ISSN 2078–5097. Вісн. Львів. ун-ту. Сер. прикл. матем. та інф. 2013. Вип. 19. С. 21–27
Visnyk of the Lviv University. Series Appl. Math. and Informatics. Issue 19. P. 21–27

УДК 539.3

ДОСЛІДЖЕННЯ ЕФЕКТИВНОСТІ ЗАСТОСУВАННЯ ВАРІАНТІВ МЕТОДУ ПОСЛІДОВНИХ НАБЛИЖЕНЬ НА ПРИКЛАДІ СТАЦІОНАРНОЇ ЗАДАЧІ ТЕПЛОПРОВІДНОСТІ ДЛЯ ПОРОЖНИСТОЇ КУЛІ

В. Попович, О. Вовк

*Інститут прикладних проблем механіки і математики
ім. Я.С. Підстригача НАН України,
вул. Наукова, 3б, Львів, 79060, e-mail: dept19@iapmm.lviv.ua*

На прикладі стаціонарної задачі теплопровідності для термочутливої порожнистої кулі за конвективно-променевого теплообміну з довкіллям апробовано два варіанти методу послідовних наближень стосовно розв'язування нелінійних задач теплопровідності.

Ключові слова: нелінійна задача теплопровідності, термочутливі тіла, конвективно-променевий теплообмін, метод послідовних наближень, порожниста куля.

1. ВСТУП

Вимоги до забезпечення надійного функціонування приладів та елементів конструкцій, які перебувають в умовах високих чи низьких температур, а також їхніх перепадів, є визначальними в багатьох галузях економіки, зокрема, в авіаційній, космічній, будівельній, тепловій, атомній енергетиці та ін. Основою визначення міцності елементів конструкцій є дослідження їхніх температурних полів та зумовленого ними напружено-деформованого стану. Сучасні вимоги інженерної практики зумовили проведення таких досліджень на підставі математичних моделей, які враховують залежність термомеханічних характеристик матеріалів від температури та конвективно-променеву складову процесу теплообміну. Такі моделі є нелінійними крайовими задачами математичної фізики. Огляд сучасних вітчизняних і зарубіжних наукових публікацій у галузі термомеханіки свідчить про зацікавленість науковців методами розв'язування таких задач. Наприклад, праці [4-6] присвячені дослідженню теплових чи термопружних станів тіл, характеристики матеріалів яких залежні від температури, а у [7, 8] враховано променеву складову процесу теплообміну. Зауважимо, що переважно для розв'язування описаного класу задач використовують чисельні методи. Водночас особливий інтерес становлять аналітичні та аналітично-чисельні підходи, застосування одного з яких пропонуємо у цьому дослідженні. Цей підхід ґрунтується на використанні варіантів методу послідовних наближень, суть яких полягає у зведенні вихідної нелінійної задачі до ітераційного процесу, на кожному кроці якого розв'язується лінійна задача. Наша праця – продовження досліджень, які присвячені апробації варіантів методу послідовних наближень стосовно розв'язування нелінійних задач теплопровідності для термочутливих тіл, що обмінюються теплом шляхом конвективно-променевого теплообміну з навколишніми середовищами. У попередніх дослідженнях цю апробацію провели на прикладах стаціонарних задач теплопровідності для термочутливих нескінченних порожнистого циліндра та шару, що перебувають в умовах складного теплообміну з довкіллям [1, 3]. З використанням двох варіантів методу послідовних наближень побудовано розв'язки стаціонарної задачі теплопровідності для термочутливої порожнистої кулі, через поверхню якої відбувається конвективно-променевий теплообмін з середовищами різних сталих температур, проведено порівняння з побудованим точним розв'язком за різних комбінацій критеріїв Біо та Старка на поверхнях кулі.

2. ФОРМУЛЮВАННЯ ЗАДАЧІ

Розглянемо задачу про визначення стаціонарного температурного поля t порожнистої кулі, товщина стінки якої l, термомеханічні характеристики її матеріалу є функціями температури. Через поверхні $r = r_1$ і $r = r_2$ куля обмінюється теплом із зовнішніми середовищами сталих температур t_{c1} і t_{c2} шляхом конвективно-променевого теплообміну.

Зумовлене такими діями стаціонарне температурне поле шару визначаємо з рівняння теплопровідності [2]

$$\frac{d}{dr}\left(r^2\lambda_t(t)\frac{dt}{dr}\right)=0, \tag{1}$$

за крайових умов

$$\left[\lambda_t(t)\frac{d\,t}{d\,r}+(-1)^j\left(n_j^{(1)}\alpha_j(t)\left(t-t_{cj}\right)+n_j^{(2)}\sigma\varepsilon_j(t)\left(t^4-t_{cj}^4\right)\right)\right]_{r=r_j}=0\ \ (j=1,2), \tag{2}$$

де $\lambda_t(t)$ – залежний від температури коефіцієнт теплопровідності матеріалу шару; $\alpha_j(t)$, $\varepsilon_j(t)$ – відповідно залежні від температури коефіцієнти теплообміну через поверхні $r = r_j$ та ступені чорноти цих поверхонь; σ – постійна Стефана-Больцмана, $n_j^{(i)}$ $(i = 1,2)$ можуть набувати значень $\{0;1\}$. Зрозуміло, що відповідним вибором значень $n_j^{(i)}$ отримаємо різні варіанти умов теплообміну на обмежувальних поверхнях. Подальше викладення стосуватиметься варіанта $n_j^{(i)} = 1$.

3. ПОБУДОВА НАБЛИЖЕНИХ РОЗВ'ЯЗКІВ

Виберемо за відлікову температуру деяке її значення t_0, а за характерний розмір – товщину стінки кулі l, введемо безрозмірні температуру $T = t/t_0$, координату $\rho = r/l$ і подамо характеристики матеріалу кулі, коефіцієнти теплообміну та ступені чорноти поверхонь у вигляді $\chi(t)=\chi_0\chi^*(T)$, де величини з нуликом мають відповідні розмірності, а співмножники з зірочкою описують залежність відповідної характеристики від безрозмірної температури. Тоді задача (1)–(2) набуде вигляду

$$\frac{d}{d\rho}\left(\rho^2\lambda_t^*(T)\frac{dT}{d\rho}\right)=0, \tag{3}$$

$$\left[\lambda_t^*(T)\frac{dT}{d\rho}+(-1)^j\left(Bi_j\alpha_j^*(T)\left(T-T_{cj}\right)+Sk_j\varepsilon_j^*(T)\left(T^4-T_{cj}^4\right)\right)\right]_{\rho=\rho_j}=0,\ j=1,2. \tag{4}$$

Тут $T_{cj} = t_{cj}/t_0$, $Bi_j = \alpha_{0j}l/\lambda_{t0}$, $Sk_j = \sigma\varepsilon_{0j}t_0^3/\lambda_{t0}$.

До нелінійної задачі (3), (4) застосуємо перетворення Кірхгофа

$$\theta=\int_{T_p}^{T}\lambda_t^*(T)\,dT, \tag{5}$$

де $T_p = t_p / t_0$, t_p – нижнє значення діапазону температур, в якому задаються залежності теплових характеристик матеріалу кулі.

У підсумку отримаємо таку крайову задачу на змінну θ:

$$\frac{d^2(\rho\theta)}{d\rho^2} = 0, \tag{6}$$

$$\left[\frac{d\theta}{d\rho} + (-1)^j \left(Bi_j \alpha_j^*\left(T(\theta)\right)\left(T(\theta) - T_{cj}\right) + Sk_j \varepsilon_j^*\left(T(\theta)\right)\left(T^4(\theta) - T_{cj}^4\right)\right)\right]_{\rho=\rho_j} = 0 \tag{7}$$

$(j = 1, 2)$.

Тут $T(\theta)$ – вираз безрозмірної температури через змінну Кірхгофа θ, який для конкретної залежності коефіцієнта теплопровідності від температури знаходимо з рівняння (5).

Для знаходження розв'язку крайової задачі на змінну θ (6), (7) застосуємо метод послідовних наближень. За m-е ($m = 1, 2, \ldots$) наближення розв'язку задачі приймемо аналітичний розв'язок такої лінійної задачі:

$$\frac{d^2(\rho\theta_m)}{d\rho^2} = 0, \tag{8}$$

$$\left[\frac{d\theta_m}{d\rho} + (-1)^j Bi_{jm-1}\left(\theta_m - \theta_{cj}\right)\right]_{\rho=\rho_j} = 0 \ \ (j = 1, 2), \tag{9}$$

де

$$\theta_{cj} = \int_{T_p}^{T_{cj}} \lambda_t^*(T)\,dT, \ Bi_{j0} = Bi_j, \ Bi_{jm-1} = \left[\theta_{m-1}(\rho_j) - \theta_{cj}\right]^{-1} \left\{Bi_j \alpha_j^*\left(T(\theta_{m-1})\right) \times\right.$$

$$\left.\times \left[T\left(\theta_{m-1}(\rho_j)\right) - T_{cj}\right] + Sk_j \varepsilon_j^*\left(T(\theta_{m-1})\right) \times \left[T^4\left(\theta_{m-1}(\rho_j)\right) - T_{cj}^4\right]\right\}, \ m \ge 2. \tag{10}$$

Поряд з цим розглянемо дещо інший варіант методу послідовних наближень, який передбачає розв'язання рівняння (8) з певними граничними умовами. Для їхнього формулювання перепишемо граничні умови (7) так:

$$\left[\frac{d\theta}{d\rho} + (-1)^j Bi_j^*\left(T(\theta) - T_{cj}\right)\right]_{\rho=\rho_j} = 0, \tag{11}$$

де

$$Bi_j^* = Bi_j \alpha_j^*\left(T(\theta)\right) + Sk_j \varepsilon_j^*\left(T(\theta)\right)\left(T^2(\theta) + T_{cj}^2\right)\left(T(\theta) + T_{cj}\right). \tag{12}$$

Для конкретизації подальшого викладення розглянемо, наприклад, найбільш поширену лінійну залежність коефіцієнта теплопровідності від температури, коли $\lambda_t^*(T) = 1 + \lambda_1\left(T - T_p\right)$, де λ_1 – задана стала. Тоді на підставі (5) температура через змінну Кірхгофа виражається формулою

$$T(\theta) = \lambda_1^{-1}\left(\sqrt{1 + 2\lambda_1\theta} - 1\right) + T_p, \tag{13}$$

яка після розвинення кореня квадратного в ряд набуває вигляду

$$T(\theta) = \theta\left(1 - \frac{1}{2}\lambda_1\theta + \frac{1}{2}\lambda_1^2\theta^2 - \frac{5}{8}\lambda_1^3\theta^3 + \ldots\right) + T_p. \tag{14}$$

З огляду на вирази (12), (14) пропонуємо у другому варіанті методу послідовних наближень скористатися граничними умовами (9), в яких

$$Bi_{jm-1} = \kappa_{m-1} Bi^*_{jm-1}\,,\;\; \theta_{cj} = \left(T_{cj} - T_p\right) \big/ \kappa_{m-1}\,, \tag{15}$$

де $\kappa_{m-1} = 1 - \dfrac{1}{2}\left(\lambda_1 \theta_{m-1} - \lambda_1{}^2 \theta^2_{m-1} + \dfrac{5}{4}\lambda_1{}^3 \theta^3_{m-1} + \ldots\right)$, $Bi^*_{jm-1} = Bi^*_j\big|_{\theta=\theta_{m-1}}$, $Bi^*_{j0} = Bi_j$, $j = 1,2$, $(m \ge 2)$.

Зауважимо, що обчислення κ_{m-1} можна проводити з довільною точністю, використовуючи для цього відповідну кількість членів розвинення.

Розв'язок рівняння (8) виглядає так:

$$\theta_m = -\frac{C_1}{\rho} + C_2\,, \tag{16}$$

де C_1, C_2 – сталі інтегрування, які знаходимо з умов (9). У підсумку отримаємо

$$C_1 = Bi_{1m-1} Bi_{2m-1} \rho_1^2 \rho_2^2 \left(\theta_{c2} - \theta_{c1}\right) \big/ \Delta\,,$$

$$C_2 = Bi_{2m-1} \rho_2^2 \left(\theta_{c2} - \theta_{c1}\right)\left(1 + Bi_{1m-1}\rho_1\right) \big/ \Delta + \theta_{c1}\,,$$

$$\Delta = (1 - Bi_{2m-1}\rho_2) Bi_{1m-1} \rho_1^2 + (1 + Bi_{1m-1}\rho_1) Bi_{2m-1} \rho_2^2\,.$$

Тут Bi_{jm-1} та θ_{cj} визначають формулами (10) або (15), відповідно.

4. ПОБУДОВА ТОЧНОГО РОЗВ'ЯЗКУ

Щоб з'ясувати, який із розглянутих вище варіантів методу послідовних наближень ефективніший, знайдемо точний розв'язок задачі (6), (7) і порівняємо його зі згаданими. Розв'язок рівняння (6), який подано формулою (16), та температуру, яка виражається через змінну Кірхгофа формулою (13), підставимо у крайові умови (7). У підсумку отримаємо систему нелінійних рівнянь для визначення невідомих сталих інтегрування C_1, C_2 у вигляді

$$\begin{cases} \dfrac{C_1}{\rho_1^2} - Bi_1\left[\lambda_1^{-1}\left(\sqrt{1 + 2\lambda_1(-\dfrac{C_1}{\rho_1} + C_2)} - 1\right) + T_p - T_{c1}\right] - \\ \qquad - Sk_1\left[\left(\lambda_1^{-1}\left(\sqrt{1 + 2\lambda_1(-\dfrac{C_1}{\rho_1} + C_2)} - 1\right) + T_p\right)^4 - T_{c1}^4\right] = 0; \\ \\ \dfrac{C_1}{\rho_2^2} + Bi_2\left[\lambda_1^{-1}\left(\sqrt{1 + 2\lambda_1(-\dfrac{C_1}{\rho_2} + C_2)} - 1\right) + T_p - T_{c2}\right] + \\ \qquad + Sk_2\left[\left(\lambda_1^{-1}\left(\sqrt{1 + 2\lambda_1(-\dfrac{C_1}{\rho_2} + C_2)} - 1\right) + T_p\right)^4 - T_{c2}^4\right] = 0. \end{cases}$$

Отриману нелінійну систему алгебричних рівнянь розв'язано чисельно методом Ньютона. Основна трудність розв'язування систем нелінійних алгебричних рівнянь чисельними методами полягає у виборі початкового наближення. У нашому випадку за початкове наближення для сталих C_1, C_2 вибирали їхнє значення, отримане з розв'язку стаціонарної задачі теплопровідності для нетермочутливої кулі за конвективного теплообміну з довкіллям, яке в цьому випадку набуло вигляду

$$C_1^0 = Bi_1 Bi_2 \rho_1^2 \rho_2^2 \left(T_{c2} - T_{c1}\right) / \tilde{\Delta},$$
$$C_2^0 = Bi_2 \rho_2^2 \left(T_{c2} - T_{c1}\right)\left(1 + Bi_1 \rho_1\right) / \tilde{\Delta} + T_{c1},$$
$$\tilde{\Delta} = (1 - Bi_2 \rho_2) Bi_1 \rho_1^2 + (1 + Bi_1 \rho_1) Bi_2 \rho_2^2 .$$

5. ЧИСЛОВИЙ АНАЛІЗ

Щоб перевірити достовірність отриманих результатів, провели порівняння значень температури за товщиною термочутливої кулі, які обчислили на підставі аналітично-числових розв'язків, знайдених запропонованими варіантами методу послідовних наближень, зі значеннями температури, знайденими на підставі точного розв'язку, коли через поверхню $\rho = \rho_1$ відбувається конвективний теплообмін з середовищем, температура якого $373\,K$, а через поверхню $\rho = 1$ відбувається складний теплообмін з середовищем сталої температури, яка дорівнює $873\,K$ за різних значень критеріїв Біо та Старка. Результати обчислень у безрозмірних величинах подано в табл. 1, 2, де T_{exact} – значення температури, знайдені на підставі точного розв'язку, а T_{m10}, T_{m15} – значення температури, знайдені з використанням m-го наближення, в якому Bi_{jm-1} визначаються виразами (10) або (15), відповідно.

Таблиця 1

ρ	$\mathrm{Bi}_1 = 0.1,\ \mathrm{Sk}_1 = 0.$ $\mathrm{Bi}_2 = 0.1,\ \mathrm{Sk}_2 = 0.$			$\mathrm{Bi}_1 = 10.,\ \mathrm{Sk}_1 = 0.$ $\mathrm{Bi}_2 = 0.2,\ \mathrm{Sk}_2 = 0.1$		
	T_{exact}	T_{m10}	T_{m15}	T_{exact}	T_{m10}	T_{m15}
0.1	0.9868	0.9873	0.9914	0.6765	0.6762	0.6836
0.2	0.9902	0.9912	0.9948	0.8260	0.8257	0.8277
0.3	0.9913	0.9925	0.9959	0.8791	0.8789	0.8788
0.4	0.9918	0.9932	0.9965	0.9064	0.9062	0.9050
0.5	0.9921	0.9936	0.9968	0.9230	0.9228	0.9209
0.6	0.9924	0.9939	0.9970	0.9342	0.9339	0.9317
0.7	0.9926	0.9941	0.9972	0.9422	0.9420	0.9394
0.8	0.9927	0.9942	0.9973	0.9483	0.9480	0.9452
0.9	0.9928	0.9943	0.9974	0.9530	0.9528	0.9497
1.0	0.9929	0.9944	0.9975	0.9568	0.9566	0.9543

Максимальна відносна похибка у першому варіанті методу послідовних наближень не перевищувала 0.02 %, у другому варіанті – 2 %, яку досягали на поверхні кулі, де значення температури – найвищі.

Кількість ітерацій для кожного з запропонованих варіантів методу послідовних наближень не перевищувала 5-6 ітерацій. Зазначимо, що обчислення проводили з заданою точністю $\varepsilon = 0.0001$. У другому варіанті методу послідовних наближень використали чотири члени розвинення в ряд квадратного кореня і збільшення їхньої кількості приводило до збільшення кількості ітерацій, але не поліпшувало точності розрахунків. Крім того, у цьому варіанті, на відміну від першого, накладається обмеження на залежність коефіцієнта теплопровідності матеріалу від температури, яка повинна бути лінійною.

Таблиця 2

ρ	$\mathrm{Bi}_1 = 100.,\ \mathrm{Sk}_1 = 0.$ $\mathrm{Bi}_2 = 0.5,\ \mathrm{Sk}_2 = 0.$			$\mathrm{Bi}_1 = 100.,\ \mathrm{Sk}_1 = 0.$ $\mathrm{Bi}_2 = 0.5,\ \mathrm{Sk}_2 = 0.2$		
	T_{exact}	T_{m10}	T_{m15}	T_{exact}	T_{m10}	T_{m15}
0.1	0.4698	0.4696	0.4694	0.4733	0.4735	0.4736
0.2	0.7024	0.7022	0.6974	0.7275	0.7276	0.7258
0.3	0.7874	0.7872	0.7806	0.8214	0.8215	0.8189
0.4	0.8317	0.8315	0.8238	0.8705	0.8706	0.8676
0.5	0.8589	0.8587	0.8504	0.9008	0.9008	0.8976
0.6	0.8773	0.8770	0.8683	0.9213	0.9213	0.9179
0.7	0.8905	0.8903	0.8813	0.9361	0.9361	0.9326
0.8	0.9006	0.9003	0.8911	0.9473	0.9473	0.9437
0.9	0.9084	0.9082	0.8987	0.9561	0.9561	0.9524
1.0	0.9147	0.9145	0.9049	0.9632	0.9632	0.9594

6. ВИСНОВКИ

Аналіз отриманих числових результатів, поданих у табл. 1, 2, виявив ліпшу точність першого варіанта методу послідовних наближень порівняно з другим за всією товщиною кулі і для всіх комбінацій критеріїв Біо та Старка, розглянутих у праці. Тому можемо зробити висновок щодо надання переваги цьому варіанту методу послідовних наближень під час розв'язування нелінійних задач теплопровідності для тіл зі сферичними границями.

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. *Вовк О.М.* Дослідження ефективності застосування варіантів методу послідовних наближень на прикладі стаціонарної задачі теплопровідності для нескінченного шару / О.М. Вовк // Матер. 10 Відкритої наук. конф. ІМФН. – НУ "Львівська політехніка". – 2012. – С. В10–В11.
2. *Кушнір Р.М.* Термопружність термочутливих тіл / Р.М. Кушнір, В.С. Попович. – Львів: Сполом, 2009. – 410 с. – (Моделювання та оптимізація в термомеханіці електропровідних неоднорідних тіл / За заг. ред. Я.Й. Бурака, Р.М. Кушніра: В 5 т. – Т. 3).
3. *Попович В. С.* Дослідження статичного термопружного стану термочутливого порожнистого циліндра за конвективно-променевого теплообміну з довкіллям / В.С. Попович, О.М. Вовк, Г.Ю. Гарматій // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2011. – **54**, № 4. – С. 151–158.
4. *Abouelregala Ahmed E.* Fractional Order Generalized Thermo-Piezoelectric Semi-Infinite Medium with Temperature-Dependent Properties Subjected to a Ramp-Type Heating / A.E. Abouelregala // Journal of Thermal Stresses. – Vol. 34, Issue 11. – 2011. – P. 1139–1155.
5. *Hedayati F.* An Analytical Study on a Model Describing Heat Conduction in Rectangular Radial Fin with Temperature-Dependent Thermal Conductivity International / F. Hedayati, D.D. Ganji, S.M. Hamidi, A. Malvandi // Journal of Thermophysics. – Vol. 33, Number 6. – 2012. – P 1042-1054. – DOI: 10.1007/s10765-012-1222-0.

6. *Kanoriaa M.* Study of Dynamic Response in a Functionally Graded Spherically Isotropic Hollow Sphere with Temperature Dependent Elastic Parameters / M. Kanoriaa & M.K. Ghoshb // Journal of Thermal Stresses. – Vol. 33, Issue 5. – 2010. – P. 459–484.
7. *Philipona R.* Solar and thermal radiation profiles and radiative forcing measured through the atmosphere / R. Philipona, A. Kräuchi, E. Brocard // Geophysical Research Letters. – Vol. 39, L13806, 6 PP. – 2012. – DOI:10.1029/2012GL052087.
8. *Seung-Hwan Yu* Effect of radiation in aradial heat sink under natural convection / Yu Seung-Hwan, Jang Daeseok, Lee Kwan-Soo // International Journal of Heat and Mass Transfer. – Vol. 55, Issues 1-3. – 2012. – P. 505–509.

Стаття: надійшла до редколегії 19.10.2012
доопрацьована 21.11.2012
прийнята до друку 05.12.2012

ИССЛЕДОВАНИЕ ЭФФЕКТИВНОСТИ ПРИМЕНЕНИЯ ВАРИАНТОВ МЕТОДА ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫХ ПРИБЛИЖЕНИЙ НА ПРИМЕРЕ СТАЦИОНАРНОЙ ЗАДАЧИ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ ДЛЯ ПОЛОГО ШАРА

В. Попович, О. Вовк

Институт прикладных проблем механики и математики
им. Я.С.Подстригача НАН Украины
ул. Научная 3б, Львов, 79060, e-mail: dept19@iapmm.lviv.ua

На примере стационарной задачи теплопроводности для термочувствительного полого шара при конвективно-лучистом теплообмене со средой апробировано два варианта метода последовательных приближений относительно решения нелинейных задач теплопроводности.

Ключевые слова: нелинейная задача теплопроводности, термочувствительные тела, конвективно-лучистый теплообмен, метод последовательных приближений, полый шар.

INVESTIGATION EFECTIVE VARIANTS OF THE METHOD OF SUCCESSIVE APPROXIMATIONS ON EXAMPLES OF STATIONARY HEAT CONDUCTION PROBLEM FOR A HOLLOW SPHERE

V. Popovych, O. Vovk

The Pidstryhach Institute for Applied Problems of Mechanics and Mathematics of NASU,
Naukova Str., 3b, Lviv, 79060, e-mail: dept19@iapmm.lviv.ua

On the example of the stationary heat conduction problem for a thermosensitive hollow sphere under convective radial heat exchange with the environment, two versions of the method of successive approximations with respect to the solution of nonlinear heat conduction problems are tested.

Key words: nonlinear heat conduction problem, thermosensitive bodies, convective radial heat transfer, the method of successive approximations, a hollow sphere.