

## МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ВПЛИВУ ХІМІЧНОЇ СУФОЗІЇ ТА НЕІЗОТЕРМІЧНИХ УМОВ НА ФІЛЬТРАЦІЙНУ КОНСОЛІДАЦІЮ ЗАСОЛЕНИХ ҐРУНТІВ У ТРИВИМІРНОМУ ВИПАДКУ

О. Мічута, А. Власюк, П. Мартинюк

*Національний університет водного господарства та природокористування,  
вул. Соборна 11, Рівне, 33028, e-mail: [michuta@ukr.net](mailto:michuta@ukr.net)*

Вдосконалено математичну модель консолідації ґрунтів з урахуванням їхньої засоленості та неізотермічних умов. Запропоновано кінематичну граничну умову на верхній рухомій межі масиву засоленого ґрунту з урахуванням хімічної суфозії. Чисельний розв'язок відповідної тривимірної крайової задачі знайдено безсітковим методом радіальних базисних функцій. Проведено чисельні експерименти. Досліджено вплив хімічної суфозії на розподіл надлишкових напорів у засоленому масиві ґрунту та на просідання верхньої межі ґрунту в неізотермічних умовах.

*Ключові слова:* хімічна суфозія, консолідація, неізотермічні умови, безсітковий метод.

### 1. ВСТУП

Актуальність дослідження процесів фільтраційної консолідації ґрунтів, у зв'язку з розвитком будівельної галузі, не зменшується. Їхні (процесів) класичні математичні моделі наведено в [8, 20]. Разом з тим при зростанні впливу техногенних чинників на ґрунтові основи цивільних і промислових об'єктів виникає необхідність в удосконаленні відповідних математичних моделей. Математичні моделі фільтраційної консолідації з урахуванням впливу тепло-масоперенесення побудовано в [3-6]. Однак явищ хімічної суфозії в цих працях враховано не було.

Інтенсивний розвиток промисловості й енергетики призводить до забруднення ґрунтів і ґрунтових вод різними хімічними речовинами. З часом ці речовини розчиняють хімічні сполуки ґрунту і ці розчинені сполуки в процесі фільтрації виносяться з ґрунтів. Цей процес називається хімічною суфозією [12]. Внаслідок хімічної суфозії руйнуються кристалічні зв'язки, збільшуються пори ґрунту, формуються зосереджені шляхи фільтрації, втрачається стійкість ґрунту. Процес хімічної суфозії має значний негативний вплив на властивості ґрунту, а це може призвести до деформації споруд і аварійних ситуацій, внаслідок просідання ґрунту [11, 13-16, 19, 21, 23]. Мета нашої праці - вдосконалити математичну модель консолідації ґрунтів з урахуванням їхньої засоленості. В цьому випадку просідання ґрунту зумовлюється не лише за рахунок розсіювання надлишкових напорів у поровій рідині, а й завдяки розчиненню твердих частинок скелета ґрунту – хімічній суфозії. Цей факт також має відобразитись у побудованій математичній моделі.

Ще одне важливе питання – відшукування розв'язків відповідних крайових задач, якими описуються побудовані математичні моделі. В [3, 6] для відшукування чисельних розв'язків використано метод скінченних різниць і метод скінченних елементів. Вони належать до класу так званих сіткових методів. Щоб їх застосувати, розрахункову область треба покрити геометричною сіткою – множиною вузлів із наперед визначеними взаємозв'язками. Іноді з усього часу, затраченого на розв'язання задачі, 70% займає саме підзадача побудови геометричної сітки [25]. Ще більше згадана проблема ускладнюється, якщо розглядати просторові задачі. В [4, 5]

до згаданого класу задач запропоновано застосувати безсіткові методи, зокрема, метод радіальних базисних функцій. Саме це й зумовлює вибір чисельного методу в оцій статті.

## 2. МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ ПРОЦЕСУ ФІЛЬТРАЦІЙНОЇ КОНСОЛІДАЦІЇ ЗАСОЛЕНОГО ҐРУНТУ

Розглянемо тривимірну задачу фільтраційної консолідації масиву засоленого ґрунту в області  $\Omega$  з межею  $\Gamma$  під впливом миттєво прикладеного незмінного у часі зовнішнього навантаження інтенсивністю  $q(x,y)$  (рис. 1).

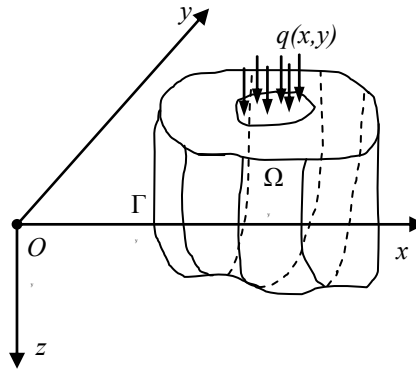


Рис. 1. Фільтраційна консолідація засоленого масиву ґрунту у тривимірному випадку

Математичну модель цієї задачі фільтраційної консолідації засоленого ґрунту з урахуванням хімічної суфозії в неізотермічних умовах можна описати такою крайовою задачею [3, 4, 6]:

$$\frac{(1+e)(1+2\xi)}{3\gamma a} [\nabla(\mathbf{K}_h(c,T,N)\nabla h - \mathbf{K}_c(c)\nabla c - \mathbf{K}_T\nabla T)] + \frac{\varepsilon(1+e)(1+2\xi)}{3\gamma\rho_s a} \left( \frac{\partial(nc)}{\partial t} - e \frac{\partial N}{\partial t} \right) = \frac{\partial h}{\partial t}, \quad \mathbf{X} \in \Omega, \quad t > 0, \quad (1)$$

$$\nabla(\mathbf{D}\nabla c) + \nabla(\mathbf{D}_T\nabla T) - (\mathbf{u}, \nabla c) = n \frac{\partial c}{\partial t} + \frac{\partial N}{\partial t}, \quad \mathbf{X} \in \Omega, \quad t > 0, \quad (2)$$

$$\nabla(\lambda\nabla T) - \rho c_p (\mathbf{u}, \nabla T) = c_T \frac{\partial T}{\partial t}, \quad \mathbf{X} \in \Omega, \quad t > 0, \quad (3)$$

$$\frac{\partial N}{\partial t} = -\gamma_m (C_m - c) N^a, \quad \mathbf{X} \in \bar{\Omega}, \quad t > 0, \quad (4)$$

$$\mathbf{u} = -\mathbf{K}_h(c,T,N)\nabla h + \mathbf{K}_c(c)\nabla c + \mathbf{K}_T\nabla T, \quad (5)$$

$$\mathbf{q}_c = \mathbf{u}c - \mathbf{D}\nabla c - \mathbf{D}_T\nabla T, \quad (6)$$

$$\mathbf{q}_T = \rho c_p \mathbf{u}T - \lambda\nabla T, \quad (7)$$

$$h(\mathbf{X},0) = H_0(\mathbf{X}), \quad c(\mathbf{X},0) = C_0(\mathbf{X}), \quad (8)$$

$$T(\mathbf{X},0) = T_0(\mathbf{X}), \quad N(\mathbf{X},0) = N_0(\mathbf{X}), \quad \mathbf{X} \in \bar{\Omega},$$

$$(\mathbf{u}, \mathbf{n})|_{\Gamma_u} = 0, \quad h|_{\Gamma_h} = H_1(\mathbf{X},t), \quad \mathbf{X} \in \Gamma_h, \quad (9)$$

$$(\mathbf{q}_c, \mathbf{n})|_{\Gamma_c^c} = 0, \quad c|_{\Gamma_c} = C_1(\mathbf{X}, t), \quad \mathbf{X} \in \Gamma_c, \quad (10)$$

$$(\mathbf{q}_T, \mathbf{n})|_{\Gamma_T^c} = 0, \quad T|_{\Gamma_T} = T_1(\mathbf{X}, t), \quad \mathbf{X} \in \Gamma_T, \quad (11)$$

$$\frac{dl(t)}{dt} = - \int_{l(t)}^{\varphi(x,y)} \frac{1}{(\rho_s - (1+e)N)(1+e)} \left( \frac{3\gamma\rho_c\alpha}{1+2\zeta} \frac{\partial h(x,y,\zeta,t)}{\partial t} - \gamma_m(1+e)(C_m - c(x,y,\zeta,t))N^a(x,y,\zeta,t) \right) dt, \quad t > 0, \quad (12)$$

де  $\bar{\Omega} = \Omega \cup \Gamma$ ,  $\Gamma = \Gamma_u \cup \Gamma_h = \Gamma_q^c \cup \Gamma_c = \Gamma_q^T \cup \Gamma_T$ ,  $\Gamma_u \cap \Gamma_h = \emptyset$ ,  $\Gamma_q^c \cap \Gamma_c = \emptyset$ ,

$\Gamma_q^T \cap \Gamma_T = \emptyset$ ,  $t \in (0; t_0]$ ;  $c$  – концентрація солей у рідкій фазі;  $h$  – надлишковий напір;  $N$  – концентрація солей у твердій фазі;  $T$  – температура;  $n$  – пористість ґрунту;  $e$  – коефіцієнт пористості;  $\rho_s$  – густина солей у твердій фазі;  $c_p$  – питома теплоємність порового розчину;  $c_T$  – об’ємна теплоємність ґрунту;  $C_m$  – концентрація граничного насичення в рідкій фазі;  $\gamma_m$  – коефіцієнт швидкості масообміну;  $\mathbf{K}_h(c, T, N) = \{k_{hij}(c, T, N)\}$ ,  $i, j = \overline{1,3}$ , – коефіцієнт (тензор) фільтрації;  $\mathbf{K}_c(c) = \{k_{cij}(c)\}$ ,  $i, j = \overline{1,3}$ , – коефіцієнт (тензор) хімічного осмосу;  $\mathbf{K}_T = \{k_{Tij}\}$ ,  $i, j = \overline{1,3}$ , – коефіцієнт (тензор) термічного осмосу;  $\mathbf{D} = \{D_{ij}\}$ ,  $i, j = \overline{1,3}$ , – коефіцієнт (тензор) хімічної дифузії;  $\mathbf{D}_T = \{(D_T)_{ij}\}$ ,  $i, j = \overline{1,3}$  – коефіцієнт (тензор) термодифузії;  $\lambda = \{\lambda_{ij}\}$ ,  $i, j = \overline{1,3}$ , – коефіцієнт (тензор) теплопровідності;  $\mathbf{u} = (u_1; u_2; u_3)$  – вектор швидкості фільтрації сольового розчину;  $\alpha$  – коефіцієнт засолення, що залежить від характеру засолення солей у твердій фазі [1]. Для об’ємного засолення ґрунту, при якому солі у вигляді кристаликів дискретно розсіяні в об’ємі ґрунту,  $\alpha = 1/2$ . При  $\alpha = 0$  отримуємо плівкове, поверхнєве засолення. Параметр  $\varepsilon$  набуває значення 0, якщо наявність солей не враховується і 1, якщо наявність солей враховується.

Оскільки швидкість руху твердих частинок ґрунту значно менша за швидкість фільтрації, то в узагальненому законі Дарсі-Герсеванова (5) знехтувано швидкістю руху твердої фази ґрунту.

Умова (12) є кінематичною граничною умовою на верхній рухомій межі ґрунту, який консолідується. Виводиться вона аналогічно до [3]. Однак у ній, на відміну від вже відомої умови [3], враховано просідання за рахунок масообмінних процесів між рідкою та твердою фазами ґрунту. Функція  $z = l(x(t), y(t), t)$  описує положення точок верхньої рухомої межі масиву ґрунту, а  $z = \varphi(x, y)$  – положення точок нижньої нерухомої межі масиву ґрунту. Також зауважимо, що (12) виведено лише при урахуванні вертикальних зміщень ґрунту.

### 3. ЧИСЕЛЬНЕ РОЗВ’ЯЗАННЯ КРАЙОВОЇ ЗАДАЧІ

Чисельний розв’язок крайової задачі (1)–(12) знайдено методом радіальних базисних функцій [5, 22, 24, 26]. Для цього покريمо замикання  $\bar{\Omega} = \Omega \cup \Gamma$  області  $\Omega$  вузловими точками  $(x_j, y_j, z_j)$ ,  $j = \overline{1, m}$ . Наближені розв’язки крайової задачі (1)–(12) шукаємо у вигляді

$$h(\mathbf{X}, t) \approx \sum_{j=1}^m h_j(t) \varphi_j(r_j, \varepsilon_h), \quad c(\mathbf{X}, t) \approx \sum_{j=1}^m c_j(t) \varphi_j(r_j, \varepsilon_C), \quad (13)$$

$$T(\mathbf{X}, t) \approx \sum_{j=1}^m T_j(t) \varphi_j(r_j, \varepsilon_T), \quad N(\mathbf{X}, t) \approx \sum_{j=1}^m N_j(t) \varphi_j(r_j, \varepsilon_N),$$

де  $\varepsilon_h > 0, \varepsilon_C > 0, \varepsilon_T > 0, \varepsilon_N > 0$  – параметри форми;  $\varphi_j(r_j, \varepsilon)$  – радіальні базисні функції;  $h_j(t), c_j(t), N_j(t), T_j(t)$  – невідомі коефіцієнти, які залежать від часу,

$$r_j = \sqrt{(x - x_j)^2 + (y - y_j)^2 + (z - z_j)^2}, \quad j = \overline{1, m}.$$

Зазначимо, що кількість і розміщення вузлових точок у вузлових сітках для відшукування кожної з чотирьох невідомих функцій може бути різною. Щоб уникнути зайвої індексації, ми цього в (13) не зазначали.

Покриємо замикання  $\overline{\Omega} = \Omega \cup \Gamma$  області  $\Omega$  колокаційними точками  $(x_i, y_i, z_i), i = \overline{1, s}, s \geq m$ , де  $s^\Omega$  – множина номерів колокаційних точок, які лежать в області  $\Omega$ ,  $s^\Gamma$  – множини номерів колокаційних точок, які лежать на відповідних частинах межі  $\Gamma$ . Наприклад,  $s^{\Gamma^a}$  – множина номерів колокаційних точок, які лежать на межі  $\Gamma^a$ . Тобто  $s = s^\Omega \cup s^{\Gamma^a} \cup s^{\Gamma^b} = s^\Omega \cup s^{\Gamma^c} \cup s^{\Gamma^d} = s^\Omega \cup s^{\Gamma^e} \cup s^{\Gamma^f}$ . Введемо позначення

$$r_{ij} = \sqrt{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2 + (z_i - z_j)^2}, \quad j = \overline{1, m}, \quad i = \overline{1, s}, \quad s \geq m.$$

Підставляючи (13) в рівняння (1)-(4), початкові умови (8) та граничні умови (9)-(11), використовуючи метод колокації в точці [2], отримуємо задачу Коші для системи нелінійних диференціальних рівнянь стосовно векторів невідомих

$$\mathbf{H}(t) = \{h_j(t)\}_{j=1}^m, \quad \mathbf{C}(t) = \{c_j(t)\}_{j=1}^m, \quad \mathbf{N}(t) = \{N_j(t)\}_{j=1}^m, \quad \mathbf{T}(t) = \{T_j(t)\}_{j=1}^m:$$

$$\mathbf{M}^{(1)} \frac{d\mathbf{H}}{dt} + \mathbf{L}^{(1)}(\mathbf{C}, \mathbf{N}, \mathbf{T})\mathbf{H} = \mathbf{K}^{(1)} \frac{d\mathbf{N}}{dt} + \mathbf{S}^{(1)} \frac{d\mathbf{C}}{dt} + \mathbf{S}^{(1)}\mathbf{C} + \mathbf{R}^{(1)}\mathbf{T} + \mathbf{F}^{(1)}, \quad (14)$$

$$\mathbf{M}^{(2)} \frac{d\mathbf{C}}{dt} + \mathbf{L}^{(2)}(\mathbf{C}, \mathbf{N}, \mathbf{T})\mathbf{C} = \mathbf{K}^{(2)} \frac{d\mathbf{N}}{dt} + \mathbf{R}^{(2)}\mathbf{T} + \mathbf{F}^{(2)}, \quad (15)$$

$$\mathbf{M}^{(3)} \frac{d\mathbf{T}}{dt} + \mathbf{L}^{(3)}(\mathbf{C}, \mathbf{N}, \mathbf{T})\mathbf{T} = \mathbf{F}^{(3)}, \quad (16)$$

$$\mathbf{M}^{(4)} \frac{d\mathbf{N}}{dt} = \mathbf{L}^{(4)}(\mathbf{C}, \mathbf{N}^\alpha), \quad (17)$$

$$\tilde{\mathbf{M}}^{(1)}\mathbf{H}_0 = \tilde{\mathbf{F}}^{(1)}, \quad \tilde{\mathbf{M}}^{(2)}\mathbf{C}_0 = \tilde{\mathbf{F}}^{(2)}, \quad \tilde{\mathbf{M}}^{(3)}\mathbf{T}_0 = \tilde{\mathbf{F}}^{(3)}, \quad \tilde{\mathbf{M}}^{(4)}\mathbf{N}_0 = \tilde{\mathbf{F}}^{(4)}, \quad (18)$$

де

$$\mathbf{M}^{(k)} = \{m_{ij}^{(k)}\}_{i=1, j=1}^{s, m}, \quad \tilde{\mathbf{M}}^{(k)} = \{\tilde{m}_{ij}^{(k)}\}_{i=1, j=1}^{s, m}, \quad \tilde{\mathbf{F}}^{(k)} = \{\tilde{f}_i^{(k)}\}_{i=1}^s, \quad \mathbf{L}^{(k)} = \{l_{ij}^{(k)}\}_{i=1, j=1}^{s, m}, \quad k = \overline{1, 4};$$

$$\mathbf{S}^{(1)} = \{s_{ij}^{(1)}\}_{i=1, j=1}^{s, m}, \quad \mathbf{S}^{(1)} = \{s_{ij}^{(1)}\}_{i=1, j=1}^{s, m}; \quad \mathbf{R}^{(k)} = \{r_{ij}^{(k)}\}_{i=1, j=1}^{s, m}, \quad \mathbf{K}^{(k)} = \{k_{ij}^{(k)}\}_{i=1, j=1}^{s, m},$$

$$k = 1, 2; \quad \mathbf{F}^{(k)} = \{f_i^{(k)}\}_{i=1}^s, \quad k = \overline{1, 3};$$

$$m_{ij}^{(1)} = -\varphi_j(r_{ij}, \varepsilon_h), \quad m_{ij}^{(2)} = -n\varphi_j(r_j, \varepsilon_C),$$

$$m_{ij}^{(3)} = -c_T\varphi_j(r_{ij}, \varepsilon_T), \quad i \in s^\Omega; \quad m_{ij}^{(4)} = \varphi_j(r_{ij}, \varepsilon_N), \quad i = \overline{1, s};$$

$$l_{ij}^{(1)} = \begin{cases} \frac{(1+e)(1+2\xi)}{3\gamma a} \nabla(\mathbf{K}_h(c, N, T) \nabla \varphi_j(r_{ij}, \varepsilon_h)), & i \in s^\Omega; \\ (\mathbf{K}_h(c, T, N) \nabla \varphi_j(r_{ij}, \varepsilon_h), \mathbf{n}), & i \in s^{\Gamma^h}; \\ \varphi_j(r_{ij}, \varepsilon_h), & i \in s^{\Gamma^h}; \end{cases}$$

$$s_{ij}^{(1)} = \begin{cases} \frac{(1+e)(1+2\xi)}{3\gamma a} \nabla(\mathbf{K}_c(c) \nabla \varphi_j(r_{ij}, \varepsilon_c)), & i \in s^\Omega; \\ (\mathbf{K}_c(c) \nabla \varphi_j(r_{ij}, \varepsilon_c), \mathbf{n}), & i \in s^{\Gamma^c}; \end{cases}$$

$$l_{ij}^{(2)} = \begin{cases} \nabla(\mathbf{D} \nabla \varphi_j(r_{ij}, \varepsilon_c)) - (\mathbf{u}, \nabla \varphi_j(r_{ij}, \varepsilon_c)), & i \in s^\Omega; \\ \varphi_j(r_{ij}, \varepsilon_c), & i \in s^{\Gamma^c}; \\ (\mathbf{D} \nabla \varphi_j(r_{ij}, \varepsilon_c), \mathbf{n}), & i \in s^{\Gamma^c}; \end{cases}$$

$$k_{ij}^{(1)} = \frac{\varepsilon e(1+e)(1+2\xi)}{3\gamma \rho_s a} \varphi_j(r_{ij}, \varepsilon_N), \quad i \in s^\Omega; \quad k_{ij}^{(2)} = \varphi_j(r_{ij}, \varepsilon_N), \quad i \in s^\Omega;$$

$$l_{ij}^{(3)} = \begin{cases} \nabla(\lambda \nabla \varphi_j(r_{ij}, \varepsilon_T)) - \rho c_p (\mathbf{u}, \nabla \varphi_j(r_{ij}, \varepsilon_T)), & i \in s^\Omega; \\ \varphi_j(r_{ij}, \varepsilon_T), & i \in s^{\Gamma^T}; \\ (\lambda \nabla \varphi_j(r_{ij}, \varepsilon_T), \mathbf{n}), & i \in s^{\Gamma^T}; \end{cases}$$

$$l_{ij}^{(4)} = \gamma_m \left( \sum_{j=1}^m c_j(t) \varphi_j(r_{ij}, \varepsilon_c) - C_m \right) \cdot \left( \sum_{j=1}^m N_j(t) \varphi_j(r_{ij}, \varepsilon_N) \right)^\alpha, \quad i = \overline{1, s};$$

$$s_{ij}^{(1)} = -\frac{\varepsilon n(1+e)(1+2\xi)}{3\gamma \rho_s a} \varphi_j(r_{ij}, \varepsilon_c), \quad i \in s^\Omega,$$

$$f_i^{(1)} = H_1(\mathbf{X}_i), i \in s^{\Gamma^h}; \quad f_i^{(2)} = C_1(\mathbf{X}_i), i \in s^{\Gamma^c}; \quad f_i^{(3)} = T_1(\mathbf{X}_i), i \in s^{\Gamma^T};$$

$$r_{ij}^{(2)} = \begin{cases} \nabla(\mathbf{D}_T \nabla \varphi_j(r_{ij}, \varepsilon_T)), & i \in s^\Omega, \\ -(\mathbf{D}_T \nabla \varphi_j(r_{ij}, \varepsilon_T), \mathbf{n}), & i \in s^{\Gamma^T}; \end{cases}$$

$$r_{ij}^{(1)} = \begin{cases} \frac{(1+e)(1+2\xi)}{3\gamma a} \nabla(\mathbf{K}_T \nabla \varphi_j(r_{ij}, \varepsilon_T)), & i \in s^\Omega, \\ (\mathbf{K}_T \nabla \varphi_j(r_{ij}, \varepsilon_T), \mathbf{n}), & i \in s^{\Gamma^T}; \end{cases}$$

$$\tilde{m}_{ij}^k = \varphi_j(r_{ij}, \varepsilon), \quad i = \overline{1, s}; \quad k = \overline{1, 4}. \quad \tilde{f}_i^{(1)} = H_0(x_i, y_i, z_i),$$

$$\tilde{f}_i^{(2)} = C_0(x_i, y_i, z_i), \quad \tilde{f}_i^{(3)} = T_0(x_i, y_i, z_i), \quad \tilde{f}_i^{(4)} = N_0(x_i, y_i, z_i), \quad i = \overline{1, s}.$$

Для знаходження чисельного розв'язку задачі Коші для системи нелінійних диференціальних рівнянь (14)–(18) поділимо часовий відрізок  $[0, t_0]$  на  $S$  однакових частин з кроком  $\tau$ . Для дискретизації рівнянь (14)–(16) в часі використаємо лінеаризовану повністю неявну різницеву схему [3–5]

$$\mathbf{M}^{(3)} \frac{\mathbf{T}^{(k+1)} - \mathbf{T}^{(k)}}{\tau} + \mathbf{L}^{(3)}(\mathbf{C}^{(k)}, \mathbf{N}^{(k)}, \mathbf{T}^{(k)}) \mathbf{T}^{(k+1)} = \mathbf{F}^{(3)}(t_k),$$

$$\begin{aligned} \mathbf{M}^{(2)} \frac{\mathbf{C}^{(k+1)} - \mathbf{C}^{(k)}}{\tau} + \mathbf{L}^{(2)}(\mathbf{C}^{(k)}, \mathbf{N}^{(k)}, \mathbf{T}^{(k)}) \mathbf{C}^{(k+1)} &= \mathbf{K}^{(2)} \frac{\mathbf{N}^{(k+1)} - \mathbf{N}^{(k)}}{\tau} + \mathbf{R}^{(2)} \mathbf{T}^{(k+1)} + \mathbf{F}^{(2)}(t_k), \\ \mathbf{M}^{(1)} \frac{\mathbf{H}^{(k+1)} - \mathbf{H}^{(k)}}{\tau} + \mathbf{L}^{(1)}(\mathbf{C}^{(k)}, \mathbf{N}^{(k)}, \mathbf{T}^{(k)}) \mathbf{H}^{(k+1)} &= \\ = \mathbf{K}^{(1)} \frac{\mathbf{N}^{(k+1)} - \mathbf{N}^{(k)}}{\tau} + \mathbf{S}^{(1)} \frac{\mathbf{C}^{(k+1)} - \mathbf{C}^{(k)}}{\tau} + \mathbf{S}^{(1)} \mathbf{C}^{(k+1)} + \mathbf{R}^{(1)} \mathbf{T}^{(k+1)} + \mathbf{F}^{(1)}(t_k), &k = \overline{0, S-1}. \end{aligned}$$

Для дискретизації нелінійного диференціального рівняння (17) в часі використаємо метод Ньютона [17]

$$\mathbf{M}^{(4)} \frac{\mathbf{N}^{(k+1)} - \mathbf{N}^{(k)}}{\tau} = \alpha \mathbf{L}^{(4)}(\mathbf{C}^{(k)}, \mathbf{N}^{\alpha-1}(t_k)) (\mathbf{N}^{(k+1)} - \mathbf{N}^{(k)}) + \mathbf{L}^{(4)}(\mathbf{C}^{(k)}, \mathbf{N}^{\alpha}(t_k)), k = \overline{0, S-1}.$$

Оскільки за умовою кількість колокаційних точок  $(x_i, y_i, z_i)$ ,  $i = \overline{1, s}$  є більшою за кількість вузлових точок  $(x_j, y_j, z_j)$ ,  $j = \overline{1, m}$ , то отримана після дискретизації задачі Коші (14)–(18) СЛАР є перевизначеною. Для її розв’язання можна використати метод найменших квадратів [9, 10].

У процесі консолідації розміри області  $\Omega$  змінюються. Тому на кожному часовому шарі треба перераховувати координати вузлових і колокаційних точок. Для цього використаємо кінематичну умову (12), згідно з якою одержимо

$$\begin{aligned} \frac{z^{(k+1)} - z^{(k)}}{\tau} &= - \int_{z^{(k)}}^{\varphi} \frac{1}{\left( \rho_s - (1+e) \sum_{j=1}^m N_j^{(k+1)} \varphi_j(r_j, \varepsilon_N) \right) (1+e)} \times \\ &\times \left( \frac{3\gamma \rho_c a}{1+2\zeta} \left( \sum_{j=1}^m \frac{h_j^{(k+1)} - h_j^{(k)}}{\tau} \varphi_j(r_j, \varepsilon_h) \right) - \right. \\ &\left. - \gamma_m (1+e) \left( C_m - \sum_{j=1}^m c_j^{(k+1)} \varphi_j(r_j, \varepsilon_c) \right) \left( \sum_{j=1}^m N_j^{(k+1)} \varphi_j(r_j, \varepsilon_N) \right)^\alpha \right) d\zeta, \end{aligned}$$

де  $\tau$  - крок по часу;  $(x, y, z^{(k+1)})$  - координати деякої точки області консолідації при  $t = t^{(k)}$ ,  $(x, y, z^{(k)})$  - координати цієї точки на наступному часовому шарі. Змінна інтегрування  $\zeta$  пробігає вертикальний відрізок від початкового положення точки  $z^{(k)}$  до нижньої нерухої межі  $z = \varphi(x, y)$  масиву ґрунту.

#### 4. РЕЗУЛЬТАТИ ЧИСЕЛЬНИХ ЕКСПЕРИМЕНТІВ

Розглянемо тривимірну задачу фільтраційної консолідації масиву засоленого ізотропного за своїми характеристиками глинистого ґрунту форми прямокутного паралелепіпеда з довжиною ребер 22 м, 22 м, 11 м (рис. 2). Межу ABCD позначимо як  $\Gamma_1$ ,  $A_1B_1C_1D_1$  –  $\Gamma_3$ ,  $ABC_1D_1$  і  $CDC_1D_1$  –  $\Gamma_4$ ,  $ADA_1D_1$  та  $VCB_1C_1$  –  $\Gamma_5$ , область KLMN –  $\Gamma_2$ . Граничні умови в чисельних експериментах прийемо такими:

$$(\mathbf{u}, \mathbf{n})_{\Gamma_2 \cup \Gamma_3} = 0, \quad h(\mathbf{X}, t)_{\Gamma_1} = H_1(\mathbf{X}, t), \quad \mathbf{X} \in \Gamma_1, \quad \left. \frac{\partial h}{\partial x} \right|_{\Gamma_4} = \left. \frac{\partial h}{\partial y} \right|_{\Gamma_5} = 0, \quad t > 0,$$

$$\left. \frac{\partial c}{\partial z} \right|_{\Gamma_1 \cup \Gamma_3} = \left. \frac{\partial c}{\partial y} \right|_{\Gamma_5} = \left. \frac{\partial c}{\partial x} \right|_{\Gamma_4} = 0, \quad c(\mathbf{X}, t)|_{\Gamma_2} = C_1(\mathbf{X}, t), \mathbf{X} \in \Gamma_2, t > 0,$$

$$\left. \frac{\partial T}{\partial z} \right|_{\Gamma_3} = \left. \frac{\partial T}{\partial y} \right|_{\Gamma_5} = \left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_{\Gamma_4} = 0, \quad T(\mathbf{X}, t)|_{\Gamma_1} = T_1(\mathbf{X}, t), \mathbf{X} \in \Gamma_1, T(\mathbf{X})|_{\Gamma_2} = T_2(\mathbf{X}, t), \mathbf{X} \in \Gamma_2, t > 0,$$

В області KLMN ґрунту прикладається зовнішнє навантаження інтенсивністю  $q=20 \cdot 10^4$   $\text{кг/м}^2 \cdot \text{доба}$ . Область KLMN – квадрат зі сторонами, які паралельні до відповідних осей координат при  $x \in [6, 16]$  та  $y \in [6, 16]$ .

Для надлишкових напорів межі ABCD, ADA<sub>1</sub>D<sub>1</sub>, ABA<sub>1</sub>B<sub>1</sub>, CDC<sub>1</sub>D<sub>1</sub>, BCB<sub>1</sub>C<sub>1</sub> є дренажними, а область KLMN та межа A<sub>1</sub>B<sub>1</sub>C<sub>1</sub>D<sub>1</sub> – непроникні. Для концентрації солей межі ABA<sub>1</sub>B<sub>1</sub>, CDC<sub>1</sub>D<sub>1</sub>, A<sub>1</sub>B<sub>1</sub>C<sub>1</sub>D<sub>1</sub>, ADA<sub>1</sub>D<sub>1</sub>, BCB<sub>1</sub>C<sub>1</sub>, ABCD непроникні, а область KLMN є дренажною. Температуру на межі ABCD та області KLMN вважають відомою.

Значення коефіцієнтів і відомих функцій приймають такими:

$$n = 0.4, \quad e = 0.7, \quad \alpha = 0.5, \quad a = 5 \cdot 10^{-7} \text{ м}^2 / \text{H}, \quad \rho_s = 2000 \text{ кг} / \text{м}^3, \quad C_m = 350 \text{ г} / \text{л},$$

$$\lambda_{11} = \lambda_{22} = \lambda_{33} = 108 \text{ кДж} / (\text{м} \cdot ^\circ \text{C} \cdot \text{доба}),$$

$$c_p = 4.2 \text{ кДж} / (\text{кг} \cdot ^\circ \text{C}), \quad T_2(t) = 50^\circ \text{C}, \quad D_{11} = D_{22} = D_{33} = 0.02 \text{ м}^2 / \text{доба},$$

$$D_{T11} = D_{T22} = D_{T33} = 0.002 \text{ м}^2 / \text{доба}, \quad \gamma = 10^4 \text{ кг} / (\text{м}^2 \cdot \text{доба}^2), \quad C_1(t) = C_m,$$

$$\gamma_m = 6.5 \cdot 10^{-4} \text{ доба}^{-1}, \quad K_{c11} = K_{c22} = K_{c33} = 2.8 \cdot 10^{-6} \text{ м}^5 / (\text{кг} \cdot \text{доба}),$$

$$C_0(x) = 8 \text{ г} / \text{л}, \quad c_T = 2137 \text{ кДж} / (\text{м}^3 \cdot ^\circ \text{C}), \quad K_{T11} = K_{T22} = K_{T33} = 2.8 \cdot 10^{-5} \text{ м}^3 / (\text{доба} \cdot ^\circ \text{C}),$$

$$T_1(t) = 17 + 13 \cos\left(\frac{\pi t}{180}\right), \quad N_0(x, y, z) = 240\left(-\left(\frac{x}{l}\right)^2 + \frac{x}{l}\right) + 40,$$

$$C_0(x, y, z) = \begin{cases} C_m, & z = 0, \\ C_0, & z \neq 0; \end{cases} \quad T_0(x, y, z) = \begin{cases} T_2, & z = 0, \\ 4^\circ \text{C}, & z \neq 0. \end{cases}$$

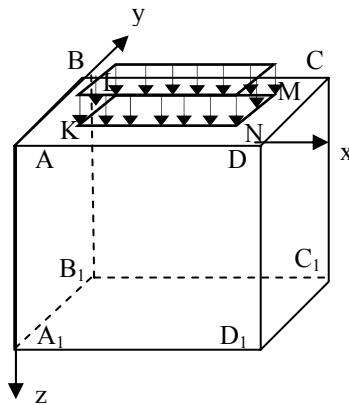


Рис. 2. Фільтраційна консолідація засоленого масиву ґрунту у чисельних експериментах

Значення коефіцієнта фільтрації, який залежить від концентрації солей у твердій та рідкій фазах і температури визначили згідно з формулами [3, 7, 18]

$$K_h(c, N, T) = k_0(c, T) e^{-\gamma_m \frac{N}{C_m}}$$

Коефіцієнт фільтрації чистої води прийняли таким, що дорівнює  $K_h = 0,002 \text{ м/доба}$ . Для апроксимації залежності  $k_0(c, T)$  використовували метод РБФ з експериментальними даними, які використали з монографії [3].

Функцію  $T_1(t)$  визначали з умов сезонних коливань температури, причому  $T_{\max}(t) = 30^\circ \text{C}$ ,  $T_{\min}(t) = 4^\circ \text{C}$ .

Початковий розподіл надлишкових напорів  $h_0(\mathbf{X})$  залежить від властивостей ґрунту, а також від зовнішнього навантаження. Нехай отримали довільний закон розподілу навантаження  $q(x, y)$  в області  $\Phi$  його прикладання, яка лежить у площині  $z = 0$ . Початкове значення надлишкового напору для точки, що лежить в області  $\Phi$  прикладання навантаження, визначаємо за формулою [8]

$$h_0(\mathbf{X}) = \frac{q(x, y)}{\gamma} + h_m,$$

$$\mathbf{X} = (x, y, z) \in \Phi,$$

де  $h_m$  – значення напору в точці  $\mathbf{X} \in \Phi$  до прикладання навантаження.

Для довільної точки  $\mathbf{X} = (x, y, z)$  області консолідації  $\Omega$ , що не належить до області  $\Phi$  прикладання навантаження, значення надлишкових напорів у початковий момент часу визначаємо за формулою [8]

$$h_0(\mathbf{X}) = \frac{\Theta(\mathbf{X})}{3\gamma},$$

де  $\Theta(\mathbf{X})$  – сума головних напружень у точці  $\mathbf{X}$ , яку визначають згідно з формулою [8]

$$\Theta(\mathbf{X}) = \iint_{\Phi} \frac{q(\xi, \eta, 0)}{\pi} (1 - \nu) \frac{z}{r^3} d\xi d\eta, \quad (19)$$

де

$$r = \sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + z^2};$$

$\nu$  – коефіцієнт Пуассона.

У випадку довільної області  $\Phi$  інтеграл в (19) можна обчислити чисельно.

Кількість вузлових точок прийняли такою, що дорівнює 216, а колокаційних – 1728. Крок для дискретизації в часі  $\tau = 30 \text{ діб}$ . Кількість часових проміжків 36. Параметр форми становив 1 для всіх невідомих функцій.

Для наведених даних у площині  $x = 10 \text{ м}$  паралельній до  $YOZ$  при  $t = 270 \text{ діб}$  знайшли значення напору, концентрації солей у твердій і рідкій фазах, температури на кожному часовому проміжку з використанням мультиквадратичної РБФ

$$\varphi(r) = \sqrt{1 + (r\epsilon)^2}$$

і побудовані відповідні графіки (рис. 3-8). Деякі з значень просідань верхньої межі ґрунту наведено в табл. 1 та 2.



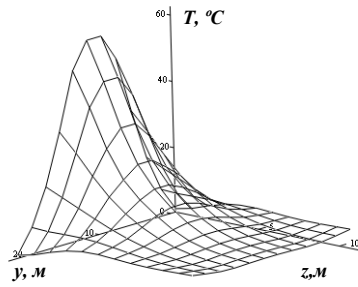


Рис. 3. Розподіл температури

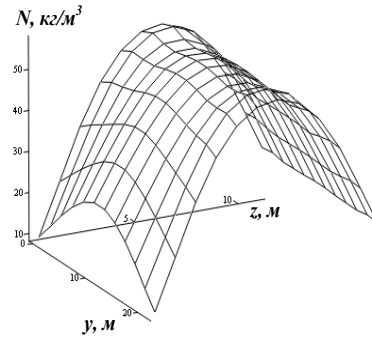


Рис. 4. Концентрація солей у твердій фазі

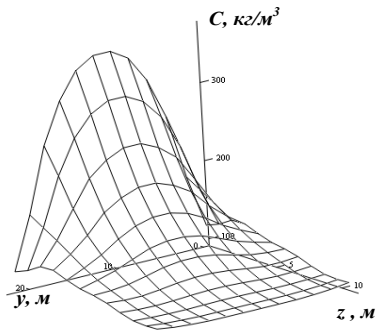


Рис. 5. Концентрація солей у рідкій фазі

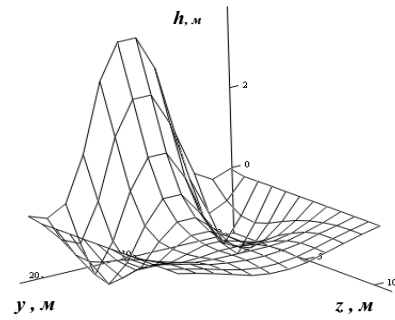


Рис. 6. Розподіл надлишкових напорів

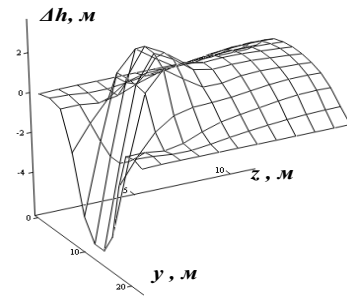


Рис. 7. Різниця розподілів надлишкових напорів у неізотермічних та ізотермічних умовах із врахуванням просідання

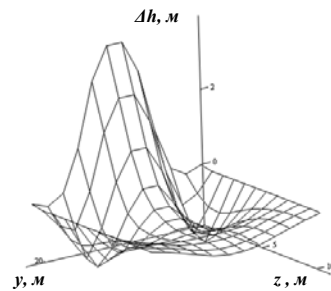


Рис. 8. Різниця розподілів надлишкових напорів засоленого та незасоленого ґрунту при врахуванні просідання

Таблиця 1

Величина просідань верхньої межі ґрунту

Координати	x	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10
	y	0	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22
Просідання, см		22,8	25,3	27,8	30,8	33,4	35,4	35,4	33,4	30,8	27,8	25,3	22,8

Таблиця 2

Максимальна величина просідань верхньої межі ґрунту

Параметри	Величина просідань ґрунту			
	$K_h = K_h(c, N, T)$			$K_h = const$
	загальна	за рахунок зміни напорів	за рахунок хімічної суфозії	
$\varepsilon = 1$	35,4 см	16,5 см	18,9 см	36,3 см
$\varepsilon = 0$	20,4 см	20,4 см	–	20,4 см
Ізотермічний режим	36,2 см	17,8 см	18,4 см	36,4 см

Концентрація солей у рідкій фазі з часом збільшується, а в твердій зменшується (рис. 4, 5). В області поза прикладеним навантаженням ґрунт переходить у переущільнений стан (напори стають меншими від нуля) (рис. 6). Це пояснюється урахуванням явища хімічного та термічного осмосу. Просідання досягає максимального значення в області прикладання навантаження і поступово зменшується зі збільшенням відстані від цієї області. Також просідання є симетричним (див. табл. 1).

Порівнюючи розподіл надлишкових напорів при врахуванні таких чинників, як просідання та засоленість ґрунту, бачимо, що напори розсіюються повільніше у випадку засоленого ґрунту в ділянці прикладання навантаження (рис. 8). А в області, де немає навантаження, навпаки - швидше. Це пояснюється залежністю  $K_h(c, N, T)$ . Концентрація солей у рідкій фазі  $c(x, y, z, t)$  стає більшою за 60 г/л і коефіцієнт фільтрації різко зменшується.

Надлишкові напори розсіюються швидше при врахуванні неізотермічних умов лише в околі верхньої межі (рис. 7) та загальні просідання ґрунту є меншими, ніж при ізотермічних умовах (див., наприклад, експерименти 1 та 3, де величини просідань становлять 35,4 та 36,2 см, відповідно). Це пояснюється тим, що верхня межа непроникна, а температура ґрунту на ній найбільша. Це призводить до значного зростання тиску в поровій рідині в околі цієї межі.

Величина просідань збільшується при врахуванні фактора засоленості ґрунту, як при  $K_h = K_h(c, N, T)$  (див., наприклад, табл. 2 експерименти 1 та 2, де величини просідань становлять 35,4 та 20,4 см, відповідно), так і при  $K_h = const$  (див. ті самі експерименти, де величини просідань становлять 36,3 см та 20,4 см, відповідно). Як видно з експерименту 1 (див. табл. 2), просідання за рахунок хімічної суфозії (53,4 % від загальної величини просідання) більше, ніж просідання за рахунок зміни надлишкових напорів (46,6 % від загальної величини просідання). Отже, просідання за рахунок впливу хімічних чинників на засоленіх ґрунтах є значним і нехтувати ним не можна.

## 5. ВИСНОВКИ

Ми сформулювали математичну модель просторової задачі фільтраційної консолідації засоленого ґрунту. Врахували можливість хімічної суфозії. Під час проведення і аналізу чисельних експериментів виявили суттєвий вплив хімічної суфозії на процес просідання засоленого ґрунту та на розподіл надлишкових напорів. У випадку просторової задачі просідання за рахунок хімічної суфозії виявляється більшим за просідання при розсіюванні надлишкових напорів. Отже, нехтувати такими величинами просідань не можна задля уникнення критичних ситуацій при експлуатації цивільних і промислових об'єктів на засоленних ґрунтах.

Зауважимо, що невирішеним залишається питання точності отриманих наближених розв'язків. Це може становити предмет наступних досліджень авторів у цьому напрямі.

## СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. *Веригин Н.Н.* О кинематике растворения солей при фильтрации воды в грунтах / Н.Н. Веригин // Растворение и выщелачивание горных пород. – М.: Госстройиздат, 1957. – С. 84–113.
2. *Власова Е.А.* Приближенные методы математической физики / Е.А. Власова, В.С. Зарубин, Г.Н. Кувырски. – М.: МГТУ им. Н.Э.Баумана, 2001. – 700 с.
3. *Власюк А.П.* Математичне моделювання консолідації ґрунтів при фільтрації сольових розчинів в неізотермічних умовах / А.П. Власюк, П.М. Мартинюк. – Рівне: Вид-во НУВГП, 2008. – 416 с.
4. *Власюк А.П.* Фильтрационная консолидация трехфазных грунтов с учетом ползучести скелета и влияния солепереноса в неизо термическом режиме / А.П. Власюк, П.Н. Мартинюк // Математическое моделирование. – 2010. – Т. 22, № 4. – С. 32–56.
5. *Власюк А.П.* Чисельне розв'язання задач консолідації та фільтраційного руйнування ґрунтів в умовах тепломасопереносу методом радіальних базисних функцій / А.П. Власюк, П.М. Мартинюк. – Рівне: Вид-во НУВГП, 2010. – 277 с.
6. *Власюк А.П.* Числове розв'язання одновимірної задачі фільтраційної консолідації засоленних ґрунтів в неізотермічному режимі / А.П. Власюк, П.М. Мартинюк, О.Р. Фурсович // Матем. методи та фіз.-мех. поля. – 2008. – 51, № 1. – С. 197–204.
7. *Добронравов О.О.* Моделювання фільтрації ґрунтових вод з урахуванням суфозії і кольматації / О.О. Добронравов, В.С. Кремез // Проблеми водопостачання, водовідведення та гідраліки. – 2006. – Вип. 7. – С. 141–146.
8. *Иванов П.Л.* Грунты и основания гидротехнических сооружений. Механика грунтов / П.Л. Иванов. – М.: Высшая школа, 1991. – 447 с.
9. *Исаев В.И.* Развитие метода коллокаций и наименьших квадратов / В.И. Исаев, В.П. Шапеев // Труды ин-та математики и механики. – 2008. – Т. 41, № 1. – С. 41–60.
10. *Молчанов И.Н.* Машинные методы решения прикладных задач. Алгебра, приближение функций / И.Н. Молчанов. – Киев: Наук. думка, 1987. – 288 с.
11. *Мустафаев А.А.* Расчёт суффозионной осадки сооружений на засоленных грунтах с использованием центробежного моделирования / А.А. Мустафаев // Основания, фундаменты и механика грунтов. – 1984. – № 3. – С. 26–29.
12. Словарь по гидрогеологии и инженерной геологии. Изд. 2, испр. и доп. / Под ред. А.А. Маккавеева, О.К. Ланге. – М.: Недра, 1971. – 216 с.

13. *Петрухин В.П.* Строительство сооружений на засоленных грунтах / В.П. Петрухин. – М.: Стройиздат, 1989. – 264 с.
14. *Петрухин В.П.* Строительные свойства засоленных и загипсованных грунтов / В.П. Петрухин. – М.: Стройиздат, 1980. – 120 с.
15. *Петрухин В.П.* Расчёт суффозионных деформаций оснований в засоленных грунтах / В.П. Петрухин // Основания, фундаменты и механика грунтов. – 1995. - № 5. – С. 11–13.
16. Руководство по проектированию оснований зданий и сооружений / Е.А. Сорочан, В.В. Михеева, М.Г. Ефремова, А.В. Воронский. – М.: Стройиздат, 1978. – 597 с.
17. *Самарский А.А.* Численные методы математической физики / А.А. Самарский, А.В. Гулин. – М.: Научный мир, 2003. – 316 с.
18. *Тугай А.М.* Визначення динаміки зміни рівнів води свердловин при їх кольматації сполуками заліза / А.М. Тугай // Вісник Рівненського державного технічного ун-ту. – 2002. – № 1 (14). – С. 107–115.
19. *Ухов С.Б.* Механика грунтов, основания и фундаменты / С.Б. Ухов. – М.: АСВ, 1994. – 525 с.
20. *Флорин В.А.* Основы механики грунтов. Т. 2 / В.А. Флорин. – М.: Госстройиздат, 1961. – 560 с.
21. *Хоменко В.П.* Закономерности и прогноз суффозионных процессов / В.П. Хоменко. – М.: ГЕОС, 2003. – 216 с.
22. *Buhmann M.D.* Radial Basis functions: Theory and implementations / M.D. Buhmann. – Cambridge: University Press, 2003. – 272 с.
23. *Khomenko V.P.* Suffosion hazard: Today's and tomorrow's problem for cities / V.P. Khomenko // Engineering geology special publication. – 2009. – Vol. 22. – Pp. 113–123.
24. *Zhang X.* Least – squares collocation meshless method / X. Zhang, X.-H. Liu, K.-Z. Song, M.-W. Lu // Int. J. Numer. Methods Engin. – 2001. – Vol. 51. – Pp. 1089–1100.
25. *Liu G.R.* Mesh Free Methods: Moving beyond the Finite Element Method / G.R. Liu. – Boca Raton: CRC Press, 2009. – 872 p.
26. *Liu X.* Radial point collocation methods for solving convection – diffusion problems / X. Liu // J. Zhejiang Univ. SCIENCE A. – 2006. – Vol. 7 (6). – Pp. 1862–1875.

*Стаття: надійшла до редколегії 24.10.2012*

*доопрацьована 28.11.2012*

*прийнята до друку 05.12.2012*

**МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ВЛИЯНИЯ ХИМИЧЕСКОЙ  
СУФФОЗИИ И НЕИЗОТЕРМИЧЕСКИХ УСЛОВИЙ НА  
ФИЛЬТРАЦИОННУЮ КОНСОЛИДАЦИЮ ЗАСОЛЕННЫХ  
ГРУНТОВ В ТРЕХМЕРНОМ СЛУЧАЕ**

**О. Мичута, А. Власюк, П. Мартынюк**

*Национальный университет водного хозяйства и природопользования,  
ул. Соборная 11, Ровно, 33028, e-mail: [michuta@ukr.net](mailto:michuta@ukr.net)*

Усовершенствована математическая модель консолидации грунтов с учетом их засоленности и неизотермических условий. Предложено кинематическое граничное условие на верхней подвижной границе массива засоленного грунта с учетом химической суффозии. Численное решение соответствующей трехмерной краевой задачи найдено безсеточным методом радиальных базисных функций. Проведен ряд численных экспериментов.

Исследовано влияние химической суффозии на распределение избыточных напоров в засоленном массиве грунта и на проседание верхней границы грунта в неизотермических условиях.

*Ключевые слова:* химическая суффозия, консолидация, неизотермические условия, безсеточный метод.

**MATHEMATICAL MODELING OF INFLUENCE OF CHEMICAL EROSION AND  
NON-ISOTHERMAL CONDITIONS ON THE FILTRATION CONSOLIDATION  
OF SALINE SOILS IN THREE-DIMENSIONAL CASE**

**O. Michuta, A. Vlasyuk, P. Martyniuk**

*National university of water management and natural resources,  
Soborna Str., 11, Rivne, 33028, e-mail: [michuta@ukr.net](mailto:michuta@ukr.net)*

Mathematical model of consolidation of soil has been improved taking into account their salinity and unisothermal conditions. Kinematic boundary condition for moving beyond the top of the array of saline soils including chemical erosion has been proposed. Numerical solution of the corresponding three-dimensional boundary value problem has been found by the radial basis functions method. The influence of chemical erosion and unisothermal conditions on the excess heads in salted array of ground and upper ground subsidence has been investigated.

*Key words:* chemical erosion, consolidation, non-isothermal conditions, mesh free method.