ISSN 2078–5097. Вісн. Львів. ун-ту. Сер. прикл. матем. та інф. 2013. Вип. 19. С. 56–67
Visnyk of the Lviv University. Series Appl. Math. and Informatics. Issue 19. P. 56–67

УДК 517.95; 519.63

МОДИФІКОВАНИЙ МЕТОД ЛІ-АЛГЕБРИЧНИХ АПРОКСИМАЦІЙ ДЛЯ ЕЛІПТИЧНИХ РІВНЯНЬ З НЕОДНОРІДНИМИ КРАЙОВИМИ УМОВАМИ

Аркадій Кіндибалюк, М. Притула

Львівський національний університет імені Івана Франка,
вул. Університетська, 1, Львів, 79000, e-mail: mykola.prytula@gmail.com

Запропоновано модифікацію методу Лі-алгебричних апроксимацій для розв'язування одновимірних крайових задач для еліптичних диференціальних рівнянь з неоднорідними крайовими умовами типу Діріхле. Розглянуто схему побудови відповідного скінченно-вимірного зображення диференціального оператора. Отримано систему лінійних алгебричних рівнянь для безпосереднього розв'язання крайової задачі з неоднорідними крайовими умовами. Проведено чисельні дослідження на прикладі модельних задач.

Ключові слова: Лі-алгебричні дискретні апроксимації, неоднорідні крайові умови, метод найменших квадратів, еліптичні рівняння, поліноми Лагранжа.

1. ВСТУП

Метод Лі-алгебричних апроксимацій вперше використав Калоджеро у 1983 р. для розв'язування задач на власні значення диференціальних операторів [11].

У 1988 р. метод Лі-алгебричних апроксимацій перенесли для розв'язування звичайних диференціальних рівнянь і диференціальних рівнянь у частинних похідних [5, 6, 14]. У працях Митропольського Ю.А., Прикарпатського А.К., Самойленка В.Гр. [5] та в праці Самойленка В.Гр. [6] вперше використали назву методу "Лі-алгебрична дискретна апроксимація" [1]. За допомогою методу Лі-алгебричної дискретної апроксимації виконано редукцію одновимірної та двовимірної задачі теплопровідності та рівняння Кортевега – де Фріза до задачі Коші для системи звичайних диференціальних рівнянь. Врахування однорідних крайових умов проведено за рахунок відповідної заміни змінних, випадок неоднорідних крайових умов не розглядали.

У [2, 10, 12, 13] проводили дослідження нелінійних динамічних систем вигляду

$$\begin{cases} u_t = K(t;\, x,\, \partial)u + f(t;\, x),\ x \in \Omega \subset R^d \\ u\big|_{t=0} = \varphi, \qquad\qquad \varphi \in B, \end{cases}$$

шляхом редукції таких систем до задачі Коші для системи звичайних диференціальних рівнянь вигляду

$$\begin{cases} \dfrac{du_{(n)}}{dt} = K_{(n)}(t)u_{(n)} + f_{(n)}(t), \\ u_{(n)}\big|_{t=0} = \varphi_{(n)}, \qquad \varphi_{(n)} \in B, \end{cases}$$

де B – Банаховий простір, $B_{(n)}$ – скінченно-вимірне зображення Банахового простору.

У 2004 р. в [1] проаналізували отримані результати методу Лі-алгебричних апроксимацій та визначили основні напрями подальших досліджень. Серед них виявили доцільність проведення числових тестів та потребу модифікації методу Лі-алгебричних апроксимацій для безпосереднього застосування до початково-крайових задач з крайовими умовами типу Діріхле та Неймана.

У [2, 7] провели модифікацію методу Лі-алгебричних апроксимацій для безпосереднього застосування до початково-крайових задач з умовами типу Діріхле та Неймана, що враховує лише однорідні крайові умови.

У [6] розв'язування крайових задач для еліптичних рівнянь з неоднорідними умовами полягало в переході до відповідної крайової задачі з однорідними крайовими умовами шляхом заміни змінних.

2. ФОРМУЛЮВАННЯ ЗАДАЧІ

Предмет дослідження – неоднорідна крайова задача

$$\begin{cases} \text{знайти функцію } u = u(x) \text{ таку, що:} \\ A(u(x)) = f(x) \text{ в } \Omega = (0, 1) \\ u(0) = g_1, \;\; u(1) = g_2, \end{cases} \tag{2.1}$$

де A – еліптичний оператор; числа g_1, g_2 – довільні дійсні числа, які можуть набувати і нульових значень; функція $f(x)$ – характеризує інтенсивність джерел різноманітної природи.

3. СХЕМА ЛІ-АЛГЕБРИЧНИХ АПРОКСИМАЦІЙ

Для розв'язування крайової задачі з неоднорідними крайовими умовами та подальшого дослідження схеми з використанням засобів пакетів символьного обчислення приймемо, що x_1 – ліва межа відрізка $\Omega := [0,1]$ та x_n – права межа відрізка Ω.

Кожну неперервну функцію $u(x)$, визначену на області $\Omega := [0,1]$, можна наблизити поліномом Лагранжа. Для цього зафіксуємо деяке натуральне число $n \in N$ та введемо на Ω сітку вузлів $\{x_i = (i-1)h\}_{i=1}^{n}$, де h – параметр дискретизації, причому

$$h = \frac{1}{n-1}.$$

Нехай відомі значення функції $u(x)$ в точках $\{x_i\}_{i=1}^{n}$, тобто задано множину значень функції $\{u_i = u(x_i)\}_{i=1}^{n}$. Тоді поліном Лагранжа для функції $u(x)$ можна записати у вигляді

$$L[u](x) = \sum_{i=1}^{n} u_i l_i(x),$$

де відповідні базисні компоненти $\{l_i(x)\}_{i=1}^{n}$, а саме поліноми Лагранжа, що асоційовані з вузлами x_i, визначають за формулою

$$l_i(x) = \frac{\prod_{k=1, i\neq k}^{n} (x - x_k)}{\prod_{k=1, i\neq k}^{n} (x_i - x_k)}.$$

Нехай еліптичний оператор $A : B \to B$, що діє на функції у просторі Банаха, належить до огортуючої алгебри Гейзенберга-Вейля диференціальних операторів алгебри Лі $\left\{1, x, \frac{d}{dx}\right\}$. Тоді диференціальний оператор можна трактувати як формальний поліном елементів $\left\{1, x, \frac{d}{dx}\right\}$.

Значення оператора A для функції f позначимо $A[f]$. Нехай розбиття області Ω задається набором вузлів $\sigma = \{x_i\}_{i=1}^n$, тоді вектор значень функції $u = u(x)$ в точках розбиття σ має вигляд $u_\sigma = (u(x_1), u(x_2), ..., u(x_n))^{\mathrm{T}}$. Для оператора $A : B \to B$, скінченно-вимірне зображення оператора A_σ можна побудувати з умови

$$A_\sigma u_\sigma = A[L[u]]_\sigma .$$

Оскільки оператор A задачі (2.1) може бути формальним поліномом елементів алгебри Лі, тому скінченно-вимірне зображення оператора A_σ є лінійною комбінацією або суперпозицією скінченно-вимірних представлень елементів алгебри Лі $\left\{1, x, \frac{d}{dx}\right\}$. З огляду на це необхідно побудувати скінченно-вимірні зображення елементів алгебри Лі $\left\{1, x, \frac{d}{dx}\right\}$.

Введемо допоміжну матрицю $L_\sigma(x)$ такого вигляду: $L_\sigma(x) = (l_1(x), l_2(x), ..., l_n(x))$, де $x \in R^n$, а $l_i(x)$ – поліном Лагранжа асоційований з вузлом x_i.

Для побудови скінченно-вимірного зображення одиничного оператора підставимо в матрицю $L_\sigma(x)$ розбиття σ області Ω. Врахувавши властивості поліномів Лагранжа $\{l_i(x)\}_{i=1}^n$, тобто виконання умови Кронеккера, отримаємо одиничну матрицю, тобто $I_\sigma = Z_\sigma^0 = L_\sigma(x_\sigma)$.

Надалі позначатимемо скінченно-вимірні зображення з додатковим індексом σ, оскільки таке скінченно-вимірне зображення пов'язане саме з деяким конкретним розбиттям σ області Ω.

Похідну полінома Лагранжа $l_i'(x)$ можна обчислити за формулою:

$$l_i'(x) = \sum_{\substack{k=1,\\ k\neq i}}^{n} \left(\prod_{\substack{m=1,\\ m\neq k, m\neq i}}^{n} (x - x_m) \Bigg/ \prod_{\substack{m=1,\\ m\neq k, m\neq i}}^{n} (x_i - x_m) \right).$$

Тоді скінченно-вимірне зображення оператора $\frac{d}{dx}$ можна побудувати шляхом дії цього оператора на матрицю $L_\sigma(x)$ і підстановці значень вузлів розбиття σ у відповідні стовпці матриці, тобто скінченно-вимірне зображення оператора $\frac{d}{dx}$ набуде вигляду

$$Z_\sigma^1 = \left.\frac{dL_\sigma(x)}{dx}\right|_\sigma = \begin{pmatrix} l_1'(x_1) & \dots & l_1'(x_n) \\ \dots & \dots & \dots \\ l_n'(x_1) & \dots & l_n'(x_n) \end{pmatrix}.$$

Скінченно-вимірне зображення X_σ оператора x отримано множенням одиничної матриці на вектор розбиття σ області Ω .

Зазначимо, що так побудовані скінченно-вимірні зображення $\{I_\sigma, X_\sigma, Z_\sigma^1\}$ не є Лі-алгебричними зображеннями алгебри Лі $\left\{1, x, \frac{d}{dx}\right\}$, оскільки $[Z_\sigma^1, X_\sigma] \neq I_\sigma$, тоді як $\left[\frac{d}{dx}, x\right] = 1$, де дужка $[.,.]$ позначає комутатор Лі $[a,b] = a \cdot b - b \cdot a$.

4. СХЕМА РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧІ З НЕОДНОРІДНИМИ КРАЙОВИМИ УМОВАМИ

Розглянемо задачу (2.1). Нехай відомі скінченно-вимірне зображення A_σ оператора задачі (2.1) та скінченно-вимірне зображення $f_\sigma = \{f(x_i)\}_{i=1}^n$ функції розподілених джерел $f(x)$; тоді, врахувавши крайові умови Діріхле, скінченно-вимірне формулювання крайової задачі (2.1) набуло вигляду

$$\begin{cases} \text{\textit{знайти вектор}}\ u_\sigma = (u_1, u_2, \dots, u_n)^{\mathrm{T}}\ \text{\textit{такий, що}} \\ A_\sigma u_\sigma = f_\sigma, \\ u_1 = g_1,\ u_n = g_2, \end{cases} \tag{4.1}$$

Особливістю скінченно-вимірної крайової задачі (4.1) є той факт, що значення компонент u_1 та u_n вектора u_σ відомі, оскільки вони задані у крайовій умові.

Теорема про вигляд системи лінійних алгебричних рівнянь для відшукання розв'язку крайової задачі з неоднорідними крайовими умовами.

Скінченно-вимірна крайова задача (4.1) еквівалентна такій задачі:

$$\begin{cases} \text{\textit{знайти вектор}}\ \tilde{u}_\sigma = (u_2, \dots, u_{n-1})^{\mathrm{T}}\ \text{\textit{такий, що}}: \\ \tilde{A}_\sigma \tilde{u}_\sigma = \tilde{f}_\sigma, \end{cases} \tag{4.2}$$

де компоненти матриці $\tilde{A}$, з розмірністю $(n-2)\times(n-2)$, набули вигляду

$$\tilde{a}_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{k,i+1} a_{k,j+1},\ i = \overline{1, n-2},\ j = \overline{1, n-2},$$

а компоненти вектора $\tilde{f}_\sigma$ обчислюють за формулою

$$\tilde{f}_i = \sum_{k=1}^n \left[a_{k,i+1}\left(f_k - a_{k1} g_1 - a_{kn} g_2\right)\right],\ i = \overline{1, n-2}.$$

Доведення. Підставивши замість u_1 умову g_1 на лівому кінці відрізка і замість u_n умову g_2 на правому кінці відрізка, запишемо рівняння задачі (4.1) у розгорнутому вигляді

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1,n-1} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & \dots & a_{n-1,n-1} & a_{n-1,n} \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g_1 \\ u_2 \\ \dots \\ u_{n-1} \\ g_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \dots \\ f_{n-1} \\ f_n \end{pmatrix}. \tag{4.3}$$

Оскільки значення g_1, g_2 відомі, то їх перенесемо у праву частину й отримаємо систему лінійних алгебричних рівнянь

$$\begin{pmatrix} a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1,n-2} & a_{1,n-1} \\ a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2,n-2} & a_{2,n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n-1,2} & a_{n-1,2} & \dots & a_{n-1,n-2} & a_{n-1,n-1} \\ a_{n2} & a_{n2} & \dots & a_{n,n-2} & a_{n,n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_2 \\ u_3 \\ \dots \\ u_{n-2} \\ u_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1 - a_{11}g_1 - a_{1n}g_2 \\ f_2 - a_{21}g_1 - a_{2n}g_2 \\ \dots \\ f_{n-1} - a_{n-1,1}g_1 - a_{n-1,n}g_2 \\ f_n - a_{n1}g_1 - a_{nn}g_2 \end{pmatrix}. \tag{4.4}$$

Система (4.4) має n рівнянь та $n-2$ невідомих. Згідно з теоремою про ранг скінченно-вимірного зображення диференціальних операторів [6] ранг скінченно-вимірного зображення A_σ оператора задачі A дорівнює $n-2$. Це означає, що система (4.4) має єдиний розв'язок.

Нехай компонента модифікованого вектора $\bar{f}_i$ правої частини системи (4.4) має вигляд $\bar{f}_i = f_i - a_{i1}g_1 - a_{in}g_2$. Для знаходження розв'язку задачі (4.4) застосуємо метод найменших квадратів. Для цього формулюємо допоміжну оптимізаційну задачу

$$\begin{cases} \textit{знайти вектор } u_\sigma = (u_2, u_3, \dots, u_{n-1}) \textit{ такий, що} \\ E(u_\sigma) = \sum_{k=1}^{n} \left(\left(\sum_{j=2}^{n-1} a_{kj} u_j \right) - \bar{f}_k \right)^2 \to \min. \end{cases} \tag{4.5}$$

Оскільки $E(u_\sigma)$ – додатно-визначена квадратична форма, то розв'язок системи рівнянь $\left\{ \frac{\partial E(u_\sigma)}{\partial u_{\sigma,k}} \right\}_{m=2}^{n-2}$ є розв'язком задачі (4.5). Запишемо рівняння $\frac{\partial E(u_\sigma)}{\partial u_{\sigma,k}} = 0$ у розгорнутому вигляді. Врахувавши співвідношення

$$\frac{\partial E(u_\sigma)}{\partial u_{\sigma,m}} = \frac{\partial}{\partial u_{\sigma,m}} \left(\sum_{k=1}^{n} \left(\left(\sum_{j=2}^{n-1} a_{kj} u_j \right) - f_k \right)^2 \right) = 2 \sum_{k=1}^{n} a_{km} \left(\sum_{j=2}^{n-1} a_{kj} u_j - \bar{f}_k \right),$$

отримуємо систему лінійних алгебричних рівнянь для визначення невідомих компонент вектора $\bar{u}_\sigma$ вигляду

$$\sum_{k=1}^{n} a_{km} \sum_{j=2}^{n-1} a_{kj} \bar{u}_j = \sum_{k=1}^{n} a_{km} \bar{f}_k, \quad m = \overline{2, n-1}. \tag{4.6}$$

З рівнянь (4.6) знаходимо, що

$$\tilde{a}_{mj} = \sum_{k=1}^{n} a_{km} a_{kj}, \; m = \overline{2, \; n-1}.$$

Оскільки $m = \overline{2, n-1}$ та $j = \overline{2, n-1}$, а матриця $\widetilde{A}$ має розмірність $(n-2)\times(n-2)$, а $i = \overline{1,\ n-2}$ та $j = \overline{1,\ n-2}$, то компоненти матриці $\widetilde{A}_\sigma$ запишемо у вигляді

$$\widetilde{a}_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{k,i+1} a_{k,j+1}, \quad i = \overline{1,\ n-2},\ j = \overline{1,\ n-2}\,,$$

а вектор правої частини $\widetilde{f}_\sigma$ має вигляд

$$\widetilde{f}_i = \sum_{k=1}^{n} a_{k,i+1} \bar{f}_k = \sum_{k=1}^{n} a_{k,i+1}\left(f_k - a_{k1}g_1 - a_{kn}g_2\right).$$

Теорему доведено.

5. АНАЛІЗ РЕЗУЛЬТАТІВ

Розглянемо вище описану схему розв'язування крайової задачі (2.1) до задач з рівнянням Пуассона, рівнянням стаціонарної реакції-дифузії та адвекції-дифузії. Отримані наближені розв'язки порівняємо з точними розв'язками відповідних крайових задач.

Приклад 1. Крайова задача для рівняння Пуассона зі сталою правою частиною.

Розглянемо одновимірну крайову задачу для рівняння Пуассона з неоднорідними крайовими умовами вигляду

$$\begin{cases} \textit{знайти функцію } u = u(x) \textit{ таку, що}: \\ Au := -\dfrac{d^2u}{dx^2} = 4, \\ u(0) = u(1) = g, \end{cases} \tag{5.1}$$

де $g-$ деяка константа.

Точний розв'язок задачі (5.1) має вигляд $u(x) = g + \frac{1}{2}\left(x - x^2\right)$. Задачу (5.1) розв'язуємо методом Лі-алгебричних апроксимацій з використанням теореми про вигляд системи лінійних алгебричних рівнянь для відшукання розв'язку крайової задачі з неоднорідними крайовими умовами. Наближений розв'язок шукатимемо з кроками дискретизації $h = \left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}\right\}$. Розв'язки, отримані на різних кроках дискретизації, порівнюємо з точним розв'язком та обчислюємо похибки в функціональних просторах $L^\infty(\Omega_\sigma),\ L^1(\Omega),\ L^2(\Omega),\ H^1(\Omega)$, де норму в просторі сіткових функцій $L^\infty(\Omega_\sigma)$ визначено за формулою

$$\|u\|_{L^\infty(\Omega_\sigma)} = \max_{x_i \in \sigma} |u(x_i)|\,,$$

а норму в просторі $H^1(\Omega)$ визначено за формулою

$$\|u\|_{H^1(\Omega)} := \sqrt{\int_\Omega \left(\frac{du}{dx}\right)^2 dx}\ .$$

Результати обчислень подано в табл. 1 та 2.

Таблиця 1

Похибки апроксимацій у функціональних просторах
$L^\infty(\Omega_\sigma)$, $L^1(\Omega)$, $L^2(\Omega)$, $H^1(\Omega)$ при значенні крайової умови $g = 1$

Крок дискретизації h	$\|u-u_\sigma\|_{L^\infty(\Omega_\sigma)}$	$\|u-u_\sigma\|_{L^1(\Omega)}$	$\|u-u_\sigma\|_{L^2(\Omega)}$	$\|u-u_\sigma\|_{H^1(\Omega)}$
$h=\frac{1}{2}$	0	0	8.04082×10^{-17}	1.13079×10^{-16}
$h=\frac{1}{4}$	1.55431×10^{-15}	8.68441×10^{-16}	9.82174×10^{-16}	4.45506×10^{-15}
$h=\frac{1}{8}$	5.55112×10^{-15}	2.40192×10^{-15}	2.88487×10^{-15}	3.74372×10^{-14}
$h=\frac{1}{16}$	7.49623×10^{-13}	3.39262×10^{-13}	4.15612×10^{-13}	4.61083×10^{-12}

Таблиця 2

Похибки апроксимацій у функціональних просторах
$L^\infty(\Omega_\sigma)$, $L^1(\Omega)$, $L^2(\Omega)$, $H^1(\Omega)$ при значенні крайової умови $g = 0$

Крок дискретизації h	$\|u-u_\sigma\|_{L^\infty(\Omega_\sigma)}$	$\|u-u_\sigma\|_{L^1(\Omega)}$	$\|u-u_\sigma\|_{L^2(\Omega)}$	$\|u-u_\sigma\|_{H^1(\Omega)}$
$h=\frac{1}{2}$	1.38778×10^{-17}	0.	1.35292×10^{-17}	3.91481×10^{-17}
$h=\frac{1}{4}$	8.32667×10^{-17}	3.38849×10^{-17}	4.81443×10^{-17}	3.52931×10^{-16}
$h=\frac{1}{8}$	6.66134×10^{-16}	3.43223×10^{-16}	4.3068×10^{-16}	2.61749×10^{-15}
$h=\frac{1}{16}$	7.46729×10^{-14}	3.70266×10^{-14}	4.33242×10^{-14}	3.89807×10^{-13}

Приклад 2. Крайова задача для неоднорідного рівняння Пуассона.

Розглянемо одновимірну крайову задачу для рівняння Пуассона з неоднорідними крайовими умовами вигляду

$$\begin{cases} \textit{знайти функцію } u = u(x) \textit{ таку, що}: \\ Au := -\dfrac{d^2u}{dx^2} = x^2, \\ u(0) = 0,\ u(1) = 1. \end{cases} \tag{5.3}$$

Точний розв'язок задачі (5.3) має вигляд

$$u(x) = \frac{1}{12}\left(13x - x^4\right).$$

Задачу (5.3) розв'язуємо методом Лі-алгебричних апроксимацій з використанням теореми про вигляд системи лінійних алгебричних рівнянь для відшукання розв'язку крайової задачі з неоднорідними крайовими умовами. Наближений розв'язок шукатимемо з кроками дискретизації

$$h = \left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}\right\}.$$

Розв'язки, отримані на різних кроках дискретизації, порівнюємо з точним розв'язком та обчислюємо похибки в функціональних просторах $L^\infty(\Omega_\sigma),\ L^1(\Omega),\ L^2(\Omega),\ H^1(\Omega)$. Результати обчислень подано у табл. 3.

Таблиця 3

Похибки апроксимацій у функціональних просторах
$L^\infty(\Omega_\sigma),\ L^1(\Omega),\ L^2(\Omega),\ H^1(\Omega)$ для задачі (5.3)

Крок дискретизації h	$\|u-u_\sigma\|_{L^\infty(\Omega_\sigma)}$	$\|u-u_\sigma\|_{L^1(\Omega)}$	$\|u-u_\sigma\|_{L^2(\Omega)}$	$\|u-u_\sigma\|_{H^1(\Omega)}$
$h=\frac{1}{2}$	0.015625	0.0101072	0.0123112	0.0506244
$h=\frac{1}{4}$	7.21645×10^{-16}	2.71388×10^{-16}	3.12659×10^{-16}	2.25959×10^{-15}
$h=\frac{1}{8}$	2.94209×10^{-15}	1.34423×10^{-15}	1.61036×10^{-15}	2.20543×10^{-14}
$h=\frac{1}{16}$	4.55566×10^{-13}	2.36417×10^{-13}	2.70955×10^{-13}	2.50795×10^{-12}

Приклад 3. Крайова задача для рівняння дифузії-реакції.

Розглянемо одновимірну крайову задачу для рівняння дифузії-реакції з неоднорідними крайовими умовами вигляду

$$\begin{cases} \textit{знайти функцію } u = u(x) \textit{ таку, що}: \\ Au := -\dfrac{d^2u}{dx^2} + 100u = 101, \\ u(0) = 1,\ u(1) = 1. \end{cases} \tag{5.4}$$

Точний розв'язок задачі (5.4) має вигляд

$$u(x) = \frac{e^{-10x}\left(e^{10} - 101e^{10x} + e^{20x} - 101e^{10+10x}\right)}{100\left(1+e^{10}\right)}.$$

Задачу (5.4) розв'язуємо методом Лі-алгебричних апроксимацій з використанням теореми про вигляд системи лінійних алгебричних рівнянь для відшукання розв'язку крайової задачі з неоднорідними крайовими умовами. Наближений розв'язок шукатимемо з кроками дискретизації $h = \left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}\right\}$. Розв'язки, отримані на різних кроках дискретизації, порівнюємо з точним розв'язком та обчислюємо похибки в функціональних просторах $L^\infty(\Omega_\sigma),\ L^1(\Omega),\ L^2(\Omega),\ H^1(\Omega)$. Результати обчислень наведені у табл. 4.

Таблиця 4

Похибки апроксимацій у функціональних просторах
$L^{\infty}(\Omega_\sigma)$, $L^1(\Omega)$, $L^2(\Omega)$, $H^1(\Omega)$ задачі (5.4)

Крок дискретизації h	$\left\|u-u_\sigma\right\|_{L^{\infty}(\Omega_\sigma)}$	$\left\|u-u_\sigma\right\|_{L^1(\Omega)}$	$\left\|u-u_\sigma\right\|_{L^2(\Omega)}$	$\left\|u-u_\sigma\right\|_{H^1(\Omega)}$
$h=1/2$	0.0650357	0.122735	0.14963	1.55795
$h=1/4$	0.134257	0.0977309	0.10922	1.03662
$h=1/8$	0.0015066	0.00047787	0.000413273	0.00823432
$h=1/16$	4.85405×10^{-9}	1.47222×10^{-9}	2.31689×10^{-9}	6.31986×10^{-8}

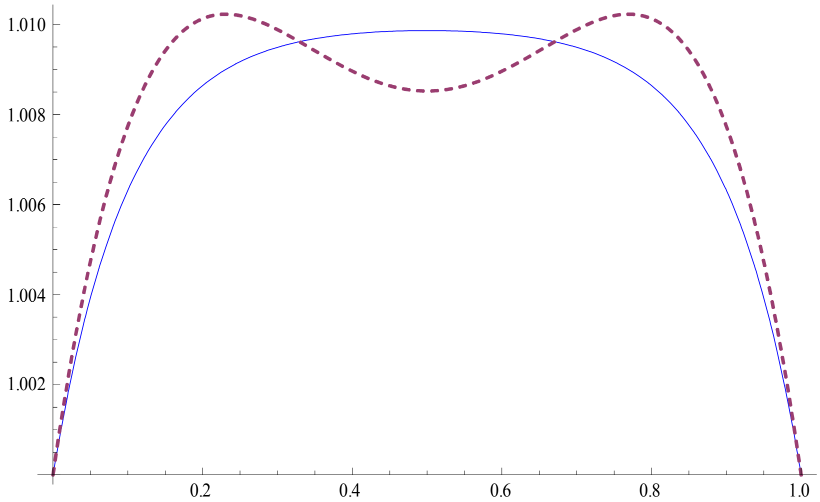

Рис. 1. Графіки точного та наближеного розв’язку крайової задачі з рівнянням дифузії-реакції за кроку дискретизації $h=1/4$. Пунктирною лінією зображено наближений розв’язок, суцільною лінією – точний розв’язок задачі (5.4)

Приклад 4. Крайова задача для рівняння адвекції-дифузії.

Розглянемо одновимірну крайову задачу для рівняння адвекції-дифузії з неоднорідними крайовими умовами вигляду

$$\begin{cases} \textit{знайти функцію } u=u(x) \textit{ таку, що}: \\ Au := -\dfrac{d^2u}{dx^2}+100\dfrac{du}{dx}=100, \\ u(0)=1,\ u(1)=1. \end{cases} \tag{5.5}$$

Точний розв’язок задачі (5.5) має вигляд

$$u(x)=\frac{e^{100}-e^{100x}-x+e^{100}x}{e^{100}-1}.$$

Задачу (5.5) розв’язуємо методом Лі-алгебричних апроксимацій з використанням теореми про вигляд системи лінійних алгебричних рівнянь для відшукання розв’язку крайової задачі з неоднорідними крайовими умовами. Наближений розв’язок шукатимемо з кроками дискретизації $h = \left\{ \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16} \right\}$. Розв'язки, отримані на різних кроках дискретизації, порівнюємо з точним розв'язком та обчислюємо похибки в функціональних просторах $L^\infty(\Omega_\sigma),\ L^1(\Omega),\ L^2(\Omega),\ H^1(\Omega)$. Результати обчислень подано у табл. 5.

Таблиця 5

Похибки апроксимацій у функціональних просторах
$L^\infty(\Omega_\sigma),\ L^1(\Omega),\ L^2(\Omega),\ H^1(\Omega)$ задачі (5.4)

Крок дискретизації h	$\lVert u-u_\sigma \rVert_{L^\infty(\Omega_\sigma)}$	$\lVert u-u_\sigma \rVert_{L^1(\Omega)}$	$\lVert u-u_\sigma \rVert_{L^2(\Omega)}$	$\lVert u-u_\sigma \rVert_{H^1(\Omega)}$
$h = 1/2$	0.492504	0.485003	0.559975	6.99582
$h = 1/4$	0.80303	0.492113	0.583152	7.07567
$h = 1/8$	0.865908	0.497761	0.567603	7.09737
$h = 1/16$	0.740338	0.639008	0.651117	5.0636

З табл. 5 видно, що зі зростанням кількості вузлів розв'язок не уточнюється, а навпаки зростають значення похибок стосовно точного розв'язку. Графіки точного та наближеного розв'язку за кроку дискретизації $h = 1/16$ зображено на рис. 2.

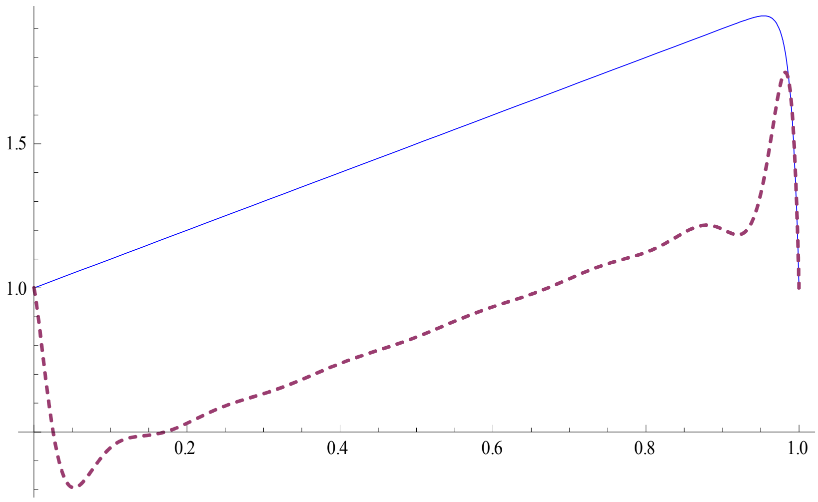

Рис. 2. Графіки точного та наближеного розв'язку крайової задачі для рівняння адвекції-дифузії за кроку дискретизації $h = 1/16$. Пунктирною лінією зображено наближений розв'язок, суцільною лінією – точний розв'язок задачі (5.5)

6. ВИСНОВКИ

Запропоновано модифікацію методу Лі-алгебричних апроксимацій для розв'язування крайових задач з еліптичними рівняннями з неоднорідними крайовими умовами.

Доведено теорему про вигляд системи лінійних алгебричних рівнянь для відшукання розв'язку крайової задачі з неоднорідними крайовими умовами. Така модифікація дає змогу розв'язувати крайові задачі для однорідних і неоднорідних крайових умов єдиним підходом, що суттєво спрощує аналіз одновимірних крайових задач. Задача розв'язується єдиним способом незалежно від того, чи крайові умови однорідні чи неоднорідні.

Проведено аналіз похибок для крайових задач з рівнянням Пуассона, рівнянням дифузії-реакції з коефіцієнтом біохімічного розпаду речовини $r = 100$ та рівнянням адвекції-дифузії з числом Пекле $Pe = 100$.

Наведені числові результати свідчать про те, що метод Лі-алгебричних апроксимацій надає прийнятний результат для сингулярно-збуреної задачі дифузії-реакції навіть за кроку дискретизації $h = 1/4$, проте для сингулярно-збуреної задачі адвекції-дифузії за кроку дискретизації $h = 1/16$, ми не в змозі отримати адекватне наближення до точного розв'язку. З огляду на цю обставину треба проводити подальші дослідження застосовності методу Лі-алгебричних апроксимацій та його модифікацій для сингулярно-збуреної задачі адвекції-дифузії.

Список використаної літератури

1. *Бігун О.* Метод Лі-алгебричних апроксимацій у теорії динамічних систем / О. Бігун, М. Притула // Мат. вісник НТШ. – Т. 1.– 2004. – С. 24–31.
2. *Бігун О.* Дискретні апроксимації задач Коші – Діріхле у скінченно-вимірних банахових просторах / О. Бігун // П'ята Всеукраїнська студентська наукова конференція з прикладної математики та інформатики. – Львів, 2002. – Тези доповідей. – С. 216–217.
3. *Кіндибалюк А.А.* Модифікація Лі-алгебричного методу дискретних апроксимацій для розв'язування крайових задач з неоднорідними крайовими умовами / А.А. Кіндибалюк // П'ятнадцята Всеукраїнська (Десята Міжнародна) студентська наукова конференція з прикладної математики та інформатики. Львів 5–6 квітня 2012 р. – Тези доповідей. – С. 216–217.
4. *Митропольский Ю.А.* Алгебраическая схема дискретных аппроксимаций линейных и нелинейных динамических систем математической физики / Ю.А. Митропольский, А.К. Прикарпатский, В.Гр. Самойленко // Укр. мат. журн. – 1988. – Т. 40. – С. 453–458.
5. *Самойленко В.Гр.* Алгебраическая схема дискретных аппроксимаций динамических систем математической физики и оценки её точности / В. Гр. Самойленко // Асимптотические методы в задачах мат. физики. – К.: Ин-т математики АН УССР, 1988. – С. 144–151.
6. *Bihun O.* The rank of projection-algebraic representations of some differential operators / O. Bihun, M. Prytula // Мат. студії. – Т. 35, № 1. – 2011. – P. 9–21.
7. *Bihun O.H.* Modification of the Lie-algebraic scheme and approximation error estimations / O.H. Bihun // Mathematical Studies. – Vol. 20, № 2. – 2003. – P. 179-184.
8. *Bihun O.H.* Approximation properties of the Lie-algebraic scheme / O.H. Bihun, M. Luśtyk // Mathematical Studies. – Vol. 20, № 1. – 2003. – P. 85–91.
9. *Bihun O.H.* Numerical tests and theoretical estimations for a Lie-algebraic scheme of discrete approximations / O.H. Bihun, M. Luśtyk // Visnyk of the Lviv University. – Series Applied Mathematics and Computer Science. – Issue 6, 2003. – P. 3–10.
10. *Calogero F.* Interpolation, differentiation and solution of eigenvalue problems in more than one dimension / F. Calogero // Lett. Nuovo Cimento. – Vol. 38. – 13. – 1983. – P. 453–459.

11. *Casas F.* Solution of linear partial differential equations by Lie algebraic methods / F. Casas // Journal of Comp. and Appl. Math. – Vol. 76, 1996. – P. 159–170.
12. *Luśtyk M.* Lie-algebraic discrete approximation for nonlinear evolution equations / M. Luśtyk // Mathematical Methods and Phisicomechanical Fields. – Vol. 42, № 1, 1999. – P. 7–10.
13. *Prykarpatsky A.K.* The Lie-algebraic discrete approximations in computing analysis / A.K. Prykarpatsky, M.M. Prytula, O.O. Yershenko // Volyn Mathematical Bulletin Vol. 3. – 1996. – P. 113–116.
14. *Wolf F.* Lie algebraic solutions of linear Foker-Plank equations / F. Wolf // J. math. phys. – Vol. 29. – 1988. – P. 305–307.

Стаття: надійшла до редколегії 10.09.2012
доопрацьована 24.10.2012
прийнята до друку 14.11.2012

МОДИФИЦИРОВАННЫЙ МЕТОД ЛИ-АЛГЕБРАИЧЕСКИХ АППРОКСИМАЦИЙ ДЛЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ С НЕОДНОРОДНЫМИ КРАЕВЫМИ УСЛОВИЯМИ

Аркадий Киндыбалюк, Н. Притула

Львовский национальный университет имени Ивана Франко,
ул. Университетская, 1, Львов, 79000, e-mail: mykola.prytula@gmail.com

Предложена модификация метода Ли–алгебраических аппроксимаций для решения одномерных краевых задач для эллиптических дифференциальных уравнений с краевыми условиями типа Дирихле. Рассмотрена схема построения соответствующего конечномерного представления дифференциального оператора. Получена система линейных алгебраических уравнений для непосредственного решения краевой задачи с неоднородными краевыми условиями. Проведены численные исследования на примере модельных задач.

Ключевые слова: Ли–алгебраические дискретные аппроксимации, неоднородные краевые условия, метод наименьших квадратов, эллиптические уравнения, полиномы Лагранжа.

THE MODIFIED METHOD OF LIE-ALGEBRAIC APPROXIMATIONS FOR ELLIPTIC EQUATIONS WITH INHOMOGENEOUS BOUNDARY VALUE CONDITIONS

Arkadii Kindybaliuk, M. Prytula

Ivan Franko National University of Lviv,
Universytetska Str., 1, Lviv, 79000, e-mail: mykola.prytula@gmail.com

The modification of the method of Lie algebraic approximations has been proposed in this work in the aim of solving one dimensional boundary value problem with inhomogeneous boundary value conditions. Scheme of the constructing the corresponding finite dimensional representation of differential operator has been investigated. The system of linear algebraic equations for direct solving the boundary value problem with inhomogeneous boundary value conditions has been obtained. Numerical investigations have been conducted via model problems.

Key words: Lie algebraic discrete approximations, inhomogeneous boundary value conditions, the method of least squares, elliptic equations, Lagrange's polynomials.