - A(v), u_t^{N_k} - v \rangle = \langle A(u_t^{N_k}), u_t^{N_k} \rangle - \langle A(u_t^{N_k}), v \rangle - \langle A(v), u_t^{N_k} - v \rangle =$$

$$= \int_{Q_{T_1}} [b_0(x)\,|u^{N_k}|^{r-2}\,u^{N_k} u_t^{N_k} - u_{tt}^{N_k} u_t^{N_k} - \sum_{i,j,s,l=1}^{n} a_{ij}^{sl}(x) u_{x_i x_j}^{N_k} u_{t x_s x_l}^{N_k} -$$

$$- \sum_{i=1}^{n} b_i(x)\,|u_{x_i}^{N_k}|^{q-2}\,u_{x_i}^{N_k} u_{t x_i}^{N_k} - a_0(x)\,|u_t^{N_k}|^2]dxdt - \langle A(u_t^{N_k}), v \rangle - \langle A(v), u_t^{N_k} - v \rangle.$$

Перейдемо в цій рівності до верхньої границі при $N_k \to \infty$ і, врахувавши лему 5.3 [[2], с. 20], отримаємо

$$0 \le \int_{Q_{T_1}} [b_0(x)\,|u|^{r-2}\,u_t - u_{tt} u_t - \sum_{i,j,s,l=1}^{n} a_{ij}^{sl}(x) u_{x_i x_j} u_{t x_s x_l} - \tag{22}$$

$$- \sum_{i=1}^{n} b_i(x)\,|u_{x_i}|^{q-2}\,u_{x_i} u_{t x_i} - a_0(x)\,|u_t|^2]dxdt - \langle \chi_2, v \rangle - \langle A(v), u_t - v \rangle.$$

В (21) приймемо $\eta = u_t$ і отриману рівність додамо до (22), одержимо

$$\langle \chi_2 - A(v), u_t - v \rangle \ge 0.$$

Приймемо $u_t - v = \lambda w,$ де λ – додільне додатне дійсне число, а $w \in L^p((0,T_1);W_0^{1,p}(\Omega)) \cap L^m((0,T_1);L^m(\Omega)),$ тоді

$$\langle \chi_2 - A(u_t - \lambda w), w \rangle \ge 0.$$

Оскільки $\lambda > 0,$ то можемо поділити отриману нерівність на λ. Спрямуємо λ до нуля і, враховуючи семінеперервність оператора $A,$ отримаємо

$$\langle \chi_2 - A(w), w \rangle \ge 0.$$

Оскільки w довільне, то $\chi_2 = A(u_t)$.

З рівності (21) випливає, що функція u задовольняє рівняння (1) в сенсі розподілів, а з рівняння (1) легко одержуємо інтегральну рівність (4).

Залишилося довести, що виконуються початкові умови. З отриманих оцінок випливає, що $u:[0,T_1]\to H_0^2(\Omega)$ неперервна функція, але $u^{N_k}(\cdot,0)\to u(\cdot,0)$ слабко в $H_0^2(\Omega)$ і $u^{N_k}(\cdot,0)=u_0^{N_k}(\cdot)\to u_0(\cdot)$ в $H_0^2(\Omega)$, тому $u(x,0)=u_0(x)$.

Оскільки $u_{tt}\in L^\infty((0,T_1);H_0^1(\Omega))$, $u_t\in L^\infty((0,T_1);H_0^2(\Omega))$, то $u_t:[0,T_1]\to H_0^1(\Omega)$ – неперервна функція. Отримаємо, що $u_t^{N_k}(\cdot,0)\to u_t(\cdot,0)$ слабко в $H_0^1(\Omega)$, але $u_t^{N_k}(\cdot,0)=u_1^{N_k}(\cdot)\to u_1(\cdot)$ в $H_0^1(\Omega)$, тому $u_t(x,0)=u_1(x)$.

Отже, теорема доведена.

3. ІСНУВАННЯ ТА НЕІСНУВАННЯ ГЛОБАЛЬНИХ РОЗВ'ЯЗКІВ

Лема 1. *Нехай виконуються умови* (**A**) *і* (**B**), *а також* $u_0\in H_0^2(\Omega)\cap W_0^{1,q}(\Omega)\cap L^r(\Omega)$, $u_1\in L^2(\Omega)$ *і* $E(0)<0$. *Тоді* $E(t)<0$ *для всіх* $t\ge 0$, *для яких визначений розв'язок задачі* (1)-(3).

Доведення. На підставі означення продиференціюємо (5) за t. Тоді

$$E'(t)=\int_{\Omega_t}[u_tu_{tt}+\sum_{i,j,s,l=1}^{n}a_{ij}^{sl}(x)u_{x_ix_j}u_{tx_sx_l}+\sum_{i=1}^{n}b_i(x)|u_{x_i}|^{q-2}u_{x_i}u_{tx_i}-b_0(x)|u|^{r-2}uu_t]dx,$$

а з рівності (4) при $v=u_t$ одержимо

$$\int_{\Omega_t}[u_{tt}u_t+\sum_{i,j,s,l=1}^{n}a_{ij}^{sl}(x)u_{x_ix_j}u_{tx_sx_l}+\sum_{i=1}^{n}a_i(x)|u_{tx_i}|^p+\sum_{i=1}^{n}b_i(x)|u_{x_i}|^{q-2}u_{x_i}u_{tx_i}+$$
$$+b_1(x)|u_t|^m+a_0(x)|u_t|^2-b_0(x)|u|^{r-2}uu_t]dx.$$

Отже,

$$E'(t)=-\int_{\Omega_t}[\sum_{i=1}^{n}a_i(x)|u_{tx_i}|^q+b_1(x)|u_t|^m+a_0(x)|u_t|^2]dx\le \tag{23}$$
$$\le-\int_{\Omega_t}[A_1\sum_{i=1}^{n}|u_{tx_i}|^q+B_1|u_t|^m+A_0|u_t|^2]dx\le 0.$$

За умовою теореми $E(0)<0$, тому і $E(t)<0$ для майже всіх $t\ge 0$.

Теорема 2. *Нехай виконуються умови* (**A**) *і* (**B**); $u_0\in H_0^2(\Omega)\cap W_0^{1,q}(\Omega)\cap L^r(\Omega)$, $u_1\in L^2(\Omega)$ *і* $q>2,\ 2<p<r<m$ *і* $m\le\frac{pn}{n-p}$ *при* $n>p$ *і* $m>2$ *при* $n\le p$. *Тоді існує глобальний розв'язок задачі* (1)-(3) *і виконується нерівність*

$$G(t)\le G(0)e^{Mt},$$

де M *– додатна стала, яка залежить від вихідних даних задачі* (1)-(3).

Доведення. Розглянемо

$$G'(t)=E'(t)+2\int_{\Omega_t}b_0(x)|u|^{r-2}uu_tdx.$$

Врахувавши оцінку (23), одержимо

$$G'(t) \le -\int_{\Omega_t}[A_1\sum_{i=1}^{n}|u_{tx_i}|^q + B_1|u_t|^m + A_0|u_t|^2]dx + 2\int_{\Omega_t} b_0(x)|u|^{r-2}uu_t dx.$$

Оцінимо останній доданок отриманої нерівності

$$\int_{\Omega_t} b_0(x)|u|^{r-2}uu_t dx \le \frac{B_{0,0}}{r'\varepsilon_1}\int_{\Omega_t}|u|^r\,dx + \frac{\varepsilon_1}{r}\int_{\Omega_t}|u_t|^r\,dx \le$$

$$\le \frac{B_{0,0}}{r'\varepsilon_1}\int_{\Omega_t}|u|^r\,dx + \frac{\varepsilon_1 M_1}{r}(\int_{\Omega_t}|u_t|^m\,dx)^{r/m},$$

де $\varepsilon_1 > 0, r < m,$ а M_1 – додатна стала, яка залежить від параметрів області Ω.

Далі, використавши теорему про вкладення, одержимо

$$(\int_{\Omega_t}|u_t|^m\,dx)^{r/m} \le \int_{\Omega_t}|u_t|^m\,dx + M_2\int_{\Omega_t}\sum_{i=1}^{n}|u_{tx_i}|^p\,dx,$$

якщо $\frac{p}{m} \le \frac{r}{m} \le 1,$ $m \le \frac{pn}{n-p}$ при $p < n$ і $m > 2$ при $n \le p;$ M_2 – додатна стала, яка також залежить від Ω.

Отже,

$$G'(t) \le -\int_{\Omega_t}[(A_1 - \frac{\varepsilon_1 M_1 M_2}{r})\sum_{i=1}^{n}|u_{tx_i}|^p + (B_1 - \frac{\varepsilon_1 M_1}{r})|u_t|^m + A_0|u_t|^2]dx + \frac{B_{0,0}}{r'\varepsilon_1}\int_{\Omega_t}|u|^r\,dx,$$

але

$$G(t) \ge M_3\int_{\Omega_t}[|u_t|^2 + \sum_{i,j=1}^{n}|u_{x_ix_j}|^2 + |u|^r + |u_{x_i}|^q\,dx]dx,\ M_3 > 0, \tag{24}$$

тому

$$G'(t) \le -\int_{\Omega_t}[(A_1 - \frac{\varepsilon_1 M_1 M_2}{r})\sum_{i=1}^{n}|u_{tx_i}|^p + (B_1 - \frac{\varepsilon_1 M_1}{r})|u_t|^m +$$

$$+ A_0|u_t|^2]dx + M_4 G(t),\ M_4 > 0.$$

Виберемо $\varepsilon_1 < \min\left\{\frac{A_1 r}{M_1 M_2}; \frac{B_1 r}{M_1}\right\},$ тоді одержимо нерівність

$$G'(t) \le M_4 G(t). \tag{25}$$

Тепер з оцінки (24) і умов теореми 2 отримаємо

$$G(0) \ge M_3\int_{\Omega_0}[|u_1|^2 + \sum_{i,j=1}^{n}|u_{0x_ix_j}|^2 + |u_0|^r + |u_{0x_i}|^q\,dx]dx > 0.$$

Тому, проінтегрувавши нерівність (25) за t в межах від 0 до $t,$ одержимо

$$G(t) \le G(0)e^{M_4 t}.$$

Отже, теорема 2 доведена.

Теорема 3. *Нехай виконуються умови* (**A**) *і* (**B**), *а також* $u_0 \in H_0^2(\Omega) \cap W_0^{1,q}(\Omega),$ $u_1 \in L^2(\Omega)$ *і* $E(0) < 0,$ *і крім того,* $2 < m < r,$ $r \le \frac{2n}{n-4}$ *при*

$n>4$ *і* $r>2$ *при* $n\in\{1,...,4\}$, $q\le\dfrac{2n}{n-2}$ *при* $n>2$ *і* $q>2$ *при* $n\in\{1,2\}$, $2<p<q$, $\min\{4;q\}<r$. *Тоді не існує глобального узагальненого розв'язку задачі* (1)-(3).

Доведення. Проведемо від супротивного. Припустимо, що існує глобальний узагальнений розв'язок u задачі (1)-(3).

Введемо позначення

$$H(t)=-E(t),\ \ L(t)=[H(t)]^{1-\alpha}+\varepsilon\int\limits_{\Omega_t}[u_tu+\frac{1}{2}a_0(x)|u|^2]dx,$$

де $0<\alpha<1$, $\varepsilon>0$.

Розглянемо

$$L'(t)=(1-\alpha)[H(t)]^{-\alpha}H'(t)+\varepsilon\int\limits_{\Omega_t}[|u_t|^2+u_{tt}u+a_0(x)uu_t]dx=$$

$$=(1-\alpha)[H(t)]^{-\alpha}H'(t)+\varepsilon\int\limits_{\Omega_t}[|u_t|^2-\sum_{i,j,s,l=1}^{n}a_{ij}^{sl}(x)u_{x_ix_j}u_{tx_sx_l}-\sum_{i=1}^{n}a_i(x)|u_{tx_i}|^{p-2}u_{tx_i}u_{x_i}-$$

$$-\sum_{i=1}^{n}b_i(x)|u_{x_i}|^q-b_1(x)|u_t|^{m-2}u_tu+b_0(x)|u|^r]dx+\widetilde{m}\varepsilon H(t)+$$

$$+\frac{\widetilde{m}\varepsilon}{2}\int\limits_{\Omega_t}[|u_t|^2+\sum_{i,j,s,l=1}^{n}a_{ij}^{sl}(x)u_{x_ix_j}u_{x_sx_l}]dx+\frac{\widetilde{m}\varepsilon}{q}\int\limits_{\Omega_t}\sum_{i=1}^{n}b_i(x)|u_{x_i}|^q\,dx-$$

$$-\frac{\widetilde{m}\varepsilon}{r}\int\limits_{\Omega_t}b_0(x)|u|^r\,dx=(1-\alpha)[H(t)]^{-\alpha}H'(t)+\widetilde{m}\varepsilon H(t)+\varepsilon(1+\frac{\widetilde{m}}{2})\int\limits_{\Omega_t}|u_t|^2\,dx+$$

$$+\varepsilon(\frac{\widetilde{m}}{2}-1)\int\limits_{\Omega_t}\sum_{i,j,s,l=1}^{n}a_{ij}^{sl}(x)u_{x_ix_j}u_{tx_sx_l}dx+\varepsilon(\frac{\widetilde{m}}{q}-1)\int\limits_{\Omega_t}\sum_{i=1}^{n}b_i(x)|u_{x_i}|^q\,dx+$$

$$+\varepsilon(1-\frac{\widetilde{m}}{r})\int\limits_{\Omega_t}b_0(x)|u|^r\,dx-\varepsilon\int\limits_{\Omega_t}(\sum_{i=1}^{n}a_i(x)|u_{tx_i}|^{p-2}u_{tx_i}u_{x_i}+b_1(x)|u_t|^{m-2}u_tu)dx.$$

Нехай $\min\{4;q\}<\widetilde{m}<r$.

Оцінимо від'ємні доданки останньої рівності

$$J_1:=\int\limits_{\Omega_t}b_1(x)|u_t|^{m-2}u_tudx\le\frac{\widetilde{B}_1\delta_1}{m'B_1}\int\limits_{\Omega_t}b_1(x)|u_t|^m\,dx+\frac{1}{\delta_1m}\int\limits_{\Omega_t}|u|^m\,dx,$$

де $\delta_1>0$, $\widetilde{B}_1=\operatorname*{ess\,sup}_{\Omega}|b_1(x)|^{m'}$;

$$J_2:=\int\limits_{\Omega_t}\sum_{i=1}^{n}a_i(x)|u_{tx_i}|^{p-2}u_{tx_i}u_{x_i}dx\le\frac{\widetilde{A}_1\delta_2}{p'A_1}\int\limits_{\Omega_t}\sum_{i=1}^{n}a_i(x)|u_{tx_i}|^p\,dx+\frac{1}{\delta_2p}\int\limits_{\Omega_t}\sum_{i=1}^{n}|u_{x_i}|^p\,dx,$$

де $\delta_2>0$, $\widetilde{A}_1=\operatorname*{ess\,sup}_{\Omega}|a_i(x)|^{p'}$.

Виберемо $\delta_1=\dfrac{(1-\alpha)H^{-\alpha}(t)}{\delta_3}$ і $\delta_2=\dfrac{(1-\alpha)H^{-\alpha}(t)}{\delta_4}$, де δ_3,δ_4 – додатні сталі. Тоді

$$J_1 \le \frac{\widetilde{B}_1(1-\alpha)H^{-\alpha}(t)}{B_1\delta_3 m'}\int_{\Omega_t} b_1(x)|u_t|^m\,dx + \frac{H^{\alpha}(t)\delta_3}{m(1-\alpha)}\int_{\Omega_t}|u|^m\,dx,$$

$$J_2 \le \frac{\widetilde{A}_1(1-\alpha)H^{-\alpha}(t)}{A_1\delta_4 p'}\int_{\Omega_t}\sum_{i=1}^{n} a_i(x)|u_{tx_i}|^p\,dx + \frac{H^{\alpha}(t)\delta_4}{p(1-\alpha)}\int_{\Omega_t}\sum_{i=1}^{n}|u_{x_i}|^p\,dx.$$

Далі

$$H^{\alpha}(t)\int_{\Omega_t}|u|^m\,dx \le \Big(\int_{\Omega_t}|u|^r\,dx\Big)^{\alpha}\int_{\Omega_t}|u|^m\,dx \le \Big(\int_{\Omega_t}|u|^r\,dx\Big)^{\alpha+\frac{m}{r}},$$

$$H^{\alpha}(t)\int_{\Omega_t}\sum_{i=1}^{n}|u_{x_i}|^p\,dx \le \Big(\int_{\Omega_t}|u|^r\,dx\Big)^{\alpha}\int_{\Omega_t}\sum_{i=1}^{n}|u_{x_i}|^p\,dx \le$$

$$\le \alpha\int_{\Omega_t}|u|^r\,dx + (1-\alpha)\Big(\int_{\Omega_t}\sum_{i=1}^{n}|u_{x_i}|^q\,dx\Big)^{\frac{p}{q(1-\alpha)}}.$$

Тепер, використавши в останніх нерівностях теорему вкладення, одержимо

$$\Big(\int_{\Omega_t}|u|^r\,dx\Big)^{\alpha+\frac{m}{r}} \le \int_{\Omega_t}|u|^r\,dx + K_1\int_{\Omega_t}\sum_{i,j=1}^{n}|u_{x_i x_j}|^2\,dx \le$$

$$\le \frac{1}{B_0}\int_{\Omega_t} b_0(x)|u|^r\,dx + \frac{K_1}{A_2}\int_{\Omega_t}\sum_{i,j,s,l=1}^{n} a_{ij}^{sl}(x)u_{x_i x_j}u_{x_s x_l}\,dx$$

при $2 < m < r$; $r \le \dfrac{2n}{n-4}$, коли $n > 4$ і $r > 2$, коли $n \in \{1,\ldots,4\}$; $\alpha \le \dfrac{r-m}{m}$;

$$\alpha\int_{\Omega_t}|u|^r\,dx + (1-\alpha)\Big(\int_{\Omega_t}\sum_{i=1}^{n}|u_{x_i}|^q\,dx\Big)^{\frac{p}{q(1-\alpha)}} \le \frac{\alpha}{B_0}\int_{\Omega_t} b_0(x)|u|^r\,dx +$$

$$+\frac{(1-\alpha)}{B_2}\int_{\Omega_t}\sum_{i=1}^{n} b_i(x)|u_{x_i}|^q\,dx + \frac{(1-\alpha)K_2}{A_2}\int_{\Omega_t}\sum_{i,j,s,l=1}^{n} a_{ij}^{sl}(x)u_{x_i x_j}u_{x_s x_l}\,dx$$

при $q > p > 2$, $\alpha < \dfrac{q-p}{q}$; $q \le \dfrac{2n}{n-2}$, якщо $n > 2$ і $q > 2$, якщо $n \in \{1,2\}$. Тут K_1, K_2 – додатні сталі.

Отже,

$$L'(t) \ge (1-\alpha)[H(t)]^{-\alpha}\int_{\Omega_t}\Big[\Big(1-\frac{\widetilde{A}_1\varepsilon}{\delta_4 p' A_1}\Big)\sum_{i=1}^{n} a_i(x)|u_{tx_i}|^q + \Big(1-\frac{\widetilde{B}_1\varepsilon}{\delta_3 m' B_1}\Big)b_1(x)|u_t|^m\Big]dx +$$

$$+\varepsilon\Big(1+\frac{\widetilde{m}}{2}\Big)\int_{\Omega_t}|u_t|^2\,dx + \varepsilon\Big(\frac{\widetilde{m}}{2}-1-\frac{\delta_3 K_1}{m(1-\alpha)A_2}-\frac{\delta_4 K_2}{pA_2}\Big)\int_{\Omega_t}\sum_{i,j,s,l=1}^{n} a_{ij}^{sl}(x)u_{x_i x_j}u_{x_s x_l}\,dx +$$

$$+\varepsilon\Big(\frac{\widetilde{m}}{q}-1-\frac{\delta_4}{pB_2}\Big)\int_{\Omega_t}\sum_{i=1}^{n} b_i(x)|u_{x_i}|^q\,dx +$$

$$+\varepsilon\Big(1-\frac{\widetilde{m}}{r}-\frac{\delta_3}{m(1-\alpha)B_0}-\frac{\delta_4\alpha}{p(1-\alpha)B_0}\Big)\int_{\Omega_t} b_0(x)|u|^r\,dx + \widetilde{m}\varepsilon H(t).$$

Нехай $\varepsilon, \delta_3, \delta_4$ задовольняють нерівності

$$1-\frac{\widetilde{A}_1\varepsilon}{\delta_4 p' A_1}\geq 0,\quad 1-\frac{\widetilde{B}_1\varepsilon}{\delta_3 m' B_1}\geq 0,\quad \frac{\widetilde{m}}{2}-1-\frac{\delta_3 K_1}{m(1-\alpha)A_2}-\frac{\delta_4 K_2}{pA_2}>0,$$

$$\frac{\widetilde{m}}{q}-1-\frac{\delta_4}{pB_2}>0,\quad 1-\frac{\widetilde{m}}{r}-\frac{\delta_3}{m(1-\alpha)B_0}-\frac{\delta_4\alpha}{p(1-\alpha)B_0}>0,$$

тоді

$$L'(t)\geq K_3\varepsilon[H(t)+\int_{\Omega_t}(|u_t|^2+|u|^r+\sum_{i=1}^n|u_{x_i}|^q+\sum_{i,j=1}^n|u_{x_ix_j}|^2)dx], \tag{26}$$

де K_3 – додатна стала, яка залежить від коефіцієнтів і параметрів рівняння (1) та області Ω.

Тепер розглянемо

$$[L(t)]^{\frac{1}{1-\alpha}}=([H(t)]^{1-\alpha}+\varepsilon\int_{\Omega_t}[u_tu+\frac{1}{2}a_0(x)|u|^2]dx)^{\frac{1}{1-\alpha}}\leq$$

$$\leq K_4H(t)+K_5(\int_{\Omega_t}u_tudx)^{\frac{1}{1-\alpha}}+K_6(\int_{\Omega_t}|u|^2\,dx)^{\frac{1}{1-\alpha}},$$

де K_i ($i\in\{4,...,6\}$) – додатні сталі.

Оцінимо доданки останньої нерівності, використавши теорему вкладення

$$J_3:=(\int_{\Omega_t}u_tudx)^{\frac{1}{1-\alpha}}\leq(\int_{\Omega_t}|u_t|^2\,dx)^{\frac{1}{2(1-\alpha)}}(\int_{\Omega_t}|u|^2\,dx)^{\frac{1}{2(1-\alpha)}}\leq$$

$$\leq\frac{1}{2(1-\alpha)}\int_{\Omega_t}|u_t|^2\,dx+\frac{1-2\alpha}{2(1-\alpha)}(\int_{\Omega_t}|u|^2\,dx)^{\frac{1}{1-2\alpha}}\leq\frac{1}{2(1-\alpha)}\int_{\Omega_t}|u_t|^2\,dx+$$

$$+\frac{(1-2\alpha)K_7}{2(1-\alpha)}(\int_{\Omega_t}|u|^r\,dx)^{\frac{2}{r(1-2\alpha)}}\leq\frac{1}{2(1-\alpha)A_0}\int_{\Omega_t}a_0(x)|u_t|^2\,dx+$$

$$+\frac{(1-2\alpha)K_7}{2(1-\alpha)B_0}\int_{\Omega_t}b_0(x)|u|^r\,dx+\frac{(1-2\alpha)K_7K_1}{2(1-\alpha)A_2}\int_{\Omega_t}\sum_{i,j,s,l=1}^n a_{ij}^{sl}(x)u_{x_ix_j}u_{x_sx_l}dx$$

при $\alpha\leq\frac{r-2}{2r}$, K_7 – також додатна стала;

$$J_4:=(\int_{\Omega_t}|u|^2\,dx)^{\frac{1}{1-\alpha}}\leq K_7(\int_{\Omega_t}|u|^r\,dx)^{\frac{2}{r(1-\alpha)}}\leq$$

$$\leq\frac{K_7}{B_0}\int_{\Omega_t}b_0(x)|u|^r\,dx+\frac{K_7K_1}{A_2}\int_{\Omega_t}\sum_{i,j,s,l=1}^n a_{ij}^{sl}(x)u_{x_ix_j}u_{x_sx_l}dx$$

при $\alpha\leq\frac{r-2}{r}$.

Тоді

$$[L(t)]^{\frac{1}{1-\alpha}}\leq K_8[H(t)+\int_{\Omega_t}(|u_t|^2+|u|^r+\sum_{i=1}^n|u_{x_i}|^q+\sum_{i,j=1}^n|u_{x_ix_j}|^2)dx],\ K_8>0. \tag{27}$$

З нерівностей (26) і (27) одержуємо

$$L'(t) \geq K_9 [L(t)]^{\frac{1}{1-\alpha}}, \quad K_9 > 0. \tag{28}$$

Оскільки $H(0) = \lambda > 0$, $H'(t) \geq 0$, то $H(t) \geq \lambda$. Тому, вибравши $\varepsilon > 0$ достатньо малим, можемо гарантувати, що

$$L(0) = [H(0)]^{1-\alpha} + \varepsilon \int_{\Omega_0} [u_1 u_0 + \frac{1}{2} a_0(x) | u_0 |^2] dx > \frac{\lambda}{2} > 0.$$

Замінимо $\gamma = \dfrac{1}{1-\alpha}$ і проінтегруємо нерівність (28) від 0 до t. Тоді

$$L(t) \leq \frac{L(0)}{[1 - K_9(\gamma - 1)[L(0)]^{\gamma-1} t]^{\frac{1}{1-\gamma}}},$$

звідки і випливає існування скінченного T_0 такого, що

$$\lim_{t \to T_0 + 0} L(t) = +\infty \text{ або } \lim_{t \to T_0 + 0} \int_{\Omega_t} | u |^r \, dx = +\infty.$$

Одержане протиріччя завершує доведення теореми 3.

4. ВИСНОВКИ

Отже, використовуючи метод Гальоркіна, методи монотонності та компактності, доведено існування локального узагальненого розв’язку та існування і неіснування глобальних узагальнених розв’язків мішаної задачі для нелінійного параболічного рівняння четвертого порядку за просторовими змінними і другого порядку за часом.

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. *Базиляк Г.* Мішана задача для нелінійного параболічного рівняння четвертого порядку за просторовими змінними в необмеженій за часом області / Г. Базиляк // Вісник Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. – 2010. – Вип. 73. – С. 214-220.
2. *Гаевский Х.* Нелинейные операторные уравнения и операторные дифференциальные уравнения / Х. Гаевский, К. Грегер, К. Захариас. – М.: Мир, 1978. – 336 с.
3. *Демидович Б.П.* Лекции по математической теории устойчивости / Б.П. Демидович. – М.: Наука, 1967. – 472 с.
4. *Коддингтон Э.А.* Теория обыкновенных дифференциальных уравнений / Э.А. Коддингтон, Н. Левинсон. – М.: Изд-во иност. литер., 1958. – 474 с.
5. *Лавренюк С.П.* Необмеженість розв’язків у скінченний момент часу одного слабко нелінійного рівняння четвертого порядку / С.П. Лавренюк, Г.Р. Торган // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2007. – Т. 50, № 3. – С. 88-93.
6. *Торган Г.* Поведінка розв’язків мішаної задачі для параболічного рівняння четвертого порядку на нескінченності / Г. Торган // Вісник Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. – 2008. – Вип. 69. – С. 72-77.
7. *Abeyaratne R.* Implications of viscosity and strain gradient effect for the kinetics of propagating phase boundaries in solids / R. Abeyaratne, J.K. Knowles // SIAM J. Appl. Math. – 1991. – Vol. 51. – P. 1205-1221.
8. *Abeyaratne R.* Kinetic relations and propagation of phase boundaries in solids / R. Abeyaratne, J.K. Knowles // Arch. Rational Mech. Anal. – 1991. – Vol. 114. – P. 119-154.

9. *Rybka P.* Convergence of solutions to the equation of quasi-static approximation of viscoelasticity with capilarity / Piotr Rybka and Karl-Heinz Hoffmann // Journal of math. anal. and appl. – 1998. – Vol. 226. – N. 1. – P. 61-81.
10. *Slemrod M.* Admissibility criteria for propagating phase boundaries in a van der Waals fluid / M. Slemrod // Arch. Rational Mech. Anal. – 1983. – Vol. 81. – P. 37-85.

Стаття: надійшла до редколегії 04.10.2011
доопрацьована 17.11.2011
прийнята до друку 24.11.2011

СУЩЕСТВОВАНИЯ И НЕСУЩЕСТВОВАНИЯ ГЛОБАЛЬНЫХ РЕШЕНИЙ СМЕШАННОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ НЕЛИНЕЙНОГО ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА

Г. Базиляк, В. Кирилич

Львовский национальный университет имени Ивана Франко,
ул. Университетская, 1, Львов, 79000, e-mail: torgan_g@yahoo.com, vkyrylych@ukr.net

Получено достаточные условия существования локального решения, существования и несуществования глобальных решений смешанной задачи для нелинейного параболического уравнения четвертого порядка по пространственным переменным и второго порядка по времени. В доказательстве использованы методы Галёркина, монотонности и компактности.

Ключевые слова: смешанная задача, метод Галёркина, обобщенное решение.

EXISTENCE AND NONEXISTENCE OF GLOBAL SOLUTIONS OF THE INITIAL-BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR NONLINEAR PARABOLIC EQUATION FOUR ORDER WITH RESPECT TO SPATIAL VARIABLES

H. Bazylayk, V. Kyrylych

Ivan Franko National University of Lviv,
Universytetska str, 1, Lviv, 79000, e-mail: torgan_g@yahoo.com, vkyrylych@ukr.net

There obtained sufficient conditions the existence of a local solution, existence and nonexistence of global solutions of the initial-boundary value problem for nonlinear parabolic equation four orders with respect to spatial variable and the second order with respect to the time. There is used the methods of Galerkin, monotony and compactness.

Key words: initial-boundary value problem, Galerkin method, generalized solution.