

ПРО ЧИСЕЛЬНЕ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ НЕСТАЦІОНАРНОЇ ТЕПЛОПРОВІДНОСТІ В ТРИВИМІРНИХ НЕОБМЕЖЕНИХ ОБЛАСТЯХ

Н. Стосик, Р. Хапко

Львівський національний університет імені Івана Франка,
вул. Університетська, 1, Львів, 79000, e-mail: chapko@franko.lviv.ua

Для наближеного розв'язування першої початково-крайової задачі для параболічного рівняння у необмежених тривимірних областях запропоновано поєднання перетворення Лагерра за часовою змінною і метод граничних інтегральних рівнянь. У підсумку задача редукується до послідовності інтегральних рівнянь по границі області, для чисельного розв'язування яких застосовано дискретний проєкційний метод зі сферичними функціями. Подано приклади чисельних експериментів.

Ключові слова: нестационарна теплопровідність, перетворення Лагерра, метод інтегральних рівнянь, квадратурні формули, проєкційний метод.

1. ВСТУП

Метод інтегральних рівнянь відіграє важливу роль для наближеного розв'язування й дослідження крайових задач, зокрема в необмежених областях. Це зумовлено тим, що їхнє переформулювання у вигляді інтегральних рівнянь не тільки зменшує розмірність задачі, а й допомагає звести її до задачі в обмеженій області.

Особливий інтерес становить використання інтегральних рівнянь для задач з параметричним зображенням границі. В цьому випадку можна отримати чисельний розв'язок з досить високим порядком збіжності.

Наша мета – розглянути наближене розв'язування початково-крайової задачі для параболічного рівняння у тривимірній необмеженій області за допомогою перетворення Лагерра і граничних інтегральних рівнянь [3]. Чисельне розв'язування послідовності інтегральних рівнянь виконують дискретним методом Гальоркіна з використанням апроксимації за сферичними функціями [1,5,6,8].

2. ФОРМУЛЮВАННЯ ЗАДАЧІ

Нехай $D \subset R^3$ необмежена область така, що її доповнення обмежене й однозв'язне. Припустимо, що границя Γ області D належить класу C^2 й існує взаємно-однозначне відображення $q: \Omega \rightarrow \Gamma$, де Ω – одинична сфера. Розглянемо початково-крайову задачу для рівняння теплопровідності з коефіцієнтом теплопровідності $c > 0$. Отже, будемо шукати розв'язок рівняння

$$\frac{1}{c} \frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u, \text{ в } D \times (0, \infty), \quad (1)$$

який двічі неперервно-диференційований стосовно просторових змінних і неперервно-диференційований стосовно часової змінної в $D \times (0, \infty)$ та задовольняє однорідну початкову умову

$$u(x, 0) = 0, \quad x \in D, \quad (2)$$

і граничну умову

$$u(x, t) = f(x, t), \text{ в } \Gamma \times [0, \infty), \quad (3)$$

де f – задана функція, яка задовольняє умову погодженості

$$f(x,0) = 0, \quad x \in \Gamma.$$

Також будемо вважати, що на нескінченності виконується умова

$$u(x,t) \rightarrow 0, \quad |x| \rightarrow \infty, \tag{4}$$

рівномірно стосовно всіх напрямів $\frac{x}{|x|}$ і всіх $t \in [0, \infty)$.

В [2] показано коректність сформульованої задачі (1)-(4).

3. ЧАСТКОВА ДИСКРЕТИЗАЦІЯ ЗА ЧАСОМ

Для виконання часткової дискретизації за часом використаємо інтегральне перетворення Лагерра [3,4], яке має вигляд

$$v_N(x) = \int_0^\infty e^{-kt} L_N(kt) v(x,t) dt, \quad N = 0, 1, 2, \dots,$$

де v – оригінал; v_N – образ; $k > 0$ – фіксований параметр; L_N – поліном Лагерра степеня N . Обернене перетворення виконується підсумуванням ряду Фур'є-Лагерра

$$v(x,t) = k \sum_{N=0}^\infty v_N(x) L_N(kt).$$

Отже, застосувавши перетворення Лагерра до вихідної задачі (1)-(4), отримаємо нескінченну послідовність стаціонарних граничних задач

$$\Delta u_N - \gamma^2 u_N = \beta \sum_{m=0}^{N-1} u_m \quad \text{в } D, \tag{5}$$

$$u_N = f_N, \quad \text{на } \Gamma, \tag{6}$$

$$u_N(x) \rightarrow 0, \quad |x| \rightarrow \infty, \tag{7}$$

рівномірно в усіх напрямках. Тут $\beta = \frac{k}{c}$, $\gamma^2 = \beta^2$, u_N і f_N – образи функцій u та f і $N = 0, 1, 2, \dots$,

Теорема 1. Послідовність стаціонарних задач (5)-(7) має не більше одного розв'язку.

Доведення. Легко отримується за методом математичної індукції з використанням принципу максимуму для рівняння Клейна-Гордона.

Подамо розв'язок задачі (1)-(4) у вигляді

$$u(x,t) = k \sum_{N=0}^\infty u_N(x) L_N(kt). \tag{8}$$

Не важко довести еквівалентність вихідної нестационарної задачі (1)-(4) і послідовності стаціонарних задач (5)-(7) через подання (8).

Теорема 2. Подання (8) є розв'язком задачі (1)-(4) тоді і лише тоді, коли $\{u_N\}_{N=0}^\infty$ є розв'язками послідовності стаціонарних задач (5)-(7).

4. МЕТОД ПОТЕНЦІАЛІВ ДЛЯ ГРАНИЧНИХ ЗАДАЧ

Введемо для рівнянь (5) потенціали простого шару

$$U_N(x) = \frac{1}{2\pi} \sum_{m=0}^N \int_{\Gamma} g_m(y) \Phi_{N-m}(x,y) ds(y), \quad x \in R^3 \setminus \Gamma, \tag{9}$$

де $g_m \in C(\Gamma)$ – невідомі густини; Φ_m – фундаментальний розв’язок k -го рівняння з послідовності (5), який має вигляд [7]

$$\Phi_n(x, y) = \frac{e^{-\gamma|x-y|}}{|x-y|} \sum_{m=0}^n a_{n,m} |x-y|^m, \quad (10)$$

з коефіцієнтами, які визначають за рекурентними формулами

$$a_{n,0} = 1, \quad a_{n,n} = \frac{-\gamma}{2n} a_{n-1,n-1},$$

$$a_{n,k} = \frac{1}{2k\gamma} \left[k(k+1)a_{n,k+1} - \beta \sum_{m=k-1}^{n-1} a_{m,k-1} \right], \quad k = n-1, \dots, 1,$$

для $n = 1, 2, \dots$.

Введені потенціали простого шару мають такі самі властивості, що і відповідний потенціал для рівняння Лапласа. Враховуючи теореми про стрибки потенціалів і граничні умови (6), правильним є такий результат.

Теорема 3. Потенціали простого шару (9) є розв’язками послідовності стаціонарних задач (5)-(7), якщо їхні густини є розв’язками послідовності інтегральних рівнянь першого роду

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} g_N(y) \Phi_0(x, y) ds(y) = f_N(x) - \frac{1}{2\pi} \sum_{m=0}^{N-1} \int_{\Gamma} g_m(y) \Phi_{N-m}(x, y) ds(y), \quad x \in \Gamma, \quad (11)$$

для $N = 0, 1, 2, \dots$.

Отже, розв’язки послідовності стаціонарних задач можна подати у вигляді (9) і для знаходження невідомих густин g_N треба розв’язати послідовність двовимірних інтегральних рівнянь (11), де інтегральний оператор при кожному $N = 0, 1, 2, \dots$ не змінюється, а змінюється тільки права частина, яка також містить інтеграли по границі області.

Використовуючи теорію поверхневих потенціалів і теорію Рісса-Фредгольма [7], можна довести таку теорему.

Теорема 4. Для будь-яких правих частин $\{f_N\}_{N=0}^{\infty}$ з простору Гьольдера $C^{1,\alpha}(\Gamma)$ послідовність інтегральних рівнянь (11) має єдиний розв’язок $\{g_N\}_{N=0}^{\infty}$ з простору $C^{0,\alpha}(\Gamma)$.

5. ПРОЕКЦІЙНИЙ МЕТОД ДЛЯ ДВОВИМІРНИХ ІНТЕГРАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

Інтегральне рівняння (11) має слабку особливість при $x = y$. Виділимо її, подавши ядро у вигляді

$$\Phi_0(x, y) = \frac{e^{-\gamma|x-y|}}{|x-y|} = \frac{\text{ch}(-\gamma|x-y|) + \text{sh}(-\gamma|x-y|)}{|x-y|} = \frac{K_1(x, y)}{|x-y|} + K_2(x, y),$$

де $K_1(x, y) = \text{ch}(-\gamma|x-y|)$, $K_2(x, y) = \frac{\text{sh}(-\gamma|x-y|)}{|x-y|}$.

Також для подальшого забезпечення хорошої збіжності квадратурних формул при обчисленні інтегралів подамо фундаментальні розв’язки послідовності граничних задач, які фігурують у правій частині в такому вигляді:

$$\Phi_n(x, y) = \frac{A_n(x, y)}{|x - y|} + B_n(x, y),$$

де

$$A_n(x, y) = \operatorname{ch}(-\gamma |x - y|) \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} a_{n,2k} |x - y|^{2k} + \operatorname{sh}(-\gamma |x - y|) \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} a_{n,2k+1} |x - y|^{2k+1},$$

$$B_n(x, y) = \operatorname{ch}(-\gamma |x - y|) \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} a_{n,2k+1} |x - y|^{2k} + \frac{\operatorname{sh}(-\gamma |x - y|)}{|x - y|} \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} a_{n,2k} |x - y|^{2k}.$$

Тоді інтегральні рівняння (11) можна переписати в такому вигляді:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} g_N(y) \left[\frac{K_1(x, y)}{|x - y|} + K_2(x, y) \right] ds(y) = F_N(x), \quad x \in \Gamma, \quad N = 0, 1, 2, \dots \quad (12)$$

з правими частинами

$$F_N(x) = f_N(x) - \frac{1}{2\pi} \sum_{m=0}^{N-1} \int_{\Gamma} g_m(y) \left[\frac{A_{N-m}(x, y)}{|x - y|} + B_{N-m}(x, y) \right] ds(y).$$

Позаяк існує взаємно-однозначне відображення $q: \Omega \rightarrow \Gamma$, то перейдемо в інтегральних рівняннях (12) від границі Γ до Ω . Нехай $\tilde{x}, \tilde{y} \in \Omega$, $q(\tilde{x}) = x$, $q(\tilde{y}) = y$. Введемо позначення

$$\tilde{g}_N(\tilde{y}) = g_N(q(\tilde{y})), \quad \tilde{F}_N(\tilde{x}) = F_N(q(\tilde{x})),$$

$$\tilde{K}_i(\tilde{x}, \tilde{y}) = K_i(q(\tilde{x}), q(\tilde{y})) \quad i = 1, 2, \quad \text{та} \quad R(\tilde{x}, \tilde{y}) = \frac{|\tilde{x} - \tilde{y}|}{|q(\tilde{x}) - q(\tilde{y})|}.$$

У підсумку отримаємо

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\Omega} \tilde{g}_N(\tilde{y}) \left[\frac{\tilde{K}_1(\tilde{x}, \tilde{y})}{|\tilde{x} - \tilde{y}|} R(\tilde{x}, \tilde{y}) + \tilde{K}_2(\tilde{x}, \tilde{y}) \right] J_q(\tilde{y}) ds(\tilde{y}) = \tilde{F}_N(\tilde{x}), \quad \tilde{x} \in \Omega, \quad (13)$$

де J_q – якобіан відображення q , $N = 0, 1, 2, \dots$.

Для обчислення подвійних інтегралів у (13) використаємо такі квадратурні формули [8]:

$$\int_{\Omega} f(\tilde{y}) ds(\tilde{y}) \approx \sum_{s'=1}^{n'+1} \sum_{\rho'=0}^{2n'+1} \tilde{\mu}_{\rho'} \tilde{a}_{s'} f(p(\theta_{s'}, \varphi_{\rho'})), \quad (14)$$

$$\int_{\Omega} \frac{f(\tilde{y})}{|\tilde{n} - \tilde{y}|} ds(\tilde{y}) \approx \sum_{s'=1}^{n'+1} \sum_{\rho'=0}^{2n'+1} \tilde{\mu}_{\rho'} \tilde{b}_{s'} f(p(\theta_{s'}, \varphi_{\rho'})), \quad \tilde{n} = (0, 0, 1)^T. \quad (15)$$

Тут $\tilde{y} = p(\theta, \varphi) = (\sin \theta \cos \varphi, \sin \theta \sin \varphi, \cos \theta)$, $\theta \in [0, \pi]$, $\varphi \in [0, 2\pi]$ параметризація Ω ,

$$\varphi_{\rho'} = \frac{\rho' \pi}{n'+1}, \quad \theta_{s'} = \arccos(z_{s'}), \quad \tilde{\mu}_{\rho'} = \frac{\pi}{n'+1},$$

$$\tilde{a}_{s'} = \frac{2(1 - z_{s'}^2)}{[(n'+1)P_{n'}(z_{s'})]^2}, \quad \tilde{b}_{s'} = \tilde{a}_{s'} \sum_{l=0}^{n'} P_l(z_{s'}),$$

і $z_{s'}$ – нулі полінома Лежандра $P_{n'+1}$, який має вигляд

$$P_n(z) = \frac{1}{2^n (n+1)!} \frac{d^n}{dz^n} [(z^2 - 1)^n].$$

Квадратури (14)–(15) мають супералгебричну швидкість збіжності, а для випадку аналітичних функцій – експоненціальну [5,6,8].

Щоб застосувати квадратури (14)–(15), перепишемо рівняння (13). Перемістимо довільну точку $\tilde{x} \in \Omega$ у північний полюс сфери $\tilde{n} = (0, 0, 1)^T$. Для цього введемо лінійне ортогональне перетворення $T_{\tilde{x}} = D_F(\varphi)D_T(\theta)D_F(-\varphi)$ таке, що $T_{\tilde{x}}\tilde{x} = \tilde{n}$, $\tilde{x} \in \Omega$,

$$D_F(\psi) = \begin{pmatrix} \cos \psi & -\sin \psi & 0 \\ \sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad D_T(\psi) = \begin{pmatrix} \cos \psi & 0 & -\sin \psi \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \psi & 0 & \cos \psi \end{pmatrix}.$$

Позначимо $\tilde{\eta} = T_{\tilde{x}}\tilde{y}$, $\tilde{y} \in \Omega$, отримаємо, що

$$|\tilde{x} - \tilde{y}| = |T_{\tilde{x}}^{-1}\tilde{n} - T_{\tilde{x}}^{-1}\tilde{\eta}| = |T_{\tilde{x}}^{-1}(\tilde{n} - \tilde{\eta})| = |\tilde{n} - \tilde{\eta}|.$$

У підсумку перейдемо від (13) до таких інтегральних рівнянь:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\Omega} \tilde{g}_N(T_{\tilde{x}}^{-1}\tilde{\eta}) \left[\frac{\tilde{K}_1(\tilde{x}, T_{\tilde{x}}^{-1}\tilde{\eta})}{|\tilde{n} - \tilde{\eta}|} R(\tilde{x}, T_{\tilde{x}}^{-1}\tilde{\eta}) + \tilde{K}_2(\tilde{x}, T_{\tilde{x}}^{-1}\tilde{\eta}) \right] J_q(T_{\tilde{x}}^{-1}\tilde{\eta}) ds(T_{\tilde{x}}^{-1}\tilde{\eta}) = \tilde{F}_N(\tilde{x}),$$

де $\tilde{x} \in \Omega$, $N = 0, 1, 2, \dots$. Застосувавши до них квадратурні формули (14)–(15), одержимо апроксимаційні рівняння

$$\frac{1}{2\pi} \sum_{s'=1}^{n'+1} \sum_{\rho=0}^{2n'+1} \hat{g}_N(T_{\tilde{x}}^{-1}\tilde{y}_{s'\rho'}) \tilde{\mu}_{\rho'} \left[\tilde{b}_s \tilde{K}_1(\tilde{x}, T_{\tilde{x}}^{-1}\tilde{y}_{s'\rho'}) R(\tilde{x}, T_{\tilde{x}}^{-1}\tilde{y}_{s'\rho'}) + \tilde{a}_s \tilde{K}_2(\tilde{x}, T_{\tilde{x}}^{-1}\tilde{y}_{s'\rho'}) \right] J_q(T_{\tilde{x}}^{-1}\tilde{y}_{s'\rho'}) = \tilde{F}_N(\tilde{x}), \quad \tilde{x} \in \Omega \quad (16)$$

$\tilde{y}_{s'\rho'} = p(\theta_{s'}, \varphi_{\rho'})$, $N = 0, 1, 2, \dots$.

Для повної дискретизації (16) використаємо проєкційний метод Гальоркіна. Подамо розв'язки рівнянь у вигляді

$$\hat{g}_N = \sum_{k=0}^n \sum_{l=-k}^k a_k^{N,l} Y_{k,l}^R, \quad (17)$$

де

$$Y_{k,l}^R = \begin{cases} \sqrt{2} \operatorname{Im} Y_{k,|l|}, & 0 < l \leq k, \\ \operatorname{Re} Y_{k,|l|}, & l = 0, \\ \sqrt{2} \operatorname{Re} Y_{k,|l|}, & -k \leq l < 0. \end{cases}$$

Тут $Y_{k,l}$ – сферичні функції, які обчислюють за формулою

$$Y_{k,l}(\theta, \varphi) = c_k^l P_k^{|l|}(\cos \theta) e^{il\varphi}, \quad l = -k \dots k, \quad k = 0, 1, \dots,$$

$c_k^l = (-1)^{\frac{|l|-l}{2}} \sqrt{\frac{2k+1}{4\pi} \frac{(k-|l|)!}{(k+|l|)!}}$, $P_k^{|l|}$ – асоційовані функції Лежандра вигляду

$$P_k^{|l|}(t) = (1-t^2)^{\frac{|l|}{2}} \frac{d^{|l|} P_k(t)}{dt^{|l|}}, \quad k = 0, 1, \dots$$

Далі розглянемо скалярний добуток

$$(v, w) = \sum_{s=1}^{n+1} \sum_{\rho=0}^{2n+1} \mu_{\rho} a_s v(\tilde{y}_{s\rho}) w(\tilde{y}_{s\rho}),$$

Помноживши рівняння (16) скалярно на базисні функції $Y_{k,l}^R$ і врахувавши подання невідомих густин (17), отримаємо послідовність систем лінійних рівнянь

$$\frac{1}{2\pi} \sum_{k=0}^n \sum_{l=-k}^k a_k^{N,l} R_{kk'}^{l'l'} = \sum_{s=1}^{n+1} \sum_{\rho=0}^{2n+1} \mu_\rho a_s \tilde{F}_N(\tilde{x}_{sp}) Y_{k',l'}^R(\tilde{x}_{s,\rho}), \quad (18)$$

$k' = 0, \dots, n, l' = -k, \dots, k, N = 0, 1, 2, \dots$, де

$$R_{kk'}^{l'l'} = \sum_{s=1}^{n+1} \sum_{\rho=0}^{2n+1} \sum_{s'=1}^{n+1} \sum_{\rho'=0}^{2n'+1} \tilde{\mu}_{\rho'} \mu_\rho a_s \left[\tilde{b}_s \hat{K}_1(\tilde{x}_{sp}, \tilde{y}_{sp}^{s'\rho'}) + \tilde{a}_s \hat{K}_2(\tilde{x}_{sp}, \tilde{y}_{sp}^{s'\rho'}) \right] Y_{k',l'}^R(\tilde{x}_{sp}) Y_{k,l}^R(\tilde{y}_{sp}^{s'\rho'}),$$

$$\hat{K}_1(\tilde{x}_{sp}, \tilde{y}_{sp}^{s'\rho'}) = \tilde{K}_1(\tilde{x}_{sp}, \tilde{y}_{sp}^{s'\rho'}) R(\tilde{x}_{sp}, \tilde{y}_{sp}^{s'\rho'}) J_q(\tilde{y}_{sp}^{s'\rho'}),$$

$$\hat{K}_2(\tilde{x}_{sp}, \tilde{y}_{sp}^{s'\rho'}) = \tilde{K}_2(\tilde{x}_{sp}, \tilde{y}_{sp}^{s'\rho'}) J_q(\tilde{y}_{sp}^{s'\rho'}),$$

$$\tilde{F}_N(\tilde{x}_{sp}) = f_N(\tilde{y}_{sp}^{s'\rho'}) - \frac{1}{2\pi} \sum_{m=0}^{N-1} \sum_{s'=1}^{n'+1} \sum_{\rho'=0}^{2n'+1} \hat{g}_N(\tilde{x}_{sp}, \tilde{y}_{sp}^{s'\rho'}) \tilde{\mu}_{\rho'} \left[\tilde{b}_s \hat{A}_{N-m}(\tilde{x}_{sp}, \tilde{y}_{sp}^{s'\rho'}) + \tilde{a}_s \hat{B}_{N-m}(\tilde{x}_{sp}, \tilde{y}_{sp}^{s'\rho'}) \right],$$

$$\hat{A}_{N-m}(\tilde{x}_{sp}, \tilde{y}_{sp}^{s'\rho'}) = A_{N-m}(\tilde{x}_{sp}, \tilde{y}_{sp}^{s'\rho'}) R(\tilde{x}_{sp}, \tilde{y}_{sp}^{s'\rho'}) J_q(\tilde{y}_{sp}^{s'\rho'}),$$

$$\hat{B}_{N-m}(\tilde{x}_{sp}, \tilde{y}_{sp}^{s'\rho'}) = B_{N-m}(\tilde{x}_{sp}, \tilde{y}_{sp}^{s'\rho'}) J_q(\tilde{y}_{sp}^{s'\rho'}).$$

6. ІМПЛЕМЕНТАЦІЯ МЕТОДУ

Обчислення коефіцієнтів $R_{kk'}^{l'l'}$ матриці системи (18) потребує великої кількості операцій. Розглянемо спосіб формування матриці через послідовне обчислення деяких матриць, що дасть змогу зменшити кількість обчислень.

Зауважимо, що дійсні сферичні та повернуті сферичні функції обчислюють за формулами (див., наприклад, [5])

$$Y_{k',l'}^R(\tilde{x}_{sp}) = \begin{cases} \sqrt{2c_k' P_k'^{|l'|}}(\cos \theta_s) \sin(|l'| \varphi_\rho), & 0 < l', \\ 1, & l' = 0, \\ \sqrt{2c_k' P_k'^{|l'|}}(\cos \theta_s) \cos(|l'| \varphi_\rho), & l' < 0, \end{cases}$$

$$Y_{k,l}^R(\tilde{y}_{sp}^{s'\rho'}) = \sum_{|j| \leq k} Y_{k,j}(\tilde{y}_{sp}^{s'\rho'}) e^{-ij\varphi_\rho} \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2i}} (F_{skj|l} e^{il\varphi_\rho} - (-1)^{|l|} F_{skj-|l|} e^{-il\varphi_\rho}), & l > 0, \\ F_{skj|l}, & l = 0, \\ \frac{1}{\sqrt{2i}} (F_{skj|l} e^{il\varphi_\rho} + (-1)^{|l|} F_{skj-|l|} e^{-il\varphi_\rho}), & l < 0, \end{cases}$$

де

$$F_{skjl} = e^{i(l-j)\pi/2} \sum_{|r| \leq k} d_{jr}^{(k)} \left(\frac{\pi}{2}\right) d_{lr}^{(k)} \left(\frac{\pi}{2}\right) e^{ir\theta_s},$$

$$d_{lr}^{(k)} \left(\frac{\pi}{2}\right) = 2^l \sqrt{\frac{(k+l)!(k-l)!}{(k+r)!(k-r)!}} P_{k+l}^{(r-l, -r-l)}(0),$$

$P_n^{(\alpha, \beta)}$ – нормалізований поліном Якобі.

Коефіцієнти матриці можна записати в такому вигляді:

$$R_{kk'}^{l'l'} = \sum_{s=1}^{n+1} a_s c_k^{l'} P_{k'}^{l'l'}(\cos \theta_s) \sum_{\rho=0}^{2n+1} \mu_\rho \begin{cases} \sqrt{2} c_k^{l'} P_{k'}^{l'l'}(\cos \theta_s) \sin(|l'| \varphi_\rho), & 0 < l' \\ 1, & l' = 0 \\ \sqrt{2} c_k^{l'} P_{k'}^{l'l'}(\cos \theta_s) \cos(|l'| \varphi_\rho), & l' < 0 \end{cases} \times$$

$$\times \sum_{|j| \leq k} e^{-ij\varphi_\rho} \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2i}} (F_{skj|l} e^{i|l|\varphi_\rho} - (-1)^{|l|} F_{skj-|l|} e^{-i|l|\varphi_\rho}), & l > 0 \\ F_{skj|l}, & l = 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2i}} (F_{skj|l} e^{i|l|\varphi_\rho} + (-1)^{|l|} F_{skj-|l|} e^{-i|l|\varphi_\rho}), & l < 0 \end{cases} \sum_{s'=1}^{n'+1} c_k^j P_k^{j|l}(\cos \theta_{s'}) \times$$

$$\left(\tilde{b}_{s'} \sum_{\rho'=0}^{2n'+1} \tilde{\mu}_{\rho'} \hat{K}_1(\tilde{x}_{sp}, \tilde{y}_{sp}^{s'\rho'}) e^{ij\varphi_{\rho'}} + \tilde{a}_{s'} \sum_{\rho'=0}^{2n'+1} \tilde{\mu}_{\rho'} \hat{K}_1(\tilde{x}_{sp}, \tilde{y}_{sp}^{s'\rho'}) e^{ij\varphi_{\rho'}} \right),$$

й обчислення виконують через послідовне обчислення таких матриць:

$$E_{sps'j}^{\tilde{k}} = \sum_{\rho'=0}^{2n'+1} \tilde{\mu}_{\rho'} \hat{K}_{\tilde{k}}(\tilde{x}_{sp}, \tilde{y}_{sp}^{s'\rho'}) e^{ij\varphi_{\rho'}}, \quad \tilde{k} = 1, 2,$$

$$D_{spkj} = \sum_{s'=1}^{n'+1} c_k^j P_k^{j|l}(\cos \theta_{s'}) (\tilde{b}_{s'} E_{sps'j}^1 + \tilde{a}_{s'} E_{sps'j}^2),$$

$$C_{spkl} = \sum_{|j| \leq k} e^{-ij\varphi_\rho} D_{spkj} \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2i}} (F_{skj|l} e^{i|l|\varphi_\rho} - (-1)^{|l|} F_{skj-|l|} e^{-i|l|\varphi_\rho}), & l > 0 \\ F_{skj|l}, & l = 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2i}} (F_{skj|l} e^{i|l|\varphi_\rho} + (-1)^{|l|} F_{skj-|l|} e^{-i|l|\varphi_\rho}), & l < 0 \end{cases},$$

$$B_{sl'kl} = \sum_{\rho=0}^{2n+1} \mu_\rho C_{spkl} \begin{cases} \sqrt{2} c_k^{l'} P_{k'}^{l'l'}(\cos \theta_s) \sin(|l'| \varphi_\rho), & 0 < l' \\ 1, & l' = 0 \\ \sqrt{2} c_k^{l'} P_{k'}^{l'l'}(\cos \theta_s) \cos(|l'| \varphi_\rho), & l' < 0 \end{cases},$$

$$A_{k'l'kl} = \sum_{s=1}^{n+1} a_s B_{sl'kl} c_k^{l'} P_{k'}^{l'l'}(\cos \theta_s).$$

7. ЧИСЕЛЬНІ ЕКСПЕРЕМЕНТИ

Приклад 1. Нехай границя області Γ – еліпсоїд (див. рис. 1)

$$\Gamma = \{x(\theta, \varphi) = (\sin \theta \cos \varphi, 0.5 \sin \theta \sin \varphi, 0.75 \cos \theta), \quad 0 \leq \theta \leq \pi, 0 \leq \varphi \leq 2\pi\}.$$

Спершу протестуємо запропонований метод розв'язування послідовності стаціонарних задач. Для цього виберемо граничні функції як звуження фундаментальних розв'язків еліптичних рівнянь послідовності (5) на границю

$$f_N(x) = \Phi_N(x, y^*), \quad x \in \Gamma, \quad y^* = (0, 0, 0) \notin D.$$

Результати обчислень в точці $x = (0, 3, 1.8)$ при $c = 1, k = 1$ подані в табл. 1.

Таблиця 1

Абсолютні похибки розв’язку системи стаціонарних задач

	$N = 0$	$N = 5$	$N = 10$
$n = 4$	4.4577e-006	6.5935e-007	3.9836e-007
$n = 8$	3.0786e-008	5.1536e-009	2.2737e-009
$n = 16$	2.4270e-012	4.0194e-013	1.7046e-013
$n = 24$	2.6671e-016	7.0811e-017	1.9203e-017

Прийmemo граничну функцію як звуження фундаментального розв’язку рівняння теплопровідності

$$f(x, t) = \frac{1}{\sqrt{(4\pi ct)^3}} \exp\left(\frac{-|x - y^*|^2}{4ct}\right), \quad x \in \Gamma, \quad y^* = (0, 0, 0) \notin D.$$

Результати обчислень в точці $x = (0.1, 0.2, 1)$ у різні моменти часу подані в табл. 2.

Таблиця 2

Абсолютні похибки розв’язку нестаціонарної задачі

t	n	$N = 10$	$N = 20$	$N = 40$
0.2	8	2.1957e-002	8.7304e-003	2.5347e-003
	16	2.1953e-002	8.7315e-003	2.5316e-003
0.6	8	9.0483e-003	2.7328e-003	1.1313e-003
	16	9.0477e-003	2.7325e-003	1.1308e-003
1	8	3.8550e-003	5.1043e-003	6.9577e-004
	16	3.8545e-003	5.1042e-003	6.9601e-004
1.5	8	6.0473e-003	3.1748e-003	4.8202e-004
	16	6.0468e-003	3.1749e-003	4.8270e-004

Приклад 2. Нехай границя області задана так (див. рис. 1):

$$\Gamma = \{x(\theta, \varphi) = 0.8\sqrt{0.8 + 0.5(\cos 2\varphi - 1)(\cos 4\theta - 1)}p(\theta, \varphi), \quad 0 \leq \theta \leq \pi, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi\}.$$

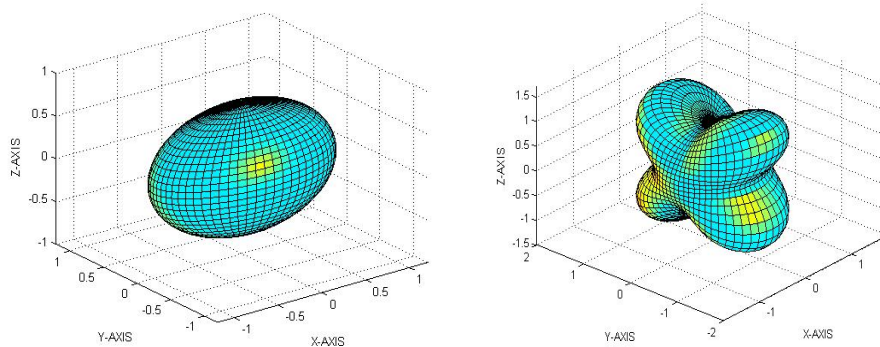


Рис. 1. Границі областей для прикладів 1 та 2, відповідно

Виберемо граничну умову $f(x,t) = 4t^2 e^{-4t+2}$, параметри $c=1$ та $k=1$. Результати обчислень нестационарної задачі при $n=16$ і різних значеннях t подані в табл. 3 і на рис. 2.

Таблиця 3

Чисельні результати розв'язування нестационарної задачі

t	$x = (0.5, 1.5, 2.1)$		$x = (1, -0.3, 1.8)$	
	$N = 20$	$N = 30$	$N = 20$	$N = 30$
0.2	0.0018	0.0039	0.0103	0.0112
0.6	0.0987	0.0973	0.1898	0.1896
1	0.1529	0.1554	0.2547	0.2565
1.4	0.1418	0.1407	0.2031	0.2014
1.8	0.1054	0.1028	0.1283	0.1269
2.2	0.0729	0.0741	0.0788	0.0827
2.6	0.0532	0.0568	0.0567	0.0602

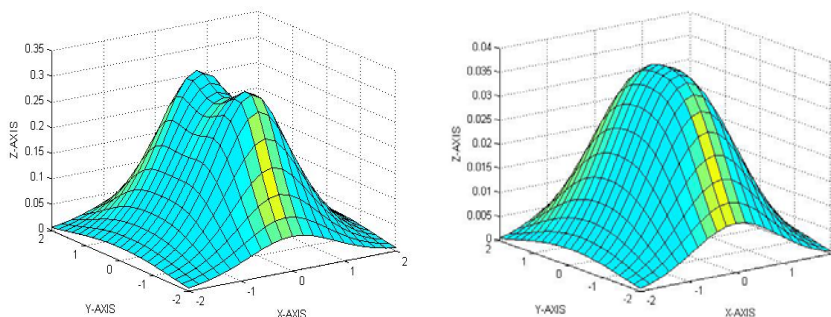


Рис. 2. Наближені розв'язки при $t = 0.5$, $z = 1.8$ та $z = 2.7$ для прикладу 2

8. ВИСНОВКИ

Запропоновано чисельний метод для початково-крайової задачі для рівняння теплопровідності в необмеженій тривимірній області. Використавши для часткової дискретизації за часом інтегральне перетворення Лагерра, задачу зведено до розв'язування послідовності стаціонарних задач для еліптичних рівнянь. За допомогою методу потенціалів еліптичні задачі редуковано до послідовності коректних граничних інтегральних рівнянь першого роду. Після перетворення отриманих інтегральних рівнянь від границі області до поверхні одиничної сфери, застосування відповідних квадратур для обчислення подвійних інтегралів і використання методу Гальоркіна для повної дискретизації, було отримано чисельні розв'язки послідовності стаціонарних задач, які за оберненим перетворенням Фур'є-Лагерра визначають розв'язок вихідної нестационарної задачі. Наведені приклади чисельних експериментів підтверджують застосовність і ефективність запропонованого методу.

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. *Процюк О.Б.* Чисельне розв'язування просторової задачі стаціонарної теплопровідності у півпросторі з шаром за допомогою функцій Гріна / О.Б. Процюк, Р.С. Хапко // *Мат. методи та фіз.-мех. поля.* – 2011. – 54 – С. 188–198.
2. *Фридман А.* Уравнения с частными производными параболического типа / А. Фридман. – М.: Мир, 1968.
3. *Chapko R.* On the numerical solution of initial boundary value problems by the Laguerre transformation and boundary integral equations / R. Chapko, R. Kress // *Integral and Integrodifferential Equations: Theory, Methods and Applications. Series in Mathematical Analysis and Applications.* – 2000. – Vol. 2. – P. 55–69.
4. *Chapko R.* On the numerical solution of the Dirichlet initial boundary-value problem for the heat equation in the case of a torus / R. Chapko // *Journal of Engineering Mathematics.* – 2002. – 43. – P. 45–87.
5. *Ganesh M.* A high-order algorithm for obstacle scattering in three dimensions / M. Ganesh, I.G. Graham // *J. Comput. Phys.* – 2004. – 198. – P. 211–242.
6. *Graham I.G.* Fully discrete spectral boundary integral methods for Helmholtz problems on smooth closed surfaces in \mathbb{R}^3 / I.G. Graham, I.H. Sloan // *Numer. Math.* – 2002. – 92. – P. 289–323.
7. *Kress R.* Linear integral equations / R. Kress. – New York, Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag. – 1999. – 365 p.
8. *Wienert L.* Die numerische Approximation von Randintegraloperatoren für die Helmholtzgleichung im \mathbb{R}^3 / L. Wienert // PhD thesis, University of Göttingen. – 1990.

Стаття: надійшла до редколегії 19.09.2012

доопрацьована 25.10.2012

прийнята до друку 14.11.2012

О ЧИСЛЕННОМ РЕШЕНИИ ЗАДАЧ НЕСТАЦИОНАРНОЙ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ В ТРЕХМЕРНЫХ НЕОГРАНИЧЕННЫХ ОБЛАСТЯХ

Н. Стосик, Р. Хапко

*Львовский национальный университет имени Ивана Франко,
ул. Университетская, 1, Львов, 79000, e-mail: chapko@franko.lviv.ua*

Для приближенного решения первой начально-краевой задачи для параболического уравнения в неограниченных трехмерных областях предложено сочетание преобразования Лагерра по временной переменной и метод граничных интегральных уравнений. В результате задача редуцируется к последовательности интегральных уравнений по границе области, для численного решения которой применен дискретный проекционный метод со сферическими функциями. Приведены примеры численных экспериментов.

Ключевые слова: нестационарная теплопроводность, преобразование Лагерра, метод интегральных уравнений, квадратурные формулы, проекционный метод.

ON THE NUMERICAL SOLUTION NON-STATIONARY PROBLEMS OF HEAT CONDUCTION IN THREE-DIMENSION UNBOUNDED DOMAINS**N. Stosyk, R. Chapko**

*Ivan Franko National University of Lviv,
Universytetska str, 1, Lviv, 79000, e-mail: chapko@franko.lviv.ua*

The combination of Laguerre transformation with respect to time variable and the boundary-integral equation method is proposed for the numerical solution of the first initial-boundary value problem for parabolic equation in unbounded three-dimension domains. As a result, the problem is reduced to a sequence of integral equations on the boundary domain. For its numerical solution the discrete projection method with spherical functions is applied. The examples of numerical experiments are presented.

Key words: non-stationary heat conduction, Laguerre transformation, integral equation method, quadrature rules, projection method.