

**ПРО ЧИСЕЛЬНЕ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ОДНІЄЇ ПРЯМОЇ ЗАДАЧІ ЕІТ
МЕТОДОМ ГРАНИЧНИХ ІНТЕГРАЛЬНИХ РІВНЯНЬ**

К. Бабенко*, Р. Хапко**

**Українська інженерно-педагогічна академія,
вул. Університетська, 16, Харків, 61003, e-mail: kristina_babenko@mail.ru
**Львівський національний університет імені Івана Франка,
вул. Університетська, 1, Львів, 79000, e-mail: chapko@is.lviv.ua*

Розглянуто наближене розв'язування граничної задачі Діріхле для еліптичного рівняння зі змінними коефіцієнтами в плоскій обмеженій однозв'язній області (пряма задача електричної імпедансної томографії). Задача зводиться до знаходження значень функції на системі гладких замкнених кривих, розміщених всередині області. Далі за допомогою функції Леві отримують систему коректних граничних інтегральних рівнянь з невідомими функціями на гладких кривих і з ядрами, які містять особливості різних типів. Чисельне розв'язування інтегральних рівнянь виконують методом тригонометричних квадратур. Наведено результати чисельних експериментів підтверджують ефективність запропонованого методу.

Ключові слова: електрична імпедансна томографія, функції Леві, граничні інтегральні рівняння, тригонометричні квадратури, експоненційна збіжність.

1. ВСТУП

Рівняння в частинних похідних зі змінними коефіцієнтами виникають при математичному моделюванні неоднорідних середовищ, зокрема в електромагнетизмі, електро- і теплопровідності, при поширенні рідин у пористих середовищах і т.д.

Особливий інтерес становлять обернені задачі відновлення (реконструкції) коефіцієнтів диференціального рівняння на основі додаткової інформації про розв'язок. До цього класу проблем належать задачі електричної імпедансної томографії (ЕІТ). Зважаючи на те, що різні матеріали мають різні електричні властивості, існує можливість вивчення їхньої внутрішньої структури на основі визначення електричної провідності. У підсумку ЕІТ є важливим інструментом дослідження внутрішнього зображення недоступних частин об'єктів у таких прикладних застосуваннях: медицина, геофізика, неруйнівне тестування матеріалів тощо. Задачі такого типу нелінійні і некоректні, що потребує застосування спеціальних методів дослідження і наближеного розв'язування (див. огляд [1] і посилання в ньому). Зауважимо також, що в [4] задача ідентифікації коефіцієнтів диференціального рівняння зведена до просторового некоректного інтегрального рівняння першого роду.

Метод граничних інтегральних рівнянь успішно застосовують для розв'язування граничних задач для рівнянь з постійними коефіцієнтами (див., наприклад, [6]). У цьому разі для побудови інтегрального подання розв'язку використовують фундаментальний розв'язок диференціального рівняння. У випадку рівнянь зі змінними коефіцієнтами фундаментального розв'язку або не існує, або його важко знайти. Однак можна використати функцію Леві [9], яка описує головну частину фундаментального розв'язку, але не задовольняє вихідне рівняння. У підсумку диференціальна задача редукується до гранично-просторового (boundary-domain) інтегрального рівняння.

Сформулюємо пряму задачу ЕІТ. Нехай $D \subset \mathbb{R}^2$ - обмежена однозв'язна область з границею $\Gamma_0 \in C^2$. Необхідно знайти функцію $u : D \rightarrow \mathbb{R}$, яка задовольняє еліптичне рівняння зі змінними коефіцієнтами

$$Lu := \operatorname{div}(\sigma \operatorname{grad} u) = 0 \quad \text{в } D \quad (1.1)$$

і граничну умову Діріхле

$$u = f \quad \text{на } \Gamma_0. \quad (1.2)$$

Тут $\sigma \in C^\infty(D)$, $\sigma(x) > 0, x \in D$ і $f \in H^{1/2}(\Gamma_0)$ - задані функції.

Відомо [8, 9], що задача (1.1), (1.2) за згаданих обмежень на σ і f має єдиний розв'язок $u \in H^1(D)$.

Наближене розв'язування граничної задачі (1.1), (1.2) можна виконати методом скінченних елементів (МСЕ) або методом сіток. Ми розглянемо застосування граничних інтегральних рівнянь [6]. Розвинений підхід у майбутньому буде використано при наближеному розв'язуванні оберненої задачі ЕІТ.

2. МОДИФІКОВАНА ЗАДАЧА

Означення 2.1 [9]. Функція $P(x, y)$, $x, y \in D$ називається параметріком (функцією Леві) диференціального оператора L , якщо

$$L_x P(x, y) = \delta(x - y) + V(x, y),$$

де δ - функція Дірака і функція V має слабку особливість при $x = y$.

Не важко пересвідчитись, що у випадку оператора L з (1.1) функція Леві набуде вигляду

$$P(x, y) = \frac{\ln|x - y|}{2\pi\sigma(y)}, \quad x, y \in \mathbb{R}^2, x \neq y,$$

а функція V задається як

$$V(x, y) = \frac{(x - y) \cdot \operatorname{grad}\sigma(x)}{2\pi\sigma(y)|x - y|^2}, \quad x, y \in \mathbb{R}^2, x \neq y.$$

За допомогою функції Леві гранична задача (1.1), (1.2) може бути зведена до системи гранично-просторових інтегральних рівнянь [8, 9]. Подаючи розв'язок у вигляді суми потенціалів

$$u(x) = \int_D \theta(y) P(x, y) dy + \int_{\Gamma_0} \phi(y) P(x, y) ds(y), \quad x \in D,$$

для визначення невідомих функцій θ і ϕ отримаємо систему

$$\begin{cases} \theta(x) + \int_D \theta(y) V(x, y) ds(y) + \int_{\Gamma_0} \phi(y) V(x, y) ds(y) = 0, & x \in D, \\ \int_D \theta(y) P(x, y) ds(y) + \int_{\Gamma_0} \phi(y) P(x, y) ds(y) = f(x), & x \in \Gamma_0. \end{cases} \quad (2.1)$$

Зауважимо, що розмірність вихідної задачі (1.1), (1.2) у цьому разі не зменшилась, на противагу до випадку диференціальних рівнянь з постійними коефіцієнтами. Система інтегральних рівнянь (2.1) є коректною у відповідних просторах [9] і може бути наближено розв'язана придатним чисельним методом, наприклад, проєкційним. Однак матриця отриманої системи лінійних рівнянь буде повністю заповнена. Треба дискретизувати не лише границю області, а й саму область. У підсумку порівняння методу скінченних елементів для (1.1), (1.2) і описаного способу не є на його

користь. Один із варіантів удосконалення методу інтегральних рівнянь – використання локалізованих гранично-просторових інтегральних рівнянь [7]. Його суть – локалізувати параметрикс, що приводить до методу подібного до декомпозиції області.

Наша ідея полягає у зведенні системи гранично-просторових інтегральних рівнянь (2.1) до системи граничних інтегральних рівнянь на деяких, попередньо вибраних, гладких замкнених кривих.

Отже, нехай в області D задано $N \in \mathbb{N}$ замкнених кривих $\Gamma_k \in C^2$, $k = 1, \dots, N$, які не перетинаються. Позначимо $\Gamma = \bigcup_{k=1}^N \Gamma_k$. Модифікуємо задачу (1.1), (1.2) до такої: для заданих σ і f знайти функцію $u: \Gamma \rightarrow \mathbb{R}$, яка задовольняє рівняння (1.1) на Γ і граничну умову (1.2).

3. НЕПРЯМИЙ МЕТОД ГРАНИЧНИХ ІНТЕГРАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

Подамо розв'язок модифікованої задачі у вигляді суми потенціалів

$$u(x) = \sum_{j=0}^N \int_{\Gamma_j} \varphi_j(y) P(x, y) ds(y), \quad x \in \Gamma_k, k = 1, \dots, N, \quad (3.1)$$

де $\varphi_j \in C(\Gamma_j)$ – невідомі густини. Очевидно подання (3.1) є розв'язком модифікованої задачі, якщо густини визначаються з системи граничних інтегральних рівнянь

$$\begin{cases} \varphi_k(x) + \sum_{j=0}^N \int_{\Gamma_j} \varphi_j(y) V(x, y) ds(y) = 0, & x \in \Gamma_k, k = 1, \dots, N, \\ \sum_{j=0}^N \int_{\Gamma_j} \varphi_j(y) P(x, y) ds(y) = f(x), & x \in \Gamma_0. \end{cases} \quad (3.2)$$

Теорема 3.1. Для $f \in H^{1/2}(\Gamma_0)$ існує єдиний розв'язок системи інтегральних рівнянь (3.2)

$$\varphi_0 \in H^{-1/2}(\Gamma_0), \quad \varphi_j \in H^{1/2}(\Gamma_j), \quad j = 1, \dots, N.$$

Доведення. В [8] показано, що гранична задача (1.1), (1.2) має не більше як один розв'язок і для $f \in H^{1/2}(\Gamma_0)$ система гранично-просторових інтегральних рівнянь (2.1) має єдиний розв'язок $\theta \in H^1(D)$ і $\varphi_0 \in H^{-1/2}(\Gamma_0)$. Функції φ_j , $j = 1, \dots, N$ є слідами функції θ на системі кривих Γ_j і, очевидно, вони визначені єдиним чином і належать просторам слідів $H^{1/2}(\Gamma_j)$.

4. МЕТОД КВАДРАТУР

Нехай криві мають параметричні подання

$$\Gamma_k = \{x_k(t) = (x_{1k}(t), x_{2k}(t)), 0 \leq t \leq 2\pi\}, \quad k = 0, \dots, N,$$

де $x_k: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2 - 2\pi$ -періодичні функції з

$$|x_k'(t)| > 0$$

для всіх $t \in [0, 2\pi]$ і $x_k \in C^2([0, 2\pi] \times [0, 2\pi])$. Зважаючи на це, систему інтегральних рівнянь (3.2) можна переписати в такому еквівалентному вигляді:

$$\begin{cases} \mu_k(t) + \frac{1}{2\pi} \sum_{j=0}^N \int_0^{2\pi} \mu_j(\tau) K_{kj}(t, \tau) d\tau = 0, & k = 1, \dots, N, \\ \frac{1}{2\pi} \sum_{j=0}^N \int_0^{2\pi} \mu_j(\tau) H_{0j}(t, \tau) d\tau = g(t), & t \in [0, 2\pi]. \end{cases} \quad (4.1)$$

Тут введено позначення $\mu_k(t) = \varphi_k(x_k(t))$, $g(t) = f(x_0(t))$, $K_{kj}(t, \tau) = 2\pi V(x_k(t), x_j(\tau)) |x'_k(t)| |x'_j(\tau)|$ і $H_{kj}(t, \tau) = 2\pi P(x_k(t), x_j(\tau)) |x'_k(t)| |x'_j(\tau)|$.

Очевидно, що ядра K_{kl} і H_{0j} є неперервними при незбіганні індексів і їхня гладкість залежить від гладкості граничних кривих. Ядра K_{ll} і H_{00} мають особливості типу Коші та логарифмічну, відповідно. Зрозуміло, що відповідні інтеграли в (4.1) розуміють або в сенсі головного значення Коші або як невласні. Після нескладних перетворень ці ядра можна подати у вигляді

$$H_{ll}(t, \tau) = H_{ll}^1(t, \tau) \ln \left(\frac{4}{e} \sin^2 \frac{t-\tau}{2} \right) + H_{ll}^2(t, \tau), \quad K_{ll}(t, \tau) = \cot \frac{\tau-t}{2} \tilde{K}_{ll}(t, \tau),$$

де

$$H_{ll}^1(t, \tau) := \frac{|x'_l(\tau)|}{2\sigma(x_l(\tau))}, \quad H_{ll}^2(t, \tau) = H_{ll}(t, \tau) - H_{ll}^1(t, \tau) \ln \left(\frac{4}{e} \sin^2 \frac{t-\tau}{2} \right)$$

і $\tilde{K}_{ll}(t, \tau) = \tan \frac{\tau-t}{2} K_{ll}(t, \tau)$ з діагональними виразами

$$H_{ll}^2(t, t) = H_{ll}^1(t, t) (2 \ln |x'_l(t)| + 1) \quad \text{і} \quad \tilde{K}_{ll}(t, t) = \frac{x'_l(t) \cdot \text{grad } \sigma(x_l(t))}{4\pi \sigma(x_l(t)) |x'_l(t)|}.$$

На рівновіддаленому поділі $t_j = \frac{j\pi}{M}$, $j = 0, \dots, 2M-1$, $M \in \mathbb{N}$ розглянемо квадратурні формули [2, 6], які відповідають інтегралам у системі (4.1)

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\tau) d\tau \approx \frac{1}{2M} \sum_{j=0}^{2M-1} f(t_j), \quad (4.2)$$

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln \left\{ \frac{4}{e} \sin^2 \frac{t-\tau}{2} \right\} f(\tau) d\tau \approx \sum_{j=0}^{2M-1} R_j(t) f(t_j), \quad (4.3)$$

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cot \frac{\tau-t}{2} f(\tau) d\tau \approx \sum_{j=0}^{2M-1} \tilde{T}_j(t) f(t_j) \quad (4.4)$$

з ваговими функціями

$$R_j(t) = -\frac{1}{2M} \left\{ 1 + 2 \sum_{k=1}^{M-1} \frac{1}{k} \cos k(t-t_j) + \frac{\cos M(t-t_j)}{M} \right\},$$

$$\tilde{T}_j(t) = -\frac{1}{M} \sum_{m=1}^{M-1} \sin m(t-t_j) - \frac{1}{2M} \sin M(t-t_j).$$

Наведені квадратури отримали шляхом заміни гладкої частини f інтеграндів на відповідний інтерполяційний поліном з простору тригонометричних поліномів T_M і подальше точне інтегрування. Зауважимо, що точність цих формул залежить від гладкості функції f .

Використання квадратур (4.2)-(4.4) до інтегралів у системі (4.1) та колокація отриманих апроксимаційних рівнянь з використанням як точок колокації вузлів квадратурних формул приводить до системи лінійних рівнянь

$$\begin{pmatrix} A_{00} & A_{01} \cdots & A_{0N} \\ & \cdots & \\ A_{N0} & A_{N1} \cdots & A_{NN} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{\mu}_0 \\ \vdots \\ \tilde{\mu}_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_0 \\ \vdots \\ b_N \end{pmatrix} \quad (4.5)$$

з коефіцієнтами матриці

$$A_{0k}^{(j)} = \begin{cases} H_{00}^1(t_i, t_j)R_j(t_i) + \frac{1}{2M}H_{00}^2(t_i, t_j), & k=0, \\ \frac{1}{2M}H_{0k}(t_i, t_j), & k \neq 0, \end{cases}$$

$$A_{kl}^{(j)} = \begin{cases} \delta_{ij} + \tilde{T}_j(t_i)K_{kk}(t_i, t_j), & k=l \neq 0, \\ \frac{1}{2M}K_{kl}(t_i, t_j), & k \neq l \neq 0, \end{cases}$$

правими частинами

$$b_k^{(i)} = \begin{cases} g(t_i), & k=0, \\ 0, & k \neq 0 \end{cases}$$

і невідомими $\tilde{\mu}_k = (\tilde{\mu}_k^{(0)}, \dots, \tilde{\mu}_k^{(2M-1)})$, де $\tilde{\mu}_k^{(j)} \approx \mu_k(t_j)$.

Аналогічно до обґрунтування збіжності методу квадратур у просторах Соболева 2π -періодичних функцій $H^p[0, 2\pi]$ для інтегральних рівнянь інших типів [3,5] можна довести таке твердження.

Теорема 4.1. Для достатньо великого M система лінійних рівнянь (4.4) має єдиний розв'язок. Для $\Gamma_k \in C^\infty$, $0 \leq q \leq p$, $\frac{1}{2} < p$, $g \in H^p[0, 2\pi]$ і кожного $k = 1, \dots, N$ справджуються оцінки похибок для $\mu_k \in H^q[0, 2\pi]$ і $\tilde{\mu}_k \in T_M$

$$\|\mu_k - \tilde{\mu}_k\|_q \leq \frac{c_k}{M^{p-q}}, \quad c_k > 0.$$

У випадку аналітичності всіх вхідних даних має місце експоненційна збіжність [5].

Для знаходження наближеного розв'язку модифікованої задачі отримуємо таку формулу:

$$\hat{u}(x_k(t)) = \sum_{j=0}^N \sum_{l=0}^{2M-1} \tilde{\mu}_j^{(l)} \tilde{H}_{kj}(t, t_l), \quad k=1, \dots, N \quad (4.6)$$

з

$$\tilde{H}_{kj}(t, t_l) = \begin{cases} H_{kk}^1(t, t_l)R_l(t) + \frac{1}{2M}H_{kk}^2(t, t_l), & k=j, \\ \frac{1}{2M}H_{kj}(t, t_l), & k \neq j. \end{cases}$$

Значення функції \hat{u} в точках $x \in D \setminus \Gamma$ згідно з (3.1) можна обчислити як

$$\hat{u}(x) = \frac{\pi}{M} \sum_{j=0}^N \sum_{i=0}^{2M-1} \tilde{\mu}_j^{(i)} P(x, x_j(t_i)) |x'_j(t_i)|. \quad (4.7)$$

5. ЧИСЕЛЬНІ ЕКСПЕРИМЕНТИ

Приклад 1. Нехай область D – круг радіуса 2, $\sigma(x) = 1 + |x|^2, x \in D$ і $f(x) = 1, x \in \Gamma_0$. Очевидно, що $u = 1$ точний розв’язок граничної задачі (1.1), (1.2). В табл. подано значення похибок на сукупності кривих Γ з

$$\Gamma_k = \{x_k(t) = (2 - 2k/(N+1))(\cos t, \sin t), 0 \leq t \leq 2\pi\}, \quad (5.1)$$

$k = 1, \dots, N$ (див. рис. 1а) і для випадку сукупності кривих (див. рис. 1б)

$$\Gamma_k = \left\{ x_k(t) = 0.5(\cos t, \sin t) + \left(\cos\left(\frac{\pi(4k-3)t}{2N}\right), \sin\left(\frac{\pi(4k-3)t}{2N}\right) \right), 0 \leq t \leq 2\pi \right\} \quad (5.2)$$

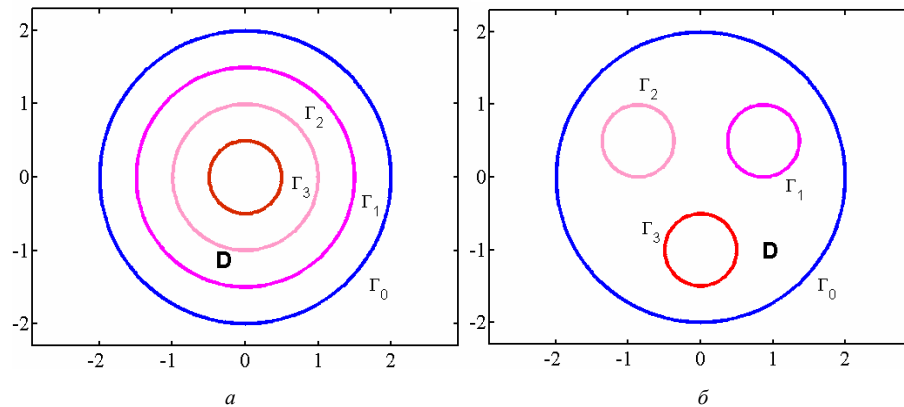


Рис. 1. Область D і системи кривих (5.1) і (5.2), відповідно, для $N = 3$

Як бачимо, з отриманих результатів теоретично передбачувана експоненційна швидкість збіжності методу квадратур підтверджується чисельним експериментом.

Похибки $\|\hat{u} - u\|_{\Gamma, \infty}$ для прикладу 1

| M | Система кривих (5.1) | | Система кривих (5.2) | |
|-----|----------------------|----------|----------------------|-----------|
| | $N=3$ | $N=7$ | $N=3$ | $N=7$ |
| 8 | 0.354E-2 | 0.248E-1 | 0.143E-2 | 0.143E-2 |
| 16 | 0.309E-4 | 0.226E-2 | 0.686E-5 | 0.686E-5 |
| 32 | 0.287E-8 | 0.269E-4 | 0.338E-9 | 0.338E-9 |
| 64 | 0.132E-14 | 0.481E-8 | 0.999E-15 | 0.999E-15 |

Нехай гранична функція набуда вигляду $f(x) = 1 + \exp(0.3(x_1^2 + x_2^2)), x \in \Gamma_0$. На рис. 2 зображено наближені розв’язки, отримані за допомогою методу скінчених елементів (рис. 2а), реалізованому в PDE Toolbox в середовищі Matlab і запропонованим методом граничних інтегральних рівнянь (рис. 2б). У разі МСЕ при триангуляції області було використано 1030 трикутників, а в методі інтегральних рівнянь: $N = 9$ (система кривих (5.1)) і $M = 32$ і обчислення чисельного розв’язку проводились за формулами (4.6), (4.7).

Як видно з рис. 2, результати, отримані різними методами, практично не відрізняються.

Приклад 2. Нехай зіркова область D обмежена кривою (прямокутник із довжинами сторін 3 і 4 і заокругленими кутами) (див. рис.3а)

$$\Gamma_0 = \{x_0(t) = r(t)(\cos t, \sin t), t \in [0, 2\pi]\}$$

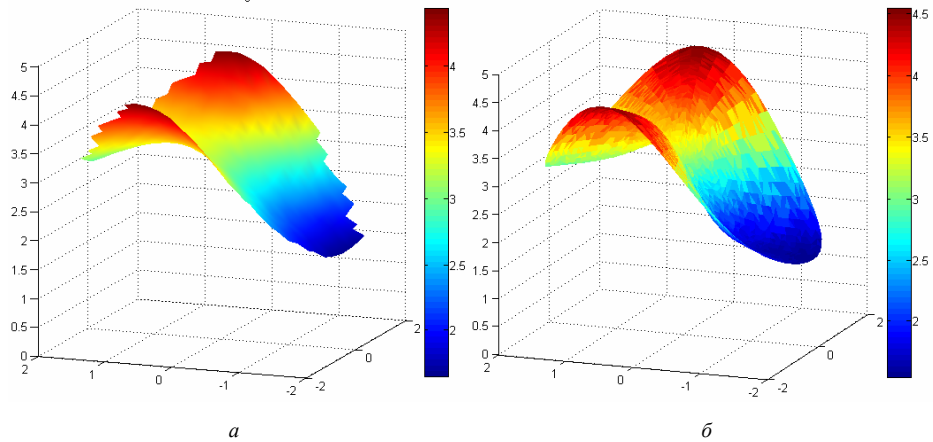


Рис. 2. Наближені розв’язки, отримані МСЕ та методом ІР, відповідно, для прикладу 1

з радіальною функцією $r(t) = \left((1/2 \cos t)^{10} + (2/3 \sin t)^{10} \right)^{-0.1}$. Нехай $\sigma(x) = 1 + \exp(0.3(x_1^2 + x_2^2))$, $x \in D$ і $f(x) = 1 + |x|^2$, $x \in \Gamma_0$.

Систему кривих в області D вибирали як (див. рис. 3а)

$$\Gamma_k = \{x_k(t) = r(t)(1 - k/(N+1))(\cos t, \sin t), 0 \leq t \leq 2\pi\}, k = 1, \dots, N. \quad (5.3)$$

На рис. 3б показано графік наближеного розв’язку, отриманого методом граничних інтегральних рівнянь. У цьому разі параметри дискретизації такі самі, як і в попередньому прикладі.

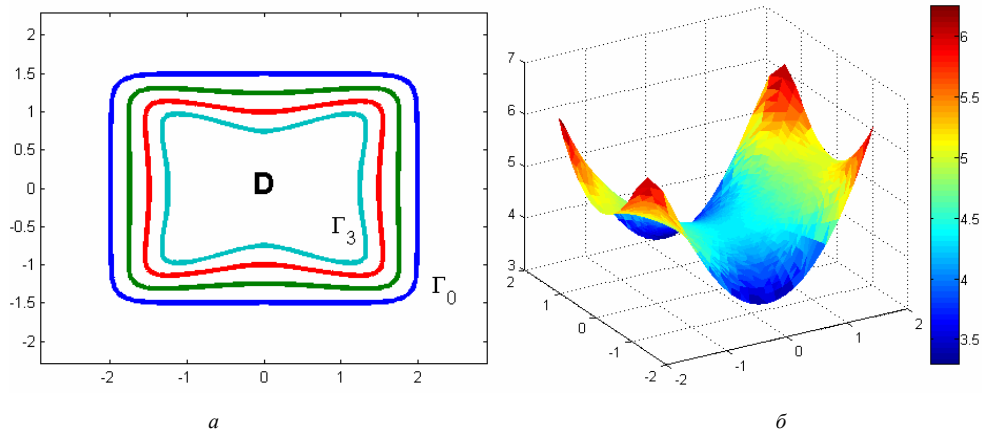


Рис. 3. Система кривих (5.3) для $N = 3$ і наближений розв’язок для прикладу 2

6. ВИСНОВКИ

Ми запропонували метод наближеного розв’язування прямої задачі ЕІТ за допомогою граничних інтегральних рівнянь. Для цього спершу вихідна задача зводиться до гранично-просторового інтегрального рівняння за допомогою функції Леві. Далі в області будують систему замкнених гладких кривих, які не

перетинаються. У підсумку отримуємо систему граничних інтегральних рівнянь з різними типами особливостей в ядрах. Повну дискретизацію виконали методом тригонометричних квадратур. Проведено порівняння запропонованого методу і МСЕ на чисельних прикладах. Для побудови наближення розв'язку прямої задачі з більшою гладкістю можна скористатись методами інтерлінації [10], що детально дослідимо в майбутньому. Розроблений метод надалі плануємо використати для розв'язування обернених задач ЕІТ, які редукуються до некоректних гранично-просторових інтегральних рівнянь.

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. *Borcea L.* Electrical impedance tomography / L. Borcea // *Inverse Problems*. – 2002. – 18. – P.99-136.
2. *Chapko R.* On the numerical solution of a boundary value problem in the plane elasticity for a double connected-domain / R. Chapko // *Math. Comput. Simulation*. – 2004. – 66. – P. 425-438.
3. *Chapko R.* On a quadrature method for a logarithmic integral equation of the first kind / R. Chapko, R. Kress // In Agarwal, ed.: *World Scientific Series in Applicable Analysis*. – Vol. 2. – Contributions in Numerical Mathematics. – 1993. – P. 127-140.
4. *Isakov V.* Numerical implementation of an integral equation method for the inverse conductivity problem / V. Isakov, A. Sever // *Inverse problems*. – 1996. – 12. – P. 939-953.
5. *Kirsch A.* The Nyström method for solving a class of singular integral equations and applications in 3d-plate elasticity / A. Kirsch, S. Ritter // *Math. Meth. Appl. Sci.* – 1990. – 22. – P. 177-197.
6. *Kress R.* Linear integral equations / R. Kress, second ed. – New-York: Springer-Verlag, 1999. – 365 p.
7. *Mikhailov S.E.* Localized boundary-domain integral formulations for problems with variable coefficients / S.E. Mikhailov // *Engineering Analysis with Boundary Elements*. – 2002. – 26. – P. 681-690.
8. *Mikhailov S.E.* Analysis of united boundary-domain integro-differential and integral equations for a mixed BVP with variable coefficients / S.E. Mikhailov // *Math. Meth. Appl. Sci.* – 2006. – 29. – P. 715-739.
9. *Pomp A.* The boundary-domain integral method for elliptic systems. With applications in shells / A. Pomp, *Lecture Notes in Mathematics*, Vol. 1683, Berlin. – Heidelberg: Springer-Verlag, 1998. – 163 p.
10. *Литвин О.М.* Інтерлінація функцій та деякі її застосування / О.М. Литвин. – Х.: Основа, 2002. – 544 с.

Стаття: надійшла до редколегії 22.11.2011

доопрацьована 08.12.2011

прийнята до друку 15.12.2011

О ЧИСЛЕННОМ РЕШЕНИИ ОДНОЙ ПРЯМОЙ ЗАДАЧИ ЭИТ МЕТОДОМ ГРАНИЧНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

К. Бабенко*, Р. Чапко**

*Украинская инженерно-педагогическая академия,

ул. Университетская, 16, Харьков, 61003, e-mail: kristina_babenko@mail.ru

**Львовский национальный университет имени Ивана Франко,

ул. Университетская, 1, Львов, 79000, e-mail: chapko@is.lviv.ua

Рассмотрено приближенное решение граничной задачи Дирихле для эллиптического уравнения с переменными коэффициентами в плоской ограниченной односвязной области (прямая задача электрической импедансной томографии). Задача сводится к определению значений искомой функции на системе гладких замкнутых кривых, размещенных внутри области. Далее с помощью функции Леви получена система корректных граничных интегральных уравнений с неизвестными функциями на гладких кривых и с ядрами, содержащими особенности различных типов. Численное решение интегральных уравнений осуществляется методом тригонометрических квадратур. Приведенные результаты численных экспериментов подтверждают эффективность предложенного метода.

Ключевые слова: электрическая импедансная томография, функции Леви, граничные интегральные уравнения, тригонометрические квадратуры, экспоненциальная сходимость.

ON THE NUMERICAL SOLUTION OF A DIRECT EIT PROBLEM BY BOUNDARY INTEGRAL EQUATION METHOD

C. Babenko*, R. Chapko**

*Ukrainian Engineering Pedagogics Academy,

Universytetska str, 16, Kharkiv, 61003, e-mail: kristina_babenko@mail.ru

**Ivan Franko National University of Lviv,

Universytetska str, 1, Lviv, 79000, e-mail: chapko@is.lviv.ua

We consider the numerical solution of the Dirichlet boundary value problem for an elliptic equation with variable coefficients in a planar bounded simply connected domain (a direct problem of electrical impedance tomography). The given problem is reduced to the search of function values on a set of smooth closed curves in the solution domain. Next the system of boundary integral equations with respect to unknown functions on curves and with singular kernels is received with the help of Levi's function. The numerical solution of integral equations is realized by trigonometric quadratures. The presented results of numerical experiments show the efficiency of proposed method.

Key words: electrical impedance tomography, Levi function, boundary integral equations, trigonometrical quadratures, exponential convergence order.