ISSN 2078–5097. Вісн. Львів. ун-ту. Сер. пр. матем. та інф. 2012. Вип. 18. С. 5–20
Visnyk of the Lviv University. Series Appl. Math. and Informatics. Issue 18. P. 5–20

ОБЧИСЛЮВАЛЬНА МАТЕМАТИКА

УДК 519.21:519.61

МНОЖИНА ЕФЕКТИВНИХ КОРОТКОКРОКОВИХ ІНТЕРВАЛЬНИХ ІТЕРАЦІЙНИХ МЕТОДІВ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ СИСТЕМ ТРАНСЦЕНДЕТНИХ РІВНЯНЬ

Н. Анісімова, П. Сеньо

Львівський національний університет імені Івана Франка,
вул. Університетська, 1, Львів, 79000, e-mail: nataly.anisimova@gmail.com

Запропоновано та досліджено множину ефективних інтервальних ітераційних методів знаходження всіх дійсних розв'язків системи трансцендентних рівнянь у заданому початковому інтервалі. Для побудови цієї параметричної системи використано ідею Рунге (наближення похідних вищих порядків похідними першого порядку), та ідею Зейделя (врахування всієї нової інформації, яку отримуємо в процесі реалізації методу). Отримані умови, під час реалізації яких цей метод збігається та має високий порядок збіжності. Розглянуто приклади.

Результати числових експериментів підтверджують отримані теоретичні висновки.

Ключові слова: система нелінійних рівнянь, інтервальні ітераційні методи, збіжність, локалізація.

1. ВСТУП

Багато задач зводиться до необхідності розв'язування систем трансцендентних рівнянь або потребує цього на проміжних етапах. Точкові ітераційні методи розв'язування систем трансцендентних рівнянь є методами уточнення коренів, а не розв'язування. Вимоги хорошого початкового наближення накладають певні умови, які, по суті, є теоретичними рекомендаціями (перевірити їх неможливо, бо ці умови потребують інформації про корінь системи, який невідомий, а також часто про кратність, чи порядок кратності його, що також невідомо). В інших випадках такі методи не збігаються, або збігаються не до розв'язку заданої системи.

Інтервальні ітераційні методи не мають жодного з цих недоліків. Зокрема, у будь-якому заданому інтервалі ці методи глобально збіжні та знаходять всі корені початкової системи, в тім числі і кратні.

Для побудови такої множини методів використано метод (2)-(7), запропонований в [6]. Крім того, використано ідею Зейделя врахування всієї нової інформації, яку отримуємо в процесі реалізації кожного кроку методу.

2. ФОРМУЛЮВАННЯ ЗАДАЧІ

Нехай треба знайти всі дійсні розв'язки системи трансцендентних рівнянь

$$f(x)=0 \tag{1}$$

у заданому інтервалі X_0, де $f:(D\subset R^l)\to(G\subset R^l)$. Для цього використаємо такий метод:

$$\widetilde{X}_n^{(1)} = X_n^{(0)} \bigcap \left(\bar{x}_n - \left(\alpha_1^{(1)} f'(\bar{x}_n) + \alpha_2^{(1)} f'\left(\bar{x}_n + \beta_2\left(X_n^{(0)} - \bar{x}_n\right)\right)\right)^{-1} f(\bar{x}_n)\right) \tag{2}$$

$$\widetilde{X}_n^{(i)} = \widetilde{X}_n^{(i-1)} \bigcap \left(\overline{x}_n^{(i-1)} - \left(\alpha_1^{(i)} f'\left(\overline{x}_n^{(i-1)} \right) + \right.\right.$$
$$\left.\left. + \left(\alpha_2^{(i)} + \alpha_3^{(i)} + \ldots + \alpha_{i+1}^{(i)} \right) f'\left(\overline{x}_n^{(i-1)} + \beta_{i+1}\left(\widetilde{X}_n^{(i-1)} - \overline{x}_n^{(i-1)} \right) \right) \right)^{-1} f\left(\overline{x}_n^{(i-1)} \right) \right) \tag{3}$$

$$X_{n+1} = \widetilde{X}_n^{(m-1)} \bigcap \left(\overline{x}_n^{(m-1)} - \left(\alpha_1 f'\left(\overline{x}_n^{(m-1)} \right) + \right.\right.$$
$$\left.\left. + \left(\alpha_2 + \alpha_3 + \ldots + \alpha_{m+1} \right) f'\left(\overline{x}_n^{(m-1)} + \beta_{m+1}\left(\widetilde{X}_n^{(m-1)} - \overline{x}_n^{(m-1)} \right) \right) \right)^{-1} f\left(\overline{x}_n^{(m-1)} \right) \right), \tag{4}$$

де $i = \overline{2, m-1}$, $\alpha_1, \ldots, \alpha_m, \beta_2, \ldots, \beta_m$, $\left\{\alpha_i^{(k)}\right\}_{k=1}^{i-1}$, $X_n^{(0)} = X_n$, $\overline{x}_n = m(X_n)$, $\overline{x}_n^{(i-1)} = m\left(\widetilde{X}_n^{(i-1)}\right)$ – визначаються аналогічно, як в [6].

3. ОБҐРУНТУВАННЯ ЗБІЖНОСТІ

Достатні умови збіжності запропонованого методу подано в теоремі.

Теорема. Нехай кожна функція $f_i(x)$, $i = \overline{1, l}$ лівої частини системи (1) задовольняє умови леми з [6], і кожен розв'язок x^* цієї системи належить інтервалу X_0. Тоді послідовність інтервалів $\{X_k\}_{k=0}^{\infty}$, обчислена за формулами (2)-(4) та скорегована згідно з зауваженням 1 з [6], має такі властивості:

1) $x^* \in X_k$, $k = 0, 1, 2, \ldots$;
2) якщо всі матриці $F'(x_k)$ невироджені, то $\lim\limits_{k\to\infty} X_k = [x^*, x^*]$;
3) якщо перша похідна функції $f(x)$ на $\{X_k\}_{k=0}^{\infty}$ задовольняє інтервальну умову Ліпшіца $\omega(f'(X_n)) \le C_n \omega(X_n)$ та відображення $f(x)$ $2m$ разів неперервно диференційовне в R^l, то порядок збіжності ітераційного методу (2)-(4) визначає нерівність
$$\omega(X_{n+1}) \le (0.5)^{2^m - 1} C \omega(X_n)^{2^m}. \tag{5}$$

де $C = C(C_0, C_1, \ldots, C_n)$.

Доведення.

1. Доведення проведемо методом математичної індукції. Покажемо, що $x^* \in X_1$. Для цього попередньо доведемо, що $x^* \in \widetilde{X}_0^{(1)}$, $x^* \in \widetilde{X}_0^{(2)}$, …, $x^* \in \widetilde{X}_0^{(m-1)}$.

Згідно з формулою (2) при $n = 0$ одержимо
$$Z_0^{(1)} = \overline{x}_0 - \left(\alpha_1^{(1)} f'(\overline{x}_0) + \alpha_2^{(1)} f'\left(\overline{x}_0 + \beta_2\left(X_0^{(0)} - \overline{x}_0 \right) \right) \right)^{-1} f(\overline{x}_0).$$

Як відомо з [3], інтервальне розширення кожної функції $f_i(X)$ можна подати у вигляді
$$f_i(X) = \overline{f}_i(X) + A_i(X), \ \left(i = \overline{1, l} \right), \tag{6}$$

де $\overline{f_i}(X)$ – обласне розширення кожної функції $f_i(x)$, а інтервал $A_i(X) \supset 0$ такий, що $\lim\limits_{\omega(X)\to 0} \omega(A_i(X)) = 0$. Тому згідно з (6)
$$f'\left(\overline{x}_0 + \beta_2\left(X_0^{(0)} - \overline{x}_0 \right) \right) = \overline{f'}\left(\overline{x}_0 + \beta_2\left(X_0^{(0)} - \overline{x}_0 \right) \right) + A\left(\overline{x}_0 + \beta_2\left(X_0^{(0)} - \overline{x}_0 \right) \right).$$

Якщо $X_0^{(0)} \to \bar{x}_0$, то $\bar{x}_0 + \beta_2\left(X_0^{(0)} - \bar{x}_0\right) \to \bar{x}_0$. Тому

$$\lim_{X_0 \to x_0} \omega\left(A_i\left(\bar{x}_0 + \beta_2\left(X_0^{(0)} - \bar{x}_0\right)\right)\right) = \omega\left(A_i\left(\bar{x}_0\right)\right) = 0 .$$

Використавши аналог теореми про середнє [5], отримаємо

$$\overline{f'}\left(\bar{x}_0 + \beta_2\left(X_0^{(0)} - \bar{x}_0\right)\right) + A\left(\bar{x}_0 + \beta_2\left(X_0^{(0)} - \bar{x}_0\right)\right) =$$
$$= f'\left(\bar{x}_0\right) + \beta_2 \overline{f''}\left(\bar{x}_0 + \beta_2\left[\theta_2^1\right]\left(X_0^{(0)} - \bar{x}_0\right)\right)\left(X_0^{(0)} - \bar{x}_0\right) + A\left(\bar{x}_0 + \beta_2\left(X_0^{(0)} - \bar{x}_0\right)\right).$$

Отже,

$$\begin{aligned} f'\left(\bar{x}_0 + \beta_2\left(X_0^{(0)} - \bar{x}_0\right)\right) = f'\left(\bar{x}_0\right) + \beta_2 \overline{f''}\left(\bar{x}_0 + \beta_2\left[\theta_2^1\right]\left(X_0^{(0)} - \bar{x}_0\right)\right)\left(X_0^{(0)} - \bar{x}_0\right) + \\ + A\left(\bar{x}_0 + \beta_2\left(X_0^{(0)} - \bar{x}_0\right)\right), \end{aligned} \tag{7}$$

де $\left[\theta_2^1\right]$ – вектор інтервалів з проміжку $[0, 1]$, $\bar{x}_0 + \beta_2\left[\theta_2^1\right]\left(X_0^{(0)} - \bar{x}_0\right)$ – інтервал проміжних точок залишкових членів розкладу за аналогом теореми про середнє функції $f'\left(\bar{x}_0 + \beta_2\left(X_0^{(0)} - \bar{x}_0\right)\right)$, A – інтервал, визначений в (6).

Згідно з умовою теореми кожна функція $f_i(x)$, $i = \overline{1, l}$ системи (1) задовольняє умови леми. Тому

$$f''\left(\bar{x}_0 + \theta_2^0\left(x^* - \bar{x}_0\right)\right)\left(x^* - \bar{x}_0\right)^2 \subset \overline{f''}\left(\bar{x}_0 + \beta_2\left[\theta_2^1\right]\left(X_0^{(0)} - \bar{x}_0\right)\right)\left(X_0^{(0)} - \bar{x}_0\right)^2 .$$

Згідно з формулою Тейлора

$$f\left(x^*\right) = f\left(\bar{x}_0\right) + f'\left(\bar{x}_0\right)\left(x^* - \bar{x}_0\right) + \frac{1}{2} f''\left(\bar{x}_0 + \theta_2^0\left(x^* - \bar{x}_0\right)\right)\left(x^* - \bar{x}_0\right)^2 = 0 .$$

Тому $x^* = \bar{x}_0 - \left(f'\left(\bar{x}_0\right) + \frac{1}{2} f''\left(\bar{x}_0 + \theta_2^0\left(x^* - \bar{x}_0\right)\right)\left(x^* - \bar{x}_0\right)\right)^{-1} f\left(\bar{x}_0\right)$.

З монотонності операції додавання інтервалів за включенням, формули (6), та того, що $\alpha_2^{(1)}\beta_2 = \frac{1}{2}$, випливає, що

$$\begin{aligned} x^* &= \bar{x}_0 - \left(f'\left(\bar{x}_0\right) + \frac{1}{2} f''\left(\bar{x}_0 + \theta_2^0\left(x^* - \bar{x}_0\right)\right)\left(x^* - \bar{x}_0\right)\right)^{-1} f\left(\bar{x}_0\right) \in \\ &\in \bar{x}_0 - \left(f'\left(\bar{x}_0\right) + \alpha_2^{(1)}\beta_2 \overline{f''}\left(\bar{x}_0 + \beta_2\left[\theta_2^1\right]\left(X_0^{(0)} - \bar{x}_0\right)\right)\left(X_0^{(0)} - \bar{x}_0\right)\right)^{-1} f\left(\bar{x}_0\right) \in \\ &\in \Bigg(\bar{x}_0 - \left(f'\left(\bar{x}_0\right) + \alpha_2^{(1)}\beta_2 \overline{f''}\left(\bar{x}_0 + \beta_2\left[\theta_2^1\right]\left(X_0^{(0)} - \bar{x}_0\right)\right)\left(X_0^{(0)} - \bar{x}_0\right)\right)^{-1} f\left(\bar{x}_0\right) + \\ &\quad + A\left(\bar{x}_0 + \beta_2\left(X_0^{(0)} - \bar{x}_0\right)\right)\Bigg) \bigcap X_0^{(0)} = \widetilde{X}_0^{(1)}. \end{aligned}$$

Отже, $x^* \in \widetilde{X}_0^{(1)}$.

Тепер доведемо, що $x^* \in \widetilde{X}_0^{(2)}$. Згідно з формулою (3) при $n = 0$ одержимо

$$Z_0^{(2)} = \bar{x}_0^{(1)} - \left(\alpha_1^{(2)} f'\left(\bar{x}_0^{(1)}\right) + \left(\alpha_2^{(2)} + \alpha_3^{(2)}\right) f'\left(\bar{x}_0^{(1)} + \beta_3\left(\widetilde{X}_0^{(1)} - \bar{x}_0^{(1)}\right)\right)\right)^{-1} f\left(\bar{x}_0^{(1)}\right).$$

Згідно з (5)

$$f'\left(\bar{x}_0^{(1)} + \beta_3\left(\widetilde{X}_0^{(1)} - \bar{x}_0^{(1)}\right)\right) = \overline{f'}\left(\bar{x}_0^{(1)} + \beta_3\left(\widetilde{X}_0^{(1)} - \bar{x}_0^{(1)}\right)\right) + A\left(\bar{x}_0^{(1)} + \beta_3\left(\widetilde{X}_0^{(1)} - \bar{x}_0^{(1)}\right)\right).$$

Якщо $\widetilde{X}_0^{(1)} \to \bar{x}_0^{(1)}$, то $\bar{x}_0^{(1)} + \beta_3\left(\widetilde{X}_0^{(1)} - \bar{x}_0^{(1)}\right) \to \bar{x}_0^{(1)}$. Тому

$$\lim_{\widetilde{X}_0^{(1)} \to \bar{x}_0^{(1)}} \omega\left(A_i\left(\bar{x}_0^{(1)} + \beta_3\left(\widetilde{X}_0^{(1)} - \bar{x}_0^{(1)}\right)\right)\right) = \omega\left(A_i\left(\bar{x}_0^{(1)}\right)\right) = 0 .$$

Використавши аналог теореми про середнє [1], отримаємо

$$\overline{f'}\left(\bar{x}_0^{(1)} + \beta_3\left(\widetilde{X}_0^{(1)} - \bar{x}_0^{(1)}\right)\right) + A\left(\bar{x}_0^{(1)} + \beta_3\left(\widetilde{X}_0^{(1)} - \bar{x}_0^{(1)}\right)\right) =$$

$$= f'\left(\bar{x}_0^{(1)}\right) + \beta_3 \overline{f''}\left(\bar{x}_0^{(1)} + \beta_3\left[\widetilde{\theta}_3^1\right]\left(\widetilde{X}_0^{(1)} - \bar{x}_0^{(1)}\right)\right)\left(\widetilde{X}_0^{(1)} - \bar{x}_0^{(1)}\right) + A\left(\bar{x}_0^{(1)} + \beta_3\left(\widetilde{X}_0^{(1)} - \bar{x}_0^{(1)}\right)\right).$$

Отже,

$$f'\left(\bar{x}_0^{(1)} + \beta_3\left(\widetilde{X}_0^{(1)} - \bar{x}_0^{(1)}\right)\right) = f'\left(\bar{x}_0^{(1)}\right) +$$
$$+ \beta_3 \overline{f''}\left(\bar{x}_0^{(1)} + \beta_3\left[\widetilde{\theta}_3^1\right]\left(\widetilde{X}_0^{(1)} - \bar{x}_0^{(1)}\right)\right)\left(\widetilde{X}_0^{(1)} - \bar{x}_0^{(1)}\right) + A\left(\bar{x}_0^{(1)} + \beta_3\left(\widetilde{X}_0^{(1)} - \bar{x}_0^{(1)}\right)\right), \tag{8}$$

де $\left[\widetilde{\theta}_3^1\right]$ – вектор інтервалів з проміжку $[0, 1]$, $\bar{x}_0^{(1)} + \beta_3\left[\widetilde{\theta}_3^1\right]\left(\widetilde{X}_0^{(1)} - \bar{x}_0^{(1)}\right)$ – інтервал проміжних точок залишкових членів розкладу за аналогом теореми про середнє функції $f'\left(\bar{x}_0^{(1)} + \beta_2\left(\widetilde{X}_0^{(1)} - \bar{x}_0^{(1)}\right)\right)$, A – інтервал, визначений в (6).

Згідно з умовою теореми кожна функція $f_i(x)$, $i = \overline{1, l}$ рівняння системи (1) задовольняє умови леми. Тому

$$f''\left(\bar{x}_0^{(1)} + \theta_2^0\left(x^* - \bar{x}_0^{(1)}\right)\right)\left(x^* - \bar{x}_0^{(1)}\right)^2 \subset \overline{f''}\left(\bar{x}_0^{(1)} + \beta_3\left[\widetilde{\theta}_3^1\right]\left(\widetilde{X}_0^{(1)} - \bar{x}_0^{(1)}\right)\right)\left(\widetilde{X}_0^{(1)} - \bar{x}_0^{(1)}\right)^2 .$$

Згідно з формулою Тейлора

$$x^* = \bar{x}_0^{(1)} - \left(f'\left(\bar{x}_0^{(1)}\right) + \frac{1}{2} f''\left(\bar{x}_0^{(1)} + \theta_2^0\left(x^* - \bar{x}_0^{(1)}\right)\right)\left(x^* - \bar{x}_0^{(1)}\right)\right)^{-1} f\left(\bar{x}_0^{(1)}\right).$$

З монотонності операції додавання інтервалів за включенням, формул (7-8) та того, що $\alpha_3^{(2)}\beta_3 = \dfrac{1}{2}$, випливає таке:

$$x^* = \bar{x}_0^{(1)} - \left(f'\left(\bar{x}_0^{(1)}\right) + \frac{1}{2} f''\left(\bar{x}_0^{(1)} + \theta_2^0\left(x^* - \bar{x}_0^{(1)}\right)\right)\left(x^* - \bar{x}_0^{(1)}\right)\right)^{-1} f\left(\bar{x}_0^{(1)}\right) \in$$

$$\in \bar{x}_0^{(1)} - \left(f'\left(\bar{x}_0^{(1)}\right) + \alpha_3^{(2)}\beta_3 \overline{f''}\left(\bar{x}_0^{(1)} + \beta_3\left[\widetilde{\theta}_3^1\right]\left(\widetilde{X}_0^{(1)} - \bar{x}_0^{(1)}\right)\right)\left(\widetilde{X}_0^{(1)} - \bar{x}_0^{(1)}\right)\right)^{-1} f\left(\bar{x}_0^{(1)}\right) \in$$

$$\in \left(\left(\bar{x}_0^{(1)} - \left(f'\left(\bar{x}_0^{(1)}\right) + \left(\alpha_2^{(2)} + \alpha_3^{(2)}\right)\beta_3 \overline{f''}\left(\bar{x}_0^{(1)} + \beta_3\left[\widetilde{\theta}_3^1\right]\left(\widetilde{X}_0^{(1)} - \bar{x}_0^{(1)}\right)\right)\left(\widetilde{X}_0^{(1)} - \bar{x}_0^{(1)}\right) +\right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left. + A\left(\bar{x}_0^{(1)} + \beta_3\left(\widetilde{X}_0^{(1)} - \bar{x}_0^{(1)}\right)\right)\right)^{-1} f\left(\bar{x}_0^{(1)}\right)\right) \bigcap \widetilde{X}_0^{(1)} = \widetilde{X}_0^{(2)}.$$

Отже, $x^* \in \widetilde{X}_0^{(2)}$.

Аналогічно можна довести, що $x^* \in \tilde{X}_0^{(3)}$, ..., $x^* \in \tilde{X}_0^{(m-1)}$. Тепер покажемо, що $x^* \in X_1$.

Згідно з формулою (2)-(4) при $n = 0$ одержимо

$$X_1 = \tilde{X}_0^{(m-1)} \cap \left(\bar{x}_0^{(m-1)} - \left(\alpha_1 f'\left(\bar{x}_0^{(m-1)}\right) + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \left(\alpha_2 + \alpha_3 + \ldots + \alpha_{m+1}\right) f'\left(\bar{x}_0^{(m-1)} + \beta_{m+1}\left(\tilde{X}_0^{(m-1)} - \bar{x}_0^{(m-1)} \right)\right)\right)^{-1} f\left(\bar{x}_0^{(m-1)}\right)\right).$$

Згідно з (6)

$$f'\left(\bar{x}_0^{(m-1)} + \beta_{m+1}\left(\tilde{X}_0^{(m-1)} - \bar{x}_0^{(m-1)} \right)\right) =$$

$$= \overline{f'}\left(\bar{x}_0^{(m-1)} + \beta_{m+1}\left(\tilde{X}_0^{(m-1)} - \bar{x}_0^{(m-1)} \right)\right) +$$

$$+ A\left(\bar{x}_0^{(m-1)} + \beta_{m+1}\left(\tilde{X}_0^{(m-1)} - \bar{x}_0^{(m-1)} \right)\right).$$

Якщо

$$\tilde{X}_0^{(m-1)} \to \bar{x}_0^{(m-1)},$$

то

$$\bar{x}_0^{(m-1)} + \beta_2\left(\tilde{X}_0^{(m-1)} - \bar{x}_0^{(m-1)} \right) \to \bar{x}_0^{(m-1)}.$$

Тому

$$\lim_{\tilde{X}_0^{(m-1)} \to \bar{x}_0^{(m-1)}} \omega\left(A_i\left(\bar{x}_0^{(m-1)} + \beta_{m+1}\left(\tilde{X}_0^{(m-1)} - \bar{x}_0^{(m-1)} \right)\right)\right) = \omega\left(A_i\left(\bar{x}_0^{(m-1)} \right)\right) = 0 .$$

Використавши аналог теореми про середнє [1], отримаємо

$$\overline{f'}\left(\bar{x}_0^{(m-1)} + \beta_{m+1}\left(\tilde{X}_0^{(m-1)} - \bar{x}_0^{(m-1)} \right)\right) + A_3\left(\bar{x}_0^{(m-1)} + \beta_{m+1}\left(\tilde{X}_0^{(m-1)} - \bar{x}_0^{(m-1)} \right)\right) =$$

$$= f'\left(\bar{x}_0^{(m-1)} \right) + \beta_{m+1} \overline{f''}\left(\bar{x}_0^{(m-1)} + \beta_m \left[\theta_{m+1}^1\right]\left(\tilde{X}_0^{(m-1)} - \bar{x}_0^{(m-1)} \right)\right)\left(\tilde{X}_0^{(m-1)} - \bar{x}_0^{(m-1)} \right) +$$

$$+ A_m\left(\bar{x}_0^{(m-1)} + \beta_{m+1}\left(\tilde{X}_0^{(m-1)} - \bar{x}_0^{(m-1)} \right)\right).$$

Отож,

$$f'\left(\bar{x}_0^{(m-1)} + \beta_{m+1}\left(\tilde{X}_0^{(m-1)} - \bar{x}_0^{(m-1)} \right)\right) = f'\left(\bar{x}_0^{(m-1)} \right) +$$

$$+ \beta_{m+1} \overline{f''}\left(\bar{x}_0^{(m-1)} + \beta_{m+1} \left[\tilde{\theta}_{m+1}^1\right]\left(\tilde{X}_0^{(m-1)} - \bar{x}_0^{(m-1)} \right)\right)\left(\tilde{X}_0^{(m-1)} - \bar{x}_0^{(m-1)} \right) + \tag{9}$$

$$+ A\left(\bar{x}_0^{(m-1)} + \beta_{m+1}\left(\tilde{X}_0^{(m-1)} - \bar{x}_0^{(m-1)} \right)\right),$$

де $\left[\tilde{\theta}_3^1\right]$ – вектор інтервалів з проміжку $[0, 1]$,

$$\bar{x}_0^{(m-1)} + \beta_{m+1}\left(\tilde{X}_0^{(m-1)} - \bar{x}_0^{(m-1)} \right)$$

– інтервал проміжних точок залишкових членів розкладу за аналогом теореми про середнє функції

$$f'\left(\overline{x}_0^{(m-1)}+\beta_{m+1}\left(\widetilde{X}_0^{(m-1)}-\overline{x}_0^{(m-1)}\right)\right),$$

A – інтервал, визначений в (6).

Згідно з умовою теореми кожна ліва частина рівняння $f_i(x),\ i=\overline{1,l}$ системи (1) задовольняє умови леми. Тому

$$f''\left(\overline{x}_0^{(m-1)}+\theta_{m+1}^0\left(x^*-\overline{x}_0^{(m-1)}\right)\right)\left(x^*-\overline{x}_0^{(m-1)}\right)^2\subset$$
$$\subset\overline{f''}\left(\overline{x}_0^{(m-1)}+\beta_{m+1}\left[\widetilde{\theta}_{m+1}^1\right]\left(\widetilde{X}_0^{(m-1)}-\overline{x}_0^{(m-1)}\right)\right)\left(\widetilde{X}_0^{(m-1)}-\overline{x}_0^{(m-1)}\right)^2.$$

Отримаємо

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}f''\left(\overline{x}_0^{(m-1)}+\theta_2^0\left(x^*-\overline{x}_0^{(m-1)}\right)\right)\left(x^*-\overline{x}_0^{(m-1)}\right)^2\subset\\&\subset\alpha_{m+1}\beta_{m+1}f''\left(\overline{x}_0^{(m-1)}+\beta_{m+1}\left[\widetilde{\theta}_{m+1}^1\right]\left(X_0^{(m-1)}-\overline{x}_0^{(m-1)}\right)\right)\left(X_0^{(m-1)}-\overline{x}_0^{(m-1)}\right).\end{aligned}\tag{10}$$

Згідно з формулою Тейлора

$$x^*=\overline{x}_0^{(m-1)}-\left(f'\left(\overline{x}_0^{(m-1)}\right)+\frac{1}{2}f''\left(\overline{x}_0^{(m-1)}+\theta_2^0\left(x^*-\overline{x}_0^{(m-1)}\right)\right)\left(x^*-\overline{x}_0^{(m-1)}\right)\right)^{-1}f\left(\overline{x}_0^{(m-1)}\right).$$

З монотонності операції додавання інтервалів за включенням і формули (10) випливає, що

$$\begin{aligned}x^*&=\overline{x}_0^{(m-1)}-\left(f'\left(\overline{x}_0^{(m-1)}\right)+\frac{1}{2}f''\left(\overline{x}_0^{(m-1)}+\theta_2^0\left(x^*-\overline{x}_0^{(m-1)}\right)\right)\left(x^*-\overline{x}_0^{(m-1)}\right)\right)^{-1}f\left(\overline{x}_0^{(m-1)}\right)\in\\&\in\overline{x}_0^{(m-1)}-\left(f'\left(\overline{x}_0^{(m-1)}\right)+\right.\\&+\alpha_{m+1}\beta_{m+1}f''\left(\overline{x}_0^{(m-1)}+\beta_{m+1}\left[\widetilde{\theta}_{m-1}^1\right]\left(\widetilde{X}_0^{(m-1)}-\overline{x}_0^{(m-1)}\right)\right)\left(\widetilde{X}_0^{(m-1)}-\overline{x}_0^{(m-1)}\right)+\\&\left.+A\left(\overline{x}_0^{(m-1)}+\beta_{m+1}\left(\widetilde{X}_0^{(m-1)}-\overline{x}_0^{(m-1)}\right)\right)\right)^{-1}\cdot f\left(\overline{x}_0^{(m-1)}\right)\in\\&\subseteq\left(\overline{x}_0^{(m-1)}-\left(f'\left(\overline{x}_0^{(m-1)}\right)+\right.\right.\\&+(\alpha_2+\ldots+\alpha_{m+1})\beta_{m+1}f''\left(\overline{x}_0^{(m-1)}+\beta_{m+1}\left[\widetilde{\theta}_{m+1}^1\right]\left(\widetilde{X}_0^{(m-1)}-\overline{x}_0^{(m-1)}\right)\right)\left(\widetilde{X}_0^{(m-1)}-\overline{x}_0^{(m-1)}\right)+\\&\left.\left.+A\left(\overline{x}_0^{(m-1)}+\beta_{m+1}\left(\widetilde{X}_0^{(m-1)}-\overline{x}_0^{(m-1)}\right)\right)\right)^{-1}\cdot f\left(\overline{x}_0^{(m-1)}\right)\right)\bigcap\widetilde{X}_0^{(m-1)}=X_1.\end{aligned}$$

Отже, $x^*\in X_1$.

Припустимо, що $x^*\in X_{k-1}$, де $k\geq 1$. Аналогічно довівши, що $x^*\in\widetilde{X}_k^{(3)},x^*\in\widetilde{X}_k^{(4)},\ldots,x^*\in\widetilde{X}_k^{(m-1)}$, доведемо, що $x^*\in X_k$

$$x^* = \overset{-(m-1)}{x_{k-1}} - \left(f'\left(\overset{-(m-1)}{x_{k-1}}\right) + \frac{1}{2} f''\left(\overset{-(m-1)}{x_{k-1}} + \theta_2^0\left(x^* - \overset{-(m-1)}{x_{k-1}}\right)\right)\left(x^* - \overset{-(m-1)}{x_{k-1}}\right)\right)^{-1} f\left(\overset{-(m-1)}{x_{k-1}}\right) \in$$

$$\in \overset{-(m-1)}{x_{k-1}} - \left(f'\left(\overset{-(m-1)}{x_{k-1}}\right) + \right.$$

$$+\alpha_{m+1}\beta_{m+1} f''\left(\overset{-(m-1)}{x_{k-1}} + \beta_{m+1}\left[\tilde{\theta}_{m+1}^1\right]\left(\tilde{X}_{k-1}^{(m-1)} - \overset{-(m-1)}{x_{k-1}}\right)\right)\left(\tilde{X}_{k-1}^{(m-1)} - \overset{-(m-1)}{x_{k-1}}\right) +$$

$$\left. + A\left(\overset{-(m-1)}{x_{k-1}} + \beta_{m+1}\left(\tilde{X}_{k-1}^{(m-1)} - \overset{-(m-1)}{x_{k-1}}\right)\right)\right)^{-1} \cdot f\left(\overset{-(m-1)}{x_{k-1}}\right) \subseteq$$

$$\subseteq \left(\overset{-(m-1)}{x_{k-1}} - \left(f'\left(\overset{-(m-1)}{x_{k-1}}\right) + \right.\right.$$

$$+(\alpha_2 + \ldots + \alpha_{m+1})\beta_{m+1} f''\left(\overset{-(m-1)}{x_{k-1}} + \beta_{m+1}\left[\tilde{\theta}_{m+1}^1\right]\left(\tilde{X}_{k-1}^{(m-1)} - \overset{-(m-1)}{x_{k-1}}\right)\right)\left(\tilde{X}_{k-1}^{(m-1)} - \overset{-(m-1)}{x_{k-1}}\right) +$$

$$\left.\left. + A\left(\overset{-(m-1)}{x_{k-1}} + \beta_{m+1}\left(\tilde{X}_{k-1}^{(m-1)} - \overset{-(m-1)}{x_{k-1}}\right)\right)\right)^{-1} \cdot f\left(\overset{-(m-1)}{x_{k-1}}\right)\right) \bigcap \tilde{X}_{k-1}^{(m-1)} = X_k .$$

Отож, $x^* \in X_k$.

2. Доведемо спочатку, що локалізуюча послідовність $\{X_k\}_{k=0}^{\infty}$ монотонна по включенню, тобто, що

$$X_0 \supset X_1 \supset X_2 \supset \ldots .$$

$\tilde{X}_0^{(m)}$ – звуження інтервалу X_0, отримане шляхом виконання кроків (2) – (4) методу, тому $\tilde{X}_0^{(m)} \subset X_0$.

Як було доведено в п.1., $x^* \in X_k$, $k = 1,2,\ldots$, отже,

$$x^* \in X_1 = \left(x_0 - (F'(X_0))^{-1} f(x_0)\right) \bigcap \tilde{X}_0^{(m)} ,$$

Тому інтервал $X_1 \neq \varnothing$, тобто $\left(x_0 - (F'(X_0))^{-1} f(x_0)\right)$ та $\tilde{X}_0^{(m)}$ мають спільні точки. Оскільки $\tilde{X}_0^{(m)} \subset X_0$, то і $X_1 = \left(x_0 - (F'(X_0))^{-1} f(x_0)\right) \bigcap \tilde{X}_0^{(m)} \subset X_0$.
Аналогічно доводимо, що $X_2 \subset X_1$, …, $X_k \subset X_{k-1}$, …, тобто

$$X_1 = \left(x_0 - (F'(X_0))^{-1} f(x_0)\right) \bigcap \tilde{X}_0^{(m)} \subset X_0,$$

$$\ldots$$

$$X_k = \left(x_{k-1} - (F'(X_{k-1}))^{-1} f(x_{k-1})\right) \bigcap \tilde{X}_{k-1}^{(m)} \subset X_{k-1}.$$

Отже,

$$X_0 \supset X_1 \supset X_2 \supset \ldots \supset X_{k-1} \supset X_k \supset \ldots . \tag{11}$$

Кожна послідовність інтервальних векторів $\{X_k\}_{k=0}^{\infty}$ розмірності l , для якої виконується включення (10), збігається до інтервального вектора $X^* = (X_i^*)$, де

$$X_i^* = \bigcap_{k=0}^{\infty} X_{k\,i} , \ i = \overline{1,l} .$$

Доведемо, що $\omega(X^*)=0$, тобто доведемо, що послідовність збігається до інтервалу-точки, межі якого однакові. Оскільки кожен локалізуючий вектор містить розв'язок (див п. 1.) і він єдиний, то саме до нього і збігається послідовність $\{X_k\}_{k=0}^{\infty}$

$$\lim_{k\to\infty} X_k = [x^*,\, x^*] = x^*.$$

Доведення проведемо від супротивного. Нехай $\omega(X^*)\neq 0$. Відображення (2)-(4) неперервне, отже,

$$X^* = \left(m(X^*) - \left(F'(X^*)\right)^{-1} f\left(m(X^*)\right)\right) \bigcap X^*.$$

Якщо $\omega(X^*)\neq 0$, то $m(X^*)\neq x^*$. Справді, якщо $m(X^*)=x^*$, то

$$X^* = \left(x^* - \left(F'(X^*)\right)^{-1}\cdot 0\right) \bigcap X^* = x^*.$$

Оскільки X^* – інтервальний вектор, до якого збігається послідовність $\{X_k\}_{k=0}^{\infty}$, то

$$m(X^*) \subset \left(m(X^*) - \left(F'(X^*)\right)^{-1} f\left(m(X^*)\right)\right).$$

Оскільки виконується це включення, то для інтервального вектора X^* повинен існувати вектор чисел $x_{m(X^*)}\subset X^*$, для якого

$$m(X^*) = m(X^*) - \left(F'\left(x_{m(X^*)}\right)\right)^{-1} f\left(m(X^*)\right).$$

Отже, $\left(F'\left(x_{m(X^*)}\right)\right)^{-1} f\left(m(X^*)\right)=0$, тобто $f\left(m(X^*)\right)=0$. Отож, $m(X^*)=x^*$. Отримали суперечність. Справді, ми припускали, що $m(X^*)\neq x^*$, а виявилося, що $m(X^*)=x^*$. Отже, $\omega(X^*)=0$, тобто $\lim\limits_{k\to\infty} X_k = [x^*,\, x^*]=x^*$.

3. Доведемо, що

$$\omega(X_{n+1}) \le (0.5)^{2^m-1} C\omega(X_n)^{2^m}.$$

Розглянемо спочатку одновимірний випадок і доведення проведемо методом математичної індукції. Формула (2) методу набуде вигляду

$$\tilde{X}_n^{(1)} = X_n^{(0)} \bigcap \left(\bar{x}_n - \frac{f(\bar{x}_n)}{\alpha_1^{(1)} f'(\bar{x}_n) + \alpha_2^{(1)} f'\left(\bar{x}_n + \beta_2\left(X_n^{(0)} - \bar{x}_n\right)\right)} \right).$$

Нехай

$$U_n^{(1)} = \bar{x}_n - \frac{f(\bar{x}_n)}{\alpha_1^{(1)} f'(\bar{x}_n) + \alpha_2^{(1)} f'\left(\bar{x}_n + \beta_2\left(X_n^{(0)} - \bar{x}_n\right)\right)} = \bar{x}_n - \frac{f(\bar{x}_n)}{F'\left(X_n^{(0)}\right)}.$$

Оцінимо ширину інтервалу $U_n^{(1)}$.

$$\omega\left(U_n^{(1)}\right) = \omega\left(\bar{x}_n - \frac{f(\bar{x}_n)}{F'\left(X_n^{(0)}\right)}\right) = \left|f(\bar{x}_n)\right| \omega\left(\frac{1}{F'\left(X_n^{(0)}\right)}\right) = \left|f(\bar{x}_n)\right| \omega\left(\left[\frac{1}{F'_{\max}};\, \frac{1}{F'_{\min}}\right]\right) =$$

$$= \left|f(\bar{x}_n)\right| \left(\frac{1}{F'_{\min}} - \frac{1}{F'_{\max}}\right) = \left|f(\bar{x}_n)\right| \frac{F'_{\max} - F'_{\min}}{F'_{\max} F'_{\min}},$$

де $F'_{\max} = \max\limits_{X_n^{(0)}} F'\left(X_n^{(0)}\right)$, $F'_{\min} = \min\limits_{X_n^{(0)}} F'\left(X_n^{(0)}\right)$.

Оцінимо $\left|f(\bar{x}_n)\right|$. Для цього подамо $f(\bar{x}_n)$ за теоремою про середнє

$$\left|f\left(\bar{x}_n\right)\right| = \left|f\left(x^*\right) + f'\left(x^* + \theta\left(\bar{x}_n - x^*\right)\right)\left(\bar{x}_n - x^*\right)\right| = \left|f'\left(x^* + \theta\left(\bar{x}_n - x^*\right)\right)\left(\bar{x}_n - x^*\right)\right| =$$

$$= \left|f'\left(x^* + \theta\left(\bar{x}_n - x^*\right)\right)\right|\omega\left(\bar{x}_n - x^*\right) \le \bar{f}'_{\max}\,\omega\left(X_n^{(0)}\right).$$

Оскільки $F'\left(X_n^{(0)}\right) = \alpha_1^{(1)} f'\left(\bar{x}_n\right) + \alpha_2^{(1)} f'\left(\bar{x}_n + \beta_2\left(X_n^{(0)} - \bar{x}_n\right)\right)$, то

$$F'_{\max} - F'_{\min} = \left(\alpha_1^{(1)} f'\left(\bar{x}_n\right) + \alpha_2^{(1)} f'\left(\bar{x}_n + \beta_2\left(X_n^{(0)} - \bar{x}_n\right)\right)\right)_{\max} -$$

$$-\left(\alpha_1^{(1)} f'\left(\bar{x}_n\right) + \alpha_2^{(1)} f'\left(\bar{x}_n + \beta_2\left(X_n^{(0)} - \bar{x}_n\right)\right)\right)_{\min} =$$

$$= \alpha_2^{(1)} F'_{\max}\left(\bar{x}_n + \beta_2\left(X_n^{(0)} - \bar{x}_n\right)\right) - \alpha_2^{(1)} F'_{\min}\left(\bar{x}_n + \beta_2\left(X_n^{(0)} - \bar{x}_n\right)\right) = \;=$$

$$= \alpha_2^{(1)}\omega\left(F'\left(\bar{x}_n + \beta_2\left(X_n^{(0)} - \bar{x}_n\right)\right)\right) \le \alpha_2^{(1)}\bar{L}_n^{(0)}\omega\left(\bar{x}_n + \beta_2\left(X_n^{(0)} - \bar{x}_n\right)\right) =$$

$$= \alpha_2^{(1)}\bar{L}_n^{(0)}\beta_2\,\omega\left(X_n^{(0)}\right) = \frac{1}{2}\bar{L}_n^{(0)}\omega\left(X_n^{(0)}\right).$$

Отже,

$$\omega\left(U_n^{(1)}\right) = \left|f\left(\bar{x}_n\right)\right|\frac{F'_{\max} - F'_{\min}}{F'_{\max}F'_{\min}} \le \frac{\bar{f}'_{\max}\,\omega\left(X_n^{(0)}\right)\frac{1}{2}\bar{L}_n^{(0)}\omega\left(X_n^{(0)}\right)}{F'_{\max}F'_{\min}} \le$$

$$\le \frac{\bar{f}'_{\max}\bar{L}_n^{(0)}\left(\omega\left(X_n^{(0)}\right)\right)^2}{2F'_{\max}F'_{\min}} \le \frac{1}{2}C_n^{(0)}\left(\omega\left(X_n^{(0)}\right)\right)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^{2^1-1} C_n^{(0)}\left(\omega\left(X_n^{(0)}\right)\right)^{2^1}.$$

Нехай тепер для деякого i виконується

$$\omega\left(\tilde{X}_n^{(i-1)}\right) \le \left(\frac{1}{2}\right)^{2^{i-1}-1} C_n^{(i-2)}\left(\omega\left(X_n^{(0)}\right)\right)^{2^{i-1}}.$$

Нехай

$$U_n^{(i)} = \bar{x}_n^{(i-1)} - \frac{f\left(\bar{x}_n^{(i-1)}\right)}{\alpha_1^{(i)} f'\left(\bar{x}_n^{(i-1)}\right) + \alpha_{i+1}^{(i)} f'\left(\bar{x}_n^{(i-1)} + \beta_{i+1}\left(\tilde{X}_n^{(i-1)} - \bar{x}_n^{(i-1)}\right)\right)} = \bar{x}_n^{(i-1)} - \frac{f\left(\bar{x}_n^{(i-1)}\right)}{F'\left(\tilde{X}_n^{(i-1)}\right)}.$$

Оцінимо ширину інтервалу $U_n^{(1)}$.

$$\omega\left(U_n^{(i)}\right) = \omega\left(\bar{x}_n^{(i-1)} - \frac{f\left(\bar{x}_n^{(i-1)}\right)}{F'\left(\tilde{X}_n^{(i-1)}\right)}\right) = \left|f\left(\bar{x}_n^{(i-1)}\right)\right|\omega\left(\frac{1}{F'\left(\tilde{X}_n^{(i-1)}\right)}\right) =$$

$$= \left|f\left(\bar{x}_n^{(i-1)}\right)\right|\omega\left(\left[\frac{1}{F'^{i-1}_{\max}};\frac{1}{F'^{i-1}_{\min}}\right]\right) = \left|f\left(\bar{x}_n^{(i-1)}\right)\right|\left(\frac{1}{F'^{i-1}_{\min}} - \frac{1}{F'^{i-1}_{\max}}\right) = \left|f\left(\bar{x}_n^{(i-1)}\right)\right|\frac{F'^{i-1}_{\max} - F'^{i-1}_{\min}}{F'^{i-1}_{\max}F'^{i-1}_{\min}}.$$

де $F'^{i-1}_{\max} = \max\limits_{X_n^{(i-1)}} F'\left(X_n^{(i-1)}\right)$, $F'^{i-1}_{\min} = \min\limits_{X_n^{(i-1)}} F'\left(X_n^{(i-1)}\right)$.

$\left|f\left(\bar{x}_n^{(i-1)}\right)\right|$ оцінимо аналогічно як $\left|f\left(\bar{x}_n\right)\right|$. Для цього подамо $f\left(\bar{x}_n^{(i-1)}\right)$ за теоремою про середнє та отримаємо

$$\left|f\left(\bar{x}_n^{(i-1)}\right)\right| \le \bar{f}'_{\max}\,\omega\left(\tilde{X}_n^{(i-1)}\right).$$

Оскільки

$$F'\left(\widetilde{X}_n^{(i-1)}\right)=\alpha_1^{(i)}f'\left(\overline{x}_n^{(i-1)}\right)+\left(\alpha_2^{(i)}+\alpha_3^{(i)}+\ldots+\alpha_{i+1}^{(i)}\right)f'\left(\overline{x}_n^{(i-1)}+\beta_{i+1}\left(\widetilde{X}_n^{(i-1)}-\overline{x}_n^{(i-1)}\right)\right),$$

то

$$F'^{\,i}_{\max}-F'^{\,i}_{\min}=\left(\alpha_1^{(i)}f'\left(\overline{x}_n^{(i-1)}\right)+\left(\alpha_2^{(i)}+\alpha_3^{(i)}+\ldots+\alpha_{i+1}^{(i)}\right)f'\left(\overline{x}_n^{(i-1)}+\beta_{i+1}\left(\widetilde{X}_n^{(i-1)}-\overline{x}_n^{(i-1)}\right)\right)\right)_{\max}-$$

$$-\left(\alpha_1^{(i)}f'\left(\overline{x}_n^{(i-1)}\right)+\left(\alpha_2^{(i)}+\alpha_3^{(i)}+\ldots+\alpha_{i+1}^{(i)}\right)f'\left(\overline{x}_n^{(i-1)}+\beta_{i+1}\left(\widetilde{X}_n^{(i-1)}-\overline{x}_n^{(i-1)}\right)\right)\right)_{\min}=$$

$$=\left(\alpha_2^{(i)}+\alpha_3^{(i)}+\ldots+\alpha_{i+1}^{(i)}\right)F'_{\max}\left(\overline{x}_n^{(i-1)}+\beta_{i+1}\left(\widetilde{X}_n^{(i-1)}-\overline{x}_n^{(i-1)}\right)\right)-$$

$$-\left(\alpha_2^{(i)}+\alpha_3^{(i)}+\ldots+\alpha_{i+1}^{(i)}\right)F'_{\min}\left(\overline{x}_n^{(i-1)}+\beta_{i+1}\left(\widetilde{X}_n^{(i-1)}-\overline{x}_n^{(i-1)}\right)\right)=$$

$$=\left(\alpha_2^{(i)}+\alpha_3^{(i)}+\ldots+\alpha_{i+1}^{(i)}\right)\omega\left(F'\left(\overline{x}_n^{(i-1)}+\beta_{i+1}\left(\widetilde{X}_n^{(i-1)}-\overline{x}_n^{(i-1)}\right)\right)\right)\le$$

$$\le\left(\alpha_2^{(i)}+\alpha_3^{(i)}+\ldots+\alpha_{i+1}^{(i)}\right)\overline{L}_n^{(i-1)}\omega\left(\overline{x}_n^{(i-1)}+\beta_{i+1}\left(\widetilde{X}_n^{(i-1)}-\overline{x}_n^{(i-1)}\right)\right)=$$

$$=\left(\alpha_2^{(i)}+\alpha_3^{(i)}+\ldots+\alpha_{i+1}^{(i)}\right)\overline{L}_n^{(i-1)}\beta_{i+1}\omega\left(\widetilde{X}_n^{(i-1)}\right)\le\frac{1}{2}\overline{L}_n^{(i-1)}\omega\left(\widetilde{X}_n^{(i-1)}\right).$$

Отже,

$$\omega\left(U_n^{(i)}\right)=\left|f\left(\overline{x}_n^{(i-1)}\right)\right|\frac{F'^{\,i-1}_{\max}-F'^{\,i-1}_{\min}}{F'^{\,i-1}_{\max}F'^{\,i-1}_{\min}}\le\frac{\overline{f}'_{\max}\omega\left(\widetilde{X}_n^{(i-1)}\right)\frac{1}{2}\overline{L}_n^{(i-1)}\omega\left(\widetilde{X}_n^{(i-1)}\right)}{F'^{\,i-1}_{\max}F'^{\,i-1}_{\min}}\le$$

$$\le\frac{\overline{f}'_{\max}\overline{L}_n^{(i-1)}\left(\omega\left(\widetilde{X}_n^{(i-1)}\right)\right)^2}{2F'^{\,i-1}_{\max}F'^{\,i-1}_{\min}}\le\left(\frac{1}{2}\right)^{2^i-1}C_n^{(i-1)}\left(\omega\left(X_n^{(0)}\right)\right)^{2^i}.$$

На підставі (4), врахувавши, що $X_n^m=X_{n+1}$, остаточно отримаємо

$$\omega\left(X_{n+1}\right)\le(0.5)^{2^m-1}C\omega\left(X_n\right)^{2^m}.$$

Тепер розглянемо доведення у багатовимірному випадку. Аналогічно використаємо метод математичної індукції.

У цьому випадку перед нами стоятиме завдання оцінки ширини оберненої матриці до інтервальної матриці. Для цього використаємо інтервальний аналог методу Шульца

$$\widetilde{A}_{k+1}^{-1}=m\left(\widetilde{A}_k^{-1}\right)+\widetilde{A}_k^{-1}\left(\dot{I}-\dot{A}m\left(\widetilde{A}_k^{-1}\right)\right),$$

а також узагальнення ітераційної процедури Шульца

$$m\left(\widetilde{A}_{k+1}^{-1}\right)=m\left(\widetilde{A}_k^{-1}\right)+m\left(\widetilde{A}_k^{-1}\right)\left(\dot{I}-\dot{A}m\left(\widetilde{A}_k^{-1}\right)\right).$$

Тут $\dot{A}\subset A$ – довільна точкова матриця, що міститься в інтервальній матриці A; $\widetilde{A}_k^{-1}$ – множина всіх точкових матриць, що містять $\dot{A}_k^{-1}$.

Нехай

$$\left\{\left(\dot{F}'\right)^{-1}\middle|\dot{F}'\in F'_k\right\}\subseteq\left(\widetilde{F}'_k\right)^{-1}\subseteq\left(\widetilde{F}'_0\right)^{-1},\ (k\ge 0);\ F'_k\overset{df}{=}F'\left(X_k\right).$$

Тоді

$$X_{k+1} = X_k \bigcap \left\{ \bar{x}_k - (F_k')^{-1} f(\bar{x}_k) \right\} \subset X_k \bigcap \left\{ \bar{x}_k - \left(\widetilde{F}_k'\right)^{-1} f(\bar{x}_k) \right\}.$$

Оцінимо ширину інтервалу X_{k+1}.

$$\omega(X_{k+1}) = \omega\left\{ \bar{x}_k - \left(\widetilde{F}_k'\right)^{-1} f(\bar{x}_k) \right\} = \omega\left(\left(\widetilde{F}_k'\right)^{-1} \right) \left| f(\bar{x}_k) \right| =$$

$$= \omega\left(\left(\widetilde{F}_k'\right)^{-1} \right) \left| f(\bar{x}_k) - f(x^*) \right| = \omega\left(\left(\widetilde{F}_k'\right)^{-1} \right) \left| \dot{f}'(\xi_*)(\bar{x}_k - x^*) \right| \le$$

$$\le \omega\left(\left(\widetilde{F}_k'\right)^{-1} \right) \frac{1}{2} \left| \dot{f}'(\xi_*) \right| \omega(X_k) \le \frac{1}{2} \omega\left(\left(\widetilde{F}_k'\right)^{-1} \right) \left| F'_{\max}(X_k) \right| \omega(X_k).$$

Оскільки $F'(X_k) = \alpha_1^{(1)} f'(\bar{x}_k) + \alpha_2^{(1)} f'(\bar{x}_k + \beta_2(X_k - \bar{x}_k))$, то $(F'(X_k))^{-1} \subset \left(\widetilde{F}_k'\right)^{-1}$. Однак $\left(\widetilde{F}_{k+1}'\right)^{-1} = \widetilde{F}_k' \bigcap \left\{ m\left((F_k')^{-1}\right) + \left(\dot{I} - m\left(\left(\widetilde{F}_k'\right)^{-1} \right) F'(X_k) \right) \left(\widetilde{F}_k'\right)^{-1} \right\}$.

$$\omega\left(\left(\widetilde{F}_{k+1}'\right)^{-1} \right) = \omega\left(\left(\dot{I} - m\left(\left(\widetilde{F}_k'\right)^{-1} \right) F'(X_k) \right) \left(\widetilde{F}_k'\right)^{-1} \right) = \omega\left(m\left(\left(\widetilde{F}_k'\right)^{-1} \right) \left(F'(X_k) - m\left(\widetilde{F}_k'\right) \right) \left(\widetilde{F}_k'\right)^{-1} \right) =$$

$$= \left| m\left(\left(\widetilde{F}_k'\right)^{-1} \right) \right| \omega(F'(X_k)) \left| \left(\widetilde{F}_k'\right)^{-1} \right|.$$

Але

$$\left| \left(\widetilde{F}_k'\right)^{-1} \right| \le \left| (F_0')^{-1} \right|;$$

$$\left| m\left(\left(\widetilde{F}_k'\right)^{-1} \right) \right| \le \left| (F_0')^{-1} \right|.$$

Тому

$$\omega\left(\left(\widetilde{F}_{k+1}'\right)^{-1} \right) \le \alpha\omega(F'(X_k)),$$

де α – константа, яка не залежить від кількості ітерацій k.

Кожен елемент матриці $\omega(F'(X_k))$ набуде такого вигляду:

$$\omega\left(\frac{\partial}{\partial x_j} f_i\left(X_k^{(1)}, X_k^{(2)}, \ldots, X_k^{(n)} \right) \right).$$

Тому

$$\omega\left(\frac{\partial}{\partial x_j} f_i\left(X_k^{(1)}, X_k^{(2)}, \ldots, X_k^{(n)} \right) \right) \le \sum_{r=1}^{n} \gamma_k^{ijr} \omega\left(X_k^{(r)}\right) \le \sum_{r=1}^{n} \gamma_0^{ijr} \omega\left(X_k^{(r)}\right).$$

Звідси випливає, що

$$\omega\left(\left(\widetilde{F}_{k+1}'\right)^{-1} \right) \le \delta\omega(X_k).$$

Отже,

$$\omega(X_{k+1}) = \frac{1}{2} \omega\left(\left(\widetilde{F}_k'\right)^{-1} \right) \left| F'_{\max}(X_k) \right| \omega(X_k) \le \frac{1}{2} C^{(k)} (\omega(X_k))^2.$$

Далі доведення проводимо аналогічно як в одновимірному випадку. Теорему доведено.

На всьому інтервалі X_0 умови теореми, очевидно, можуть і не виконуватися. Однак метод (2)-(4) буде збіжним і на всьому інтервалі X_0 та знаходитиме всі корені системи (1), якщо забезпечити одночасну локалізацію всіх її дійсних коренів, що належать інтервалу X_0. Тоді не треба перевіряти виконання умов теореми, а при виконанні їхні корені вже локалізовані і далі цей метод збігається в кожному локалізуючому інтервалі до відповідного кореня системи.

Локалізацію коренів виконуємо поділом відповідних інтервалів. Умовою поділу кожного інтервалу є те, що ширина поточного інтервалу зменшилась більше, ніж вдвічі від початкового та те, що всі відповідні обернені матриці методу є невиродженими. Якщо внаслідок виконання кроків (2)-(4) інтервал не звужується, то можливо на цьому інтервалі міститься більше одного кореня, тоді треба застосовувати метод дихотомії.

Зауважимо таке: якщо X_0 не містить розв'язку системи (1), то метод (2)-(4) за декілька кроків видає порожній інтервал.

4. РЕЗУЛЬТАТИ ЧИСЛОВИХ ЕКСПЕРИМЕНТІВ

Перевірку теоретичних висновків та апробацію методу проводили аналізом і розв'язуванням багатьох трансцендентних рівнянь і систем таких рівнянь методом (2)-(4) та за допомогою комп'ютерних пакетів Mathematica, MathLab, MathCad. Зокрема, знаходили корені такого рівняння:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{\frac{(x-1)^2}{2}}\sin\left(\frac{x}{8}\right)-\sqrt{2+\cos\left(\frac{x}{4}\right)}\ln\left(x^2+1\right)+10=0\,.$$

Це рівняння має 10 різних дійсних коренів на проміжку $[-72,\ 72]$. Коренями такого рівняння є: -66.629; -58.6038; -43.038; -30.925; -21.6418; 21.6418; 30.925; 43.038; 58.6038; 66.629

Також знаходили корені такої системи рівнянь:

$$\begin{cases} x^4-2x^3y+2xy^3-y^4+x^3+x^2y-5xy^2+3y^3-87x^2+4xy+83y^2-265x-435y+350=0 \\ x^7+3x^6y-2x^5y^2-10x^4y^3+x^3y^4+11x^2y^5-4y^7-4x^6-11x^5y+10x^4y^2+30x^3y^3- \\ \qquad -16x^2y^4-19xy^5+10y^6-35x^5-20x^4y+16x^3y^2-58x^2y^3-xy^4+98y^5+ \\ \qquad +140x^4+30x^3y+164x^2y^2+102xy^3-112y^4+259x^3+23x^2y-94xy^2-728y^3- \\ \qquad -1036x^2-403xy+98y^2-225x+1350y+900=0 \end{cases}$$

Така система має 16 дійсних коренів на квадраті $[-10,10]\times[-10,10]$, а саме (-19/3,2/3), (-5, 0), (-4, 3), (-10/3, 11/3), (-3, 2), (-2, 3), (-1, 6), (-1, 2), (0, 5), (1, 0), (2, -1), (4.5, -5.5), (5, -5), (7, -6), (7.5, -2.5), (8, -2), причому корінь (-2, 3) є кратним.

Під час проведення числових експериментів наведені вище рівняння та систему рівнянь розв'язували трьома методами.

1. Багатокроковий метод, ідея побудови якого ґрунтується на методі (2-7) з [6].

$$\tilde{X}_n^{(1)}=X_n^{(0)}\cap\left(\bar{x}_n-\left(\alpha_1^{(1)}f'\left(\bar{x}_n\right)+\alpha_2^{(1)}f'\left(\bar{x}_n+\beta_2\left(X_n^{(0)}-\bar{x}_n\right)\right)\right)^{-1}f\left(\bar{x}_n\right)\right);$$

$$\tilde{X}_n^{(2)}=\tilde{X}_n^{(1)}\cap$$
$$\cap\left(\bar{x}_n-\left(\alpha_1^{(2)}f'\left(\bar{x}_n\right)+\alpha_2^{(2)}f'\left(\bar{x}_n+\beta_2\left(X_n^{(0)}-\bar{x}_n\right)\right)+\alpha_3^{(2)}f'\left(\bar{x}_n+\beta_3\left(\tilde{X}_n^{(1)}-\bar{x}_n\right)\right)\right)^{-1}f\left(\bar{x}_n\right)\right);$$

$$X_{n+1} = \widetilde{X}_n^{(2)} \cap \Big(\bar{x}_n - \Big(\alpha_1 f'(\bar{x}_n) + \alpha_2 f'\Big(\bar{x}_n + \beta_2\Big(X_n^{(0)} - \bar{x}_n\Big)\Big) +$$
$$+\alpha_3 f'\Big(\bar{x}_n + \beta_3\Big(\widetilde{X}_n^{(1)} - \bar{x}_n\Big)\Big) + \alpha_4 f'\Big(\bar{x}_n + \beta_4\Big(\widetilde{X}_n^{(2)} - \bar{x}_n\Big)\Big)\Big)^{-1} f(\bar{x}_n)\Big).$$

2. Багатокроковий метод, кожен крок якого є ітераційним повторенням одного кроку методу 1, але щоразу з новим уточненим вектор-інтервалом $\widetilde{X}_n^{(i)}$.

$$\widetilde{X}_n^{(1)} = X_n^{(0)} \cap \Big(\bar{x}_n - \Big(\alpha_1^{(1)} f'(\bar{x}_n) + \alpha_2^{(1)} f'\Big(\bar{x}_n + \beta_4\Big(X_n^{(0)} - \bar{x}_n\Big)\Big)\Big)^{-1} f(\bar{x}_n)\Big);$$

$$\widetilde{X}_n^{(2)} = \widetilde{X}_n^{(1)} \cap \left(\bar{x}_n^{(1)} - \left(\alpha_1^{(1)} f'\left(\bar{x}_n^{(1)}\right) + \alpha_2^{(1)} f'\left(\bar{x}_n^{(1)} + \beta_4\left(\widetilde{X}_n^{(1)} - \bar{x}_n\right)\right)\right)^{-1} f\left(\bar{x}_n^{(1)}\right)\right);$$

$$X_{n+1} = \widetilde{X}_n^{(2)} \cap \left(\bar{x}_n^{(2)} - \left(\alpha_1^{(1)} f'\left(\bar{x}_n^{(2)}\right) + \alpha_2^{(1)} f'\left(\bar{x}_n^{(2)} + \beta_4\left(\widetilde{X}_n^{(2)} - \bar{x}_n^{(2)}\right)\right)\right)^{-1} f\left(\bar{x}_n^{(2)}\right)\right).$$

3. Метод (2)-(4)

$$\widetilde{X}_n^{(1)} = X_n^{(0)} \cap \Big(\bar{x}_n - \Big(\alpha_1^{(1)} f'(\bar{x}_n) + \alpha_2^{(1)} f'\Big(\bar{x}_n + \beta_2\Big(X_n^{(0)} - \bar{x}_n\Big)\Big)\Big)^{-1} f(\bar{x}_n)\Big);$$

$$\widetilde{X}_n^{(2)} = \widetilde{X}_n^{(1)} \cap$$
$$\cap \left(\bar{x}_n^{(1)} - \left(\alpha_1^{(2)} f'\left(\bar{x}_n^{(1)}\right) + \left(\alpha_2^{(2)} + \alpha_3^{(2)}\right) f'\left(\bar{x}_n^{(1)} + \beta_3\left(\widetilde{X}_n^{(1)} - \bar{x}_n^{(1)}\right)\right)\right)^{-1} f\left(\bar{x}_n^{(1)}\right)\right);$$

$$X_{n+1} = \widetilde{X}_n^{(2)} \cap$$
$$\cap \left(\bar{x}_n^{(2)} - \left(\alpha_1 f'\left(\bar{x}_n^{(2)}\right) + (\alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4) f'\left(\bar{x}_n^{(2)} + \beta_4\left(\widetilde{X}_n^{(2)} - \bar{x}_n^{(2)}\right)\right)\right)^{-1} f\left(\bar{x}_n^{(2)}\right)\right).$$

У кожному випадку одна ітерація методу складалася з 3 кроків. Коефіцієнти $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \beta_2, \beta_3, \beta_4$ взяли з [5].

Результати обчислень для рівняння подано в табл. 1.

Таблиця 1

Порівняння методів 1-3 під час розв'язування рівняння

Стартовий інтервал	Ітерації	Метод 1	Метод 2	Метод 3
[28; 37] w=9.0	1.1	[29.609; 31.406] w=1.797	[29.099; 31.328] w=2.228	[29.609; 31.406] w=1.797
	1.2	[30.58; 31.107] w=0.526	[30.90267; 31.0816] w=0.17889	[30.919; 30.965] w=0.0452
	1.3	[30.728; 31.038] w=0.31047	[30.920507; 30.925915] w=8.4875E-4	[30.92518; 30.92527] w=9.528E-5

Стартовий інтервал	Ітерації	Метод 1	Метод 2	Метод 3
	2.1 2.2 2.3	[30.92484; 30.9258] w=9.939E-4 [30.925079; 30.92528] w=2.022E-4 [30.92515; 30.92529] w=1.398E-4	[30.92520614, 30.92520616] w=1.78E-8	[30.92520614947; 30.9252061496] w=1.319E-10
	3.1	[30.9252061494; 30.9252061495] w=1.09E-10		

Тут w – ширина проміжного інтервалу на кожній ітерації.

Результати розв'язування системи рівнянь подано в табл. 2.

Таблиця 2

Порівняння методів 1-3 під час розв'язування системи

Стартовий інтервал	Ітерації	Метод 1	Метод 2	Метод 3
[-1,2; 0,9] x[5.8, 6.1] w=0.3x0.3	1.1 1.2 1.3	[-1.014; -0.9]x [5.97955, 6.1] w=0.114x0.120445 [-1.01309; -0.97933]x [5.98186, 6.043297] w=0.03376x0.06144 [-1.00835; -0.99019]x [5.98776, 6.01837] w=0.01815x0.030605	[-1.014; -0.9]x [5.97938, 6.1] w=0.114x0.12062 [-1.014; -0.97924]x [5.97938, 6.0163] w=0.03476x0.0369 [-1.00089; -0.9993]x [5.99985, 6.000193] w=0.00159x3.44E-4	[-1.014; -0.9]x [5.97955, 6.1] w=0.114x0.140445 [-1.014; -0.98482]x [5.9853, 6.01198] w=0.02918x0.02669 [-1.00035; -0.9997]x [5.99984, 6.00021] w=6.09E-4x3.69E-4
	2.1 2.2 2.3	[-1.000299; -0.99974] x[5.99962, 6.00034] w=5.54E-4x7.215E-4 [-1.000066; -0.9999382]x [5.999913, 6.00008] w=1.277E-4x 1.669E-4 [-1.0000304; -0.9999706]x [5.9999599, 6.0000383] w=5.99E-5x7.83E-5	[-1.000000088, -0.999999919]x [5.99999987, 6.00000013] w=1.69E-7x2.66E-7	[-1.000000019; -0.999999984]x [5.99999994, 6.00000006] w=3.53E-8x1.19E-7

Стартовий інтервал	Ітерації	Метод 1	Метод 2	Метод 3
	3.1	[-1.000000000012; -0.999999999987]x [5.99999999984, 6.00000000016] w=2.45E-11x3.2E-10		

Для реалізації програми використано інтервальну арифметику [1], [3]-[5]. Обчислення виконано з точністю $\varepsilon = 10^{-6}$. Як бачимо, метод (2)-(4) дає ліпші результати порівняно з методом 1 та методом 2.

Зауважимо, що розв'язування цього рівняння за допомогою пакета Mathematica 5.0 в багатьох випадках породжувало незбіжний процес. Відбувалися пропуски коренів (знаходження кореня, який не є безпосередньо наступним після початкового наближення) навіть у тих випадках, коли початкові наближення для них брали дуже близькими до кореня (на відстані |0.05| до шуканого кореня). Якщо ж і знаходили корінь заданого рівняння – то лише один (інших коренів метод просто "не бачив").

5. ВИСНОВКИ

З проведеного дослідження випливає, що запропонована параметризована система інтервальних ітераційних методів (2)-(4) дає змогу знаходити всі дійсні корені системи трансцендентних рівнянь на будь-якому фіксованому інтервалі. Ці методи завжди збігаються до коренів цієї системи, спочатку принаймні зі швидкістю геометричної прогресії зі знаменником $q = 1/2$, а у разі виконання умов наведеної теореми вони в кожному локалізуючому інтервалі кожного кореня системи автоматично далі збігаються до відповідного кореня з порядком збіжності

$$\omega(X_{n+1}) \le (0.5)^{2^m-1} C\omega(X_n)^{2^m} .$$

Зауважимо, що при реалізації методу (2)-(4) не треба перевіряти виконання умов наведеної теореми.

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. *Алефельд Г.* Введение в интервальные вычисления / Г. Алефельд, Ю. Херцбергер. – М.: Мир, 1987. – 357 с.
2. *Венгерский П.С.* Интервальный метод решения систем нелинейных уравнений, базирующийся на предельных теоремах о среднем / П.С. Венгерский, П.С. Сеньо. – Львов, 1990, – 24 с
3. *Калмыков С.А.* Методы интервального анализа / С.А. Калмыков, Ю.И. Шокин, З.Х. Юлдашев. – Новосибирск: "Наука", Сибирское отделение, 1986. – 222 с.
4. *Сеньо П.С.* Новий підхід до побудови інтервальних методів розв'язування систем нелінійних рівнянь / П.С. Сеньо // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. 1989. – Вип 31. С. 85-92.
5. *Сеньо П.С.* Інтервальні методі розв'язування деяких класів детермінованих задач / П.С. Сеньо // Вісн. Львів. ун-ту. Серія прикл. матем. та інформ. 2003. – Вип. 7. С. 86-96.

6. *Анісімова Н.О.* Ефективний інтервальний ітераційний метод розв'язування систем нелінійних рівнянь високого порядку збіжності / Н.О. Анісімова, П.С. Сеньо // Вісн. Львів. ун-ту. Серія прикл. матем. та інформ. 2011. – Вип. 15. С. 81-96.

Стаття: надійшла до редколегії 06.07.2011
доопрацьована 01.09.2011
прийнята до друку 08.09.2011

МНОЖЕСТВО ЭФФЕКТИВНЫХ КОРОТКОШАГОВЫХ ИНТЕРВАЛЬНЫХ ИТЕРАЦИОННЫХ МЕТОДОВ РЕШЕНИЯ СИСТЕМ ТРАНСЦЕНДЕНТНЫХ УРАВНЕНИЙ

Н. Анисимова, П. Сеньо

Львовский национальный университет имени Ивана Франко,
ул. Университетская, 1, Львов, 79000, e-mail: nataly.anisimova@gmail.com

Предложено и исследовано множество эффективных интервальных итерационных методов нахождения всех действительных решений системы трансцендентных уравнений в заданном начальном интервале. При построении данной параметризированной системы использовано идею Рунге (приближение производных высших порядков производными первого порядка), а также идею Зейделя (учет всей новой информации, полученной в процессе реализации метода). Получены условия, при реализации которых данный метод сходится и имеет высокий порядок сходимости, рассмотрено примеры.

Результаты численных экспериментов подтверждают полученные теоретические выводы.

Ключевые слова: системы нелинейных уравнений, интервальные итерационные методы, сходимость, локализация.

PARAMETERIZED SET OF SHORT-STEP INTERVAL ITERATION METHODS FOR SOLVING SYSTEMS OF TRANSCENDENTAL EQUATIONS

N. Anisimova, P. Senyo

Ivan Franko National University of Lviv,
Universytetska str, 1, Lviv, 79000, e-mail: nataly.anisimova@gmail.com

A new set of effective interval iteration methods for finding all real solutions of system of transcendental equations, where initial interval is given, is presented and investigated in this paper. This parameterized system uses Runge's idea of approximating higher derivatives with first derivatives. It also uses Zeidel's idea of taking into consideration all new information, received during the realization of the method. Conditions, providing the high rate of convergence of the method, some examples are shown.

The results of numerical experiments confirm the received theoretical conclusions.

Key words: systems of nonlinear equations, interval iteration methods, convergence, localization.