ISSN 2078–5097. Вісн. Львів. ун-ту. Сер. прикл. матем. та інф. 2013. Вип. 19. С. 39–46
Visnyk of the Lviv University. Series Appl. Math. and Informatics. Issue 19. P. 39–46

УДК 519.6

ЗАСТОСУВАННЯ ПРИСКОРЕНОГО МЕТОДУ НЬЮТОНА ТА РІЗНИЦЕВИХ МЕТОДІВ ДО РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧІ ПОШУКУ ПЕРІОДИЧНИХ РЕЖИМІВ У НЕЛІНІЙНИХ ДИНАМІЧНИХ СИСТЕМАХ

С. Шахно, Д. Убізський, Г. Ярмола

Львівський національний університет імені Івана Франка,
вул. Університетська, 1, Львів, 79000, e-mail: kom@franko.lviv.ua

Застосовано прискорений метод Ньютона та різницеві методи (метод хорд і метод Курчатова) для розрахунку періодичних режимів у нелінійних динамічних системах. Сформульовано алгоритм розв'язування задачі. На тестових прикладах проведено числове дослідження методів і виконано порівняння отриманих результатів.

Ключові слова: метод Ньютона, різницевий метод, періодичний режим, матриця переходу стану, нелінійна динамічна система.

1. ВСТУП

Аналіз стаціонарних режимів нелінійних динамічних систем – завдання, яке часто виникає під час моделювання роботи багатьох пристроїв механіки, радіоелектроніки, радіофізики та інших.

Динамічну електронну систему можна описати за допомогою системи звичайних диференціальних рівнянь і початковим станом

$$\begin{aligned} x' &= f(x,t), \\ x(t_0) &= x^0, \end{aligned} \tag{1}$$

де x і f – n-вимірні вектори; f – нелінійна періодична функція за змінною t з періодом T, неперервна за t і неперервно диференційовна за x, $t \in [t_0, t_0 + T]$.

Задача пошуку періодичних режимів еквівалентна двоточковій крайовій задачі, в якій розв'язок рівняння (1) на інтервалі $[t_0, t_0 + T]$ повинен задовольняти граничну умову

$$x(t_0) = x(t_0 + T). \tag{2}$$

Проінтегрувавши систему (1) на відрізку $[t_0, t_0 + T]$, отримаємо

$$x(t_0 + T) = \int_{t_0}^{t_0+T} f(x,\tau)d\tau + x(t_0). \tag{3}$$

Перепишемо (3) у вигляді

$$x_0 = \phi(t_0 + T, t_0; x_0), \tag{4}$$

де $x_0 = x(t_0)$, $\phi(t_0 + T, t_0; x_0) = \int_{t_0}^{t_0+T} f(x,\tau)d\tau + x_0$, $x(t)$ задовольняє рівняння (1) на відрізку $[t_0, t_0 + T]$.

Найпростіший метод аналізу стаціонарного розв'язку – метод стискувального відображення [8]. Проте він потребує великої кількості ітерацій. Ефективнішим для аналізу стаціонарного розв'язку є метод Ньютона та його модифікації [6-8], методи оптимізації та екстраполяції [9, 10], метод Стеффенсена [5].

Для пошуку стаціонарних періодичних режимів системи (1) застосовано прискорений метод Ньютона та різницеві методи. Зауважимо, що ці методи прості для програмної реалізації і деякі з них мають квадратичний порядок збіжності, як і метод Ньютона.

2. ДЕЯКІ ІТЕРАЦІЙНІ ПРОЦЕСИ ДЛЯ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ НЕЛІНІЙНИХ ОПЕРАТОРНИХ РІВНЯНЬ

Для розв'язування нелінійного операторного рівняння $F(x)=0$ ітерації методу Ньютона визначають так:

$$x_{k+1}=x_k-\left[F'(x_k)\right]^{-1}F(x_k),\quad k=0,\ 1,\ 2,\dots. \tag{5}$$

У [1] запропоновано модифікацію методу Ньютона для розв'язування нелінійних рівнянь записаних у вигляді

$$F(x)=x-\phi(x)=0\,.$$

Ітерації тут проводять за такою формулою:

$$x_{k+1}=x_k-\left[F'\left(\frac{x_k+\phi(x_k)}{2}\right)\right]^{-1}F(x_k),\quad k=0,\ 1,\ 2,\dots. \tag{6}$$

Також доведено, що цей метод має квадратичну збіжністю. Крім того, у разі виконання умови

$$\sup_{x\in\Omega_0}\|\phi'(x)\|=K<1\,,$$

де Ω_0 деяка область, ітерації (6) збігаються до розв'язку швидше, ніж (5).

Формулу (6) можна записати у більш загальному вигляді, ввівши додатковий параметр $0\le\mu\le 1$

$$x_{k+1}=x_k-\left[F'\left((1-\mu)x_k+\mu\phi(x_k)\right)\right]^{-1}F(x_k),\quad k=0,\ 1,\ 2,\dots. \tag{7}$$

Прийнявши $\mu=0$, отримуємо класичний метод Ньютона (5), при $\mu=1$ – метод Стірлінга. Також легко помітити, що для отримання методу (6) треба у формулі (7) вибрати $\mu=0.5$.

У [4] для розв'язування нелінійних операторних рівнянь запропоновано однокроковий двопараметричний метод типу хорд

$$x_{k+1}=x_k-F(u_k;v_k)^{-1}F(x_k),\quad k=0,\ 1,\ 2,\dots, \tag{8}$$

де $F(u_k;v_k)$ – поділена різниця першого порядку оператора F за точками u_k та v_k, $u_k=x_k+a_k(x_{k-1}-x_k)$, $v_k=x_k+b_k(x_{k-1}-x_k)$, $a_k\in[-1;1]$, $b_k\in[0;1]$. В загальному випадку доведено, що порядок збіжності ітераційного процесу (8) дорівнює $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Частковими випадками методу (8) є метод Ньютона (5) ($a_k=0$ і $b_k=0$), при $a_k=0$ і $b_k=1$ отримаємо метод хорд, а при $a_k=-1$ і $b_k=1$ – метод Курчатова.

3. АЛГОРИТМ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧІ (4)

У [8] для пошуку періодичного режиму задачі (1) запропоновано ітераційний процес, який ґрунтується на методі Ньютона і виглядає так:

$$x_0^{k+1}=[\Phi^{-1}(t_0+T,t_0;x_0^k)-I]^{-1}\cdot[\Phi^{-1}(t_0+T,t_0;x_0^k)x^k(t_0+T)-x_0^k],\quad k=0,\ 1,\ 2,\dots, \tag{9}$$

де $\Phi(t_0+T,t_0;x_0^k)=\phi'(t_0+T,t_0;x_0^k)$ – матриця переходу стану; I – одинична матриця; k – номер ітерації.

Для побудови послідовності наближень методом (9) треба обчислювати матрицю $\Phi^{-1}(t_0+T,t_0;x_0^k)$ та $x^k(t_0+T)$ на кожній ітерації. Для обчислення $x^k(t_0+T)$ потрібно розв'язати задачу Коші

$$\begin{cases} x' = f(x,t), \\ x(t_0) = x_0^k. \end{cases}$$

Найпростішим методом розв'язування такої задачі є явний метод Ейлера. Оскільки більшість задач пошуку періодичного режиму описують жорсткими нелінійними системами, то використання явних методів неприйнятне. Інтегруючи жорстку систему явним методом, часто виникає явище осциляції розв'язку. Щоб уникнути коливань розв'язку, треба значно зменшити крок розбиття. Часто величина відповідного кроку є настільки малою, що на практиці обчислення виходять з розрядної сітки машин. Тому для подібних задач доцільно використовувати неявні методи, адже вони, для отримання хороших результатів, не накладають особливих обмежень на крок розбиття [2]. Якщо для розв'язування задачі Коші застосувати неявний метод Ейлера, то матрицю, обернену до матриці переходу станів $\Phi(t_0+T,t_0;x_0^k)$, обчислюють так [8]:

$$\Phi^{-1}(t_0+T,t_0;x_0^k) \approx \prod_{j=1}^{m}\left[I - hF(x^k(t_j))\right], \tag{10}$$

де $x^k(t_j)$, $j=\overline{1,m}$ – розв'язки задачі Коші; $t_j = t_0 + jh$, $h = \dfrac{1}{m}$.

Сформулюємо алгоритм розв'язування задачі пошуку періодичного режиму.

1. Для заданого початкового стану x_0^k обчислити розв'язок $x^k(t_j)$ системи (1) для кожного вузла сітки ($t_0 < t_j \le t_0 + T$). Для цього можна застосувати неявний метод Ейлера

$$x^k(t_j) = x^k(t_{j-1}) + hf(x^k(t_j),t_j)$$

або метод Кранка-Ніколсона

$$x^k(t_j) = x^k(t_{j-1}) + \frac{h}{2}\Big(f(x^k(t_{j-1}),t_{j-1}) + f(x^k(t_j),t_j)\Big).$$

Оскільки обидва методи неявні, то для кожного $j=\overline{1,m}$ потрібно розв'язувати систему нелінійних рівнянь. Відповідні ітераційні процеси набувають вигляду

$$x^{k,l+1}(t_j) = x^{k,l}(t_j) - \left[I - hF(x^{k,l}(t_j),t_j)\right]\left[x^{k,l}(t_j) - x^k(t_{j-1}) - hf(x^{k,l}(t_j),t_j)\right],\ \ l = 0,\ 1,\ 2,\ldots$$

і

$$x^{k,l+1}(t_j) = x^{k,l}(t_j) - \left[I - \frac{h}{2}F(x^{k,l}(t_j),t_j)\right] \times$$
$$\times \left[x^{k,l}(t_j) - x^k(t_{j-1}) - \frac{h}{2}\Big(f(x^{k,l}(t_{j-1}),t_{j-1}) + f(x^{k,l}(t_j),t_j)\Big)\right],\ \ l = 0,\ 1,\ 2,\ldots.$$

Тут $F(x,t)$ – якобіан $f(x,t)$ або його апроксимація. Залежно від вигляду $F(x,t)$ отримаємо згадані методи.

2. Обчислити матрицю переходу станів $\Phi(t_0+T,t_0;x_0^k)$, розв'язавши задачу

$$\Phi'(t,t_0;x_0^k) = F(x^k,t)\,\Phi(t,t_0;x_0^k),\ \ \Phi(t_0,t_0;x_0^k) = I.$$

3. Обчислити x_0^{k+1} за формулою

$$x_0^{k+1} = x_0^k - [I - \Phi(t_0 + T, t_0; x_0^k)]^{-1} \cdot [x_0^k - \phi(t_0 + T, t_0; x_0^k)]$$

або за формулою (9), якщо обчислили $\Phi^{-1}(t_0 + T, t_0; x_0^k)$.

4. Повернутися до першого кроку з використанням x_0^{k+1} у разі невиконання умов

$$\| x^{k+1}(t_0 + T) - x_0^k \| < \varepsilon \text{ і } \| x_0^{k+1} - x_0^k \| < \delta ,$$

де ε і δ – довільні достатньо малі додатні числа.

4. ЧИСЕЛЬНІ ЕКСПЕРИМЕНТИ

Розглянемо систему, яка є математичною моделлю джерела живлення постійного струму. Стан цієї динамічної системи у момент часу t описують чотирма рівняннями [7]

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = \dfrac{1}{10^{-6}}\left\{\dfrac{1}{5}\left[-x_1 - x_2 + 10\sin(120\pi t)\right] - 10^{-6}[e^{40x_1} - 1]\right\}; \\ \dfrac{dx_2}{dt} = \dfrac{1}{10^{-3}}\left\{\dfrac{1}{5}\left[-x_1 - x_2 + 10\sin(120\pi t)\right] - x_3\right\}; \\ \dfrac{dx_3}{dt} = \dfrac{1}{0.1}\left[x_2 - x_4\right]; \\ \dfrac{dx_4}{dt} = \dfrac{1}{10^{-3}}\left[x_3 - \dfrac{x_4}{1000}\right]. \end{cases}$$

Для чисельного експерименту використаємо такі сталі:

$$\varepsilon_{in} = 10^{-5}; \quad \varepsilon_{out} = 10^{-8}; \quad T = 1/60; \quad m = 1000; \quad \mu = 0.5 ,$$

де ε_{in} та ε_{out} – максимальна різниця значень між двома сусідніми ітераціями (ε_{in} – для зупинки внутрішніх ітерацій, ε_{out} – для зупинки зовнішніх ітерацій); T – період системи; $m+1$ – кількість точок розбиття відрізка $[0, T]$; μ – параметр прискореного методу Ньютона. За початкове наближення x^0 приймемо вектор початкового стану $x(0) = (0, 0, 0, 0)$.

Застосувавши для чисельного інтегрування метод Кранка-Ніколсона, отримаємо такий результат: $\omega_1(0) = -9.07535010$, $\omega_2(0) = 9.05647925$, $\omega_3(0) = 0.00902937$, $\omega_4(0) = 9.10251180$ ($\omega(0)$ – шуканий періодичний режим). Класичний метод Ньютона та прискорений метод Ньютона збігаються до цього розв'язку за 7 ітерацій, а різницеві методи (хорд і Курчатова) – за 8 ітерацій. З одержаних результатів бачимо, що різницеві методи збігаються дещо повільніше, ніж метод Ньютона.

Розглянемо таку систему, яка є математичною моделлю осцилятора Дуффінга

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = x_2; \\ \dfrac{dx_2}{dt} = -0.2x_2 - x_1^3 + 0.3\cos(t). \end{cases}$$

Як відомо, ця система має три періодичні режими [3]. Методи, які ми застосовували, виявили лише два з них. У цій статті подано результати розрахунку періодичного режиму $\omega_1(0) = 0.62671045$, $\omega_2(0) = 1.03306134$.

Проведемо аналіз кількості ітерацій, потрібних для обчислення періодичного стану рівняння Дуффінга при різних значеннях кроку розбиття відрізка $[0,T]$. Для чисельного експерименту використаємо такі сталі:

$$\varepsilon_{in} = 10^{-5}; \quad \varepsilon_{out} = 10^{-8}; \quad T = 2\pi .$$

Для чисельного інтегрування застосовуємо метод Кранка-Ніколсона, а за початкове наближення обираємо вектор

$$x_1^0(0) = 0.027 , \; x_2^0(0) = 1.1 .$$

У табл. 1 подано результати обчислень для кроку $h = 0.0314$ ($m = 200$), а у табл. 2 – для $h = 0.00628$ ($m = 1000$).

Таблиця 1

Кількість ітерацій, потрібних для отримання розв'язку двопараметричним методом типу хорд ($h = 0.0314$)

b \ a	-1	-0.5	0	0.5	1
-1	10	11	11	11	11
-0.5	11	10	10	10	11
0	11	10	10	10	11
0.5	11	10	10	10	11
1	11	11	11	11	10

Таблиця 2

Кількість ітерацій, потрібних для отримання розв'язку двопараметричним методом типу хорд ($h = 0.00628$)

b \ a	-1	-0.5	0	0.5	1
-1	7	8	8	8	8
-0.5	8	7	7	7	8
0	8	7	7	8	8
0.5	8	7	8	7	9
1	8	8	8	9	7

З табл. 1 і 2 бачимо, що зі збільшенням кроку розбиття відрізка $[0,T]$ кількість ітерацій зростає. Якщо крок h вибрати надто великим, то можна отримати хибні результати або метод буде розбігатися. Також не треба обирати дуже малий крок розбиття, оскільки тоді кількість ітерацій зменшується на 1-2 ітерації, а кількість обчислень суттєво збільшується.

У табл. 3 наведено значення наближень до розв'язку на кожній ітерації, отримані методами Ньютона, хорд і Курчатова, для кроку $h = 0.00628$.

Таблиця 3

Розв'язок задачі пошуку періодичного стану рівняння Дуффінга

k	Метод Ньютона	Метод хорд	Метод Курчатова
1	0.82083197 1.04098983	0.82069389 1.04106486	0.82083190 1.04098982
2	0.62655699 1.04264386	0.60843682 1.01871339	0.73841441 1.00165253
3	0.62726262 1.03294481	0.62368774 1.03245662	0.62385477 1.03495976
4	0.62670144 1.03305912	0.62675599 1.03311233	0.62677361 1.03306582
5	0.62671041 1.03306144	0.62671230 1.03306010	0.62671024 1.03306079
6	0.62671046 1.03306134	0.62671038 1.03306134	0.62671043 1.03306135
7	0.62671045 1.03306134	0.62671045 1.03306134	0.62671045 1.03306133
8		0.62671045 1.03306134	0.62671045 1.03306133

5. ВИСНОВКИ

Ми застосували прискорений метод Ньютона та різницеві методи для пошуку періодичних режимів нелінійних динамічних систем. Числові експерименти проводили для розрахунку періодичних станів деяких електронних систем.

Як бачимо, послідовність наближень, яку отримали прискореним методом Ньютона, прямує до розв'язку з такою самою швидкістю, як і класичний метод Ньютона. Переваги цього методу можна побачити, якщо збільшити крок сітки. Щодо різницевих методів, то вони збігаються дещо повільніше, ніж метод Ньютона, проте різниця в кількості ітерацій несуттєва. Зауважимо, що при деяких значеннях параметрів метод (8) не поступається методу Ньютона. Також перевагою різницевих методів є те, що вони не потребують аналітично заданих похідних в обчислювальних формулах.

На вибір методу інтегрування (розв'язування задачі Коші) може також вплинути ступінь жорсткості динамічної системи. Якщо система дає змогу використати явні методи інтегрування для отримання значень розв'язку у всіх вузлах сітки (одержані результати достатньо хороші для подальших обчислень), то обчислювальні затрати будуть не надто великі. Якщо система має високий ступінь жорсткості, то треба використовувати неявні або явно-неявні методи. У цьому випадку отримуємо системи нелінійних рівнянь, розв'язування яких потребує більших обчислювальних затрат.

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. *Бартиш М.Я.* О методе Ньютона с ускоренной сходимостью / М.Я. Бартиш, С.М. Шахно // Вестн. Киев. ун-та. Моделирование и оптимизация сложных систем. – 1987. – Вып. 6. – С. 62–66.

2. *Калиткин Н.Н.* Численные методы решения жестких систем / Н.Н. Калиткин // Математическое моделирование. – 1995. – Вып. 5. – С. 8–11.
3. *Хаяси Т.* Нелинейные колебания в физических системах / Т. Хаяси; пер. с англ. Б.А. Болдова, Г.Г. Гусева, под ред. В.Е. Боголюбова. – М.: Мир, 1968. – 432 с.
4. *Шахно С.М.* Двопараметричні методи типу хорд для розв'язування нелінійних рівнянь / С.М. Шахно, С.І. Граб, Г.П. Ярмола // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. прикл. матем. інформ. – 2009. – Вип. 15. – С. 117–127.
5. *Шмигельський Я.* Моделювання періодичних режимів динамічних систем модифікованим методом Стеффенсена / Я. Шмигельський // Матеріали XVI Всеукр. наук. конф. "Сучасні проблеми прикладної математики та інформатики", 8-9 жовтня 2010 р., Львів, ЛНУ ім. І. Франка. – 2010. – С. 228.
6. *Шмигельський Я.* Модифікований метод Ньютона для розрахунку періодичних режимів нелінійних динамічних систем / Я. Шмигельський // Теоретична електротехніка. – 2009. – Вип. 60. – С. 54–57.
7. *Шмигельський Я.* Регуляризація методу пошуку періодичних режимів нелінійних електронних схем / Я. Шмигельський // Теоретична електротехніка. – 2005. – Вип. 58. – С. 65–68.
8. *Эйприлл Т.* Анализ стационарного режима нелинейных цепей с периодическими входными сигналами / Т. Эйприлл, Т. Трик // ТИИЭР. – 1982. – Т. 70, № 10. – С. 148–155.
9. *Skelboe S.* Computation of the periodic steady-state response of nonlinear networks be extrapolation methods / S. Skelboe // IEEE Transactions on circuits and systems. – 1980. – Vol. 27. – P. 161–175.
10. *Skelboe S.* Time-Domain Steady-State Analysis of Nonlinear Electrical Systems / S. Skelboe // Proceedings of the IEEE. – 1982. – Vol. 10. – P. 89–111.

Стаття: надійшла до редколегії 17.09.2012
доопрацьована 07.11.2012
прийнята до друку 14.11.2012

ПРИМЕНЕНИЕ УСКОРЕНОГО МЕТОДА НЬЮТОНА И РАЗНОСТНЫХ МЕТОДОВ К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧИ ПОИСКА ПЕРИОДИЧЕСКИХ РЕЖИМОВ В НЕЛИНЕЙНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ

С. Шахно, Д. Убизский, Г. Ярмола

Львовский национальный университет имени Ивана Франко,
ул. Университетская, 1, Львов, 79000, e-mail: kom@franko.lviv.ua

Применены ускоренный метод Ньютона и разностные методы (метод хорд и метод Курчатова) для расчета периодических режимов в нелинейных динамических системах. Сформулирован четкий алгоритм решения задачи. На тестовых примерах проведено численное исследование методов и сделано сравнение полученных результатов.

Ключевые слова: метод Ньютона, разностный метод, периодический режим, матрица перехода состояния, нелинейная динамическая система.

THE USE OF ACCELERATED NEWTON METHOD AND DIFFERENCE METHODS FOR THE PROBLEM OF DEFINING PERIODIC MODES IN NONLINEAR DYNAMICAL SYSTEMS

S. Shakhno, D. Ubizskyy, H. Yarmola

Ivan Franko National University of Lviv,
Universytetska str, 1, Lviv, 79000, e-mail:kom@franko.lviv.ua

An accelerated Newton's method and difference methods for calculating a periodic responce in the nonlinear dynamical systems are applied. A clear algorithm for solving the problem is formulated. Numerical study of methods is carried out on the test examples and comparison of the results is made.

Key words: Newton method, difference method, periodic response, state transient matrix, nonlinear circuits.