ISSN 2078–5097. Вісн. Львів. ун-ту. Сер. прикл. матем. та інф. 2013. Вип. 19. С. 10–20
Visnyk of the Lviv University. Series Appl. Math. and Informatics. Issue 19. P. 10–20

УДК 519.6

МАТЕМАТИЧНІ АСПЕКТИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧІ ПРО ДЕФОРМУВАННЯ ПРУЖНО ЗАКРІПЛЕНОЇ ПЛАСТИНИ МЕТОДОМ КАНТОРОВИЧА

М. Жук[1], Адріана Кіндибалюк[2], Н. Щербина[3]

[1]*Львівський національний університет імені Івана Франка,*
вул. Університетська, 1, Львів, 79000
[2]*Київський національний університет будівництва та архітектури,*
Повітрофлотський проспект, 31, Київ, 03037
[3]*Інститут прикладних проблем механіки і математики*
ім. Я.С. Підстригача НАН України, вул. Наукова, 3б, Львів, 79601

Досліджено математичні аспекти застосовності методу Канторовича до розв'язування двовимірної крайової задачі про деформування пружно закріпленої пластини за дії статичного трансверсального навантаження. Математична модель ґрунтується на теорії пластин Кірхгофа–Лява. З використанням методу Канторовича вихідну задачу зведено до розв'язування відповідної системи звичайних диференціальних рівнянь. Доведено існування та єдиність узагальненого розв'язку методу Канторовича та його збіжність.

Ключові слова: двовимірна крайова задача, пружно закріплена пластина, метод Канторовича, узагальнений розв'язок, збіжність.

1. ВСТУП

Залежно від особливості й складності математичних моделей досліджуваних задач теорії пластин для їхньої реалізації застосовують різні методи, головна вимога до яких – здатність гарантувати необхідну надійність результатів [1-5, 7-12]. Точні аналітичні методи забезпечують надійність результатів. Однак аналітичні методи не універсальні, складно надаються алгоритмізації й не завжди вдається з їхнім використанням побудувати аналітичний розв'язок. Наближені аналітичні методи розв'язування крайових задач потребують теоретичного обґрунтування результатів, оцінки їхньої похибки. З огляду на універсальність найчастіше для розв'язування крайових задач теорії пластин застосовують скінченноелементні та різницеві підходи. Позаяк розв'язок вихідної задачі числовим методом отримують з деякою похибкою, то питання щодо достовірності результатів виникає і в разі застосування числових методів (сіткових [1, 2, 12] і безсіткових [15]), які особливо поширені останнім часом в обчислювальній практиці. Новий період розвитку методів розв'язування крайових задач пов'язаний з інтелектуальним комп'ютерним моделюванням, зокрема застосуванням штучних нейронних мереж [3].

З огляду на те, що методи розв'язування одновимірних крайових задач добре опрацьовані для розв'язування задач, які виникають при розрахунку пластин, використовують підходи засновані на редукції вихідної диференціальної задачі до одновимірної (наприклад, із застосуванням сплайн-апроксимацій [5]). Успішно застосовують також для розв'язування задач математичної фізики та механіки метод Канторовича [8]. Цей метод полягає в тому, що розв'язування вихідного диференціального рівняння в частинних похідних наближено зводиться до відповідної цьому рівнянню системи методу Канторовича [7]. У нашому випадку внаслідок застосування методу Канторовича до досліджуваної в рамках класичної теорії Кірхгофа–Лява задачі про деформування пружно закріпленої пластини за дії статичного навантаження одержуємо систему звичайних диференціальних рівнянь четвертого порядку, оскільки вихідне рівняння для визначення прогину пластини бігармонічне. Систему рівнянь отримуємо у вигляді, який за формою аналогічний до рівнянь методу Бубнова–Гальоркіна, що зручно для подальшого використання. При розв'язуванні крайових задач методом Канторовича однією з головних проблем є побудова повної координатної системи функцій, яку використовують для апроксимації шуканого розв'язку. У [6] досліджували математичні аспекти (апроксимація, збіжність) методу Канторовича стосовно розв'язування лінійних двовимірних крайових задач математичної фізики для окремих випадків крайових умов. У [13] доведено існування та єдиність наближеного розв'язку лінійної крайової задачі з бігармонічним рівнянням за умов жорсткого закріплення країв пластини, отриманого з використанням комбінованого алгоритму, що ґрунтується на методі Канторовича. У [14] з використанням методу Канторовича розв'язано двовимірну задачу про тримальну здатність ортотропної пластини за дії статичного навантаження.

Мета нашої праці – дослідити застосовність методу Канторовича для розв'язування задачі про деформування пружно закріпленої ізотропної пластини з непростим контуром за дії статичного навантаження. Акцент буде зроблено на теоретичне обґрунтування: визначення умов існування та єдиності узагальненого розв'язку й збіжність наближеного розв'язку до точного.

2. ФОРМУЛЮВАННЯ ЗАДАЧІ

Досліджувана задача про статичне деформування пружно закріпленої ізотропної пластини з залученням класичної теорії пластин зводиться до розв'язування бігармонічного рівняння [7]

$$Aw = \Delta^2 w = \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = f(x,y) \quad (x,y)\in S \tag{1}$$

за крайових умов

$$w = 0 \quad (x,y)\in\Gamma, \tag{2}$$

$$Nw = \Delta w - \frac{1-\sigma}{\rho}\frac{\partial w}{\partial n} + k\frac{\partial w}{\partial n} = 0 \quad (x,y)\in\Gamma, \tag{3}$$

де $w(x,y)$ – шукана функція (прогин); $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ – оператор Лапласа в декартовій системі координат; $f(x,y) = q(x,y)/D$ – задана функція (навантаження); D – жорсткість на згин; σ – коефіцієнт Пуассона, $0<\sigma<1$; ρ – радіус кривини кривої; k – додатна стала; Γ – межа області S, яка обмежена по x прямими $x=a$ і $x=b$, а по y кривими $y=g(x)$ і $y=h(x)$; $g(x)$, $h(x)$ – достатньо гладкі функції, причому $g(x)<h(x)$; n – нормаль до межі Γ області S,

$$\frac{\partial w}{\partial n} = \frac{\partial w}{\partial x}\cos(n,x) + \frac{\partial w}{\partial y}\cos(n,y).$$

Щодо заданої функції $f(x,y)$ припускаємо, що вона належить дійсному гільбертовому простору $H = L_2(S)$ з нормою $\|u\| = \iint_S u^2 dxdy$.

За область визначення $\Omega(A)$ оператора A приймаємо множину функцій $w(x,y)$, які неперервні разом із частинними похідними до четвертого порядку включно у замкненій області $\overline{S} = S + \Gamma$ і задовольняють крайові умови (2), (3).

Як відомо [9], оператор A на лінеалі $\Omega(A)$ додатно визначений. У цьому разі для довільних $w, v \in \Omega(A)$ правильні такі співвідношення:

$$(Aw,v) = \iint\limits_S \Delta w \Delta w\, dxdy - \int\limits_\Gamma ((1-\sigma)/\rho - k)\frac{\partial w}{\partial n}\frac{\partial v}{\partial n} ds\,,$$

$$(Aw,w) = \iint\limits_S \Delta w^2 dxdy - \int\limits_\Gamma ((1-\sigma)/\rho - k)\left(\frac{\partial w}{\partial n}\right)^2 ds\,.$$

Відповідно до [9] останнє співвідношення можна подати у такому вигляді:

$$(Aw,w) = \iint\limits_S \left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)^2 + 2\sigma\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)^2 + 2(1-\sigma)\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\right)^2\right] dxdy + k\int\limits_\Gamma \left(\frac{\partial w}{\partial n}\right)^2 ds\,. \quad (4)$$

У цьому разі

$$(Aw,w) \ge \gamma^2 \|w\|^2\,, \quad (5)$$

де $\gamma = \text{const} > 0$ визначається нерівностями Пуанкаре та Фрідріхса [9].

Нерівність (5) означає, що оператор A додатно визначений. Позначимо через H_0 енергетичний простір оператора A, тобто замикання $\Omega(A)$ в метриці

$$[w,v]_0 = (Aw,v) = \iint\limits_S \Delta w \Delta v\, dxdy - \int\limits_\Gamma ((1-\sigma)/\rho - k)\frac{\partial w}{\partial n}\frac{\partial v}{\partial n} ds\,.$$

У цьому разі

$$|w|_0^2 = \iint\limits_S (\Delta w)^2 dx\, dy - \int\limits_\Gamma ((1-\sigma)/\rho - k)\frac{\partial w}{\partial n} ds$$

або на підставі формули (4) отримаємо

$$|w|_0^2 = \iint\limits_S \left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)^2 + 2\sigma\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)^2 + 2(1-\sigma)\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)^2\right] dx\, dy + k\int\limits_\Gamma \left(\frac{\partial w}{\partial n}\right)^2 ds\,. \quad (6)$$

Внаслідок граничного переходу нерівність (5) виконуватиметься для довільного $w \in H_0$

$$\|w\| \le \frac{1}{\gamma}|w|_0\,. \quad (7)$$

Зауважимо, що функції з енергетичного простору H_0 задовольняють крайові умови (2), тобто умови (2) головні. Крім того, ці функції мають узагальнені похідні до другого порядку включно, які сумовані з квадратом в області S. Крайова умова (3) природна, тобто функції з енергетичного простору H_0 не обов'язково задовольнятимуть її [9].

Отже, досліджувану двовимірну крайову задачу (1)–(3) можна сформулювати як задачу відшукання мінімуму функціонала енергії

$$J(w) = [w,w]_0 - 2(f,w) \quad (8)$$

на множині функцій, що належать енергетичному простору H_0 за крайової умови (3), оскільки умову (2) функції з енергетичного простору H_0 задовольняють.

Узагальненим розв'язком задачі (1)–(3) називатимемо функцію $w(x,y) \in H_0$, де H_0 – енергетичний простір, для якої за довільної функції $v(x,y) \in H_0$ виконується тотожність

$$[w,v]_0 = (f,v) \tag{9}$$

або в розгорнутій формі

$$\iint_S \Delta w \, \Delta v \, dxdy - \int_\Gamma ((1-\sigma)/\rho - k) \frac{\partial w}{\partial n} \frac{\partial v}{\partial n} ds = \iint_S fv \, dxdy .$$

Оскільки в (1) оператор A додатно визначений, то у цьому випадку задача про мінімум функціонала енергії (8) матиме розв'язок, який і є єдиним узагальненим розв'язком задачі (1)–(3) [9].

3. ПОБУДОВА СИСТЕМИ РІВНЯНЬ МЕТОДУ КАНТОРОВИЧА

Для розв'язування задачі (1)–(3) застосуємо метод Канторовича [7], згідно з яким наближений розв'язок крайової задачі шукаємо у вигляді

$$w_n(x,y) = \sum_{k=1}^{n} C_k(x) \varphi_k(x,y) , \tag{10}$$

де $\varphi_k(x,y)$ – попередньо вибрані лінійно незалежні в проміжку $[g(x), h(x)]$ функції, які задовольняють крайові умови

$$\varphi_k(x,y) = 0 \text{ при } y = g(x) ; \ \varphi_k(x,y) = 0 \text{ при } y = h(x) , \ k = 1,2,\ldots,n . \tag{11}$$

Невідомі функції $C_k(x)$ у формулі (10), які задовольняють крайові умови

$$C_k(x) = 0 \text{ при } x = a ; \ C_k(x) = 0 \text{ при } x = b , \ k = 1,2,\ldots,n , \tag{12}$$

визначаємо з умови мінімуму функціонала енергії

$$J(w) = [w,w]_0 - 2(f,w) = \iint_S (\Delta w)^2 dxdy - \int_\Gamma ((1-\sigma)/\rho - k) \left(\frac{\partial w}{\partial \nu} \right)^2 ds - 2 \iint_S fw \, dxdy .$$

Розглянемемо поверхні порівняння

$$\overline{w}_n(x,y) = \sum_{k=1}^{n} \overline{C}_k(x) \varphi_k(x,y) = \sum_{k=1}^{n} [C_k(x) + \alpha_k \eta_k(x)] \varphi_k(x,y) ,$$

де α_k – дійсні параметри; $\eta_k(x)$ – довільні функції, що задовольняють умови

$$\eta_k(x) = 0 \text{ при } x = a ; \ \eta_k(x) = 0 \text{ при } x = b , \ k = 1,2,\ldots,n . \tag{13}$$

Із необхідної умови мінімуму функціонала $J(w)$ на функції $w_n(x,y)$, тобто при $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_n = 0$ знаходимо

$$\frac{\partial J}{\partial \alpha_k} = \iint_S 2 \Delta w_n \left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} (\eta_k \varphi_k) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} (\eta_k \varphi_k) \right] dxdy -$$

$$- 2 \int_\Gamma ((1-\sigma)/\rho - k) \frac{\partial w_n}{\partial n} \frac{\partial}{\partial n} (\eta_k \varphi_k) \, ds - 2 \iint_S f \eta_k \varphi_k \, dxdy = 0 . \tag{14}$$

Далі в (14) використаємо формулу Гріна

$$\iint_S (v\Delta u - u\Delta v)\,dxdy = \int_\Gamma \left(v\frac{\partial u}{\partial n} - u\frac{\partial v}{\partial n} \right) ds$$

при $v = \Delta w_n$ і $u = \eta_k \varphi_k$.

Отже, можемо записати

$$\iint_S \Delta w_n \Delta(\eta_k \varphi_k)\,dxdy = \iint_S \Delta^2 w_n \eta_k \varphi_k\,dxdy + \int_\Gamma \Delta w_n \frac{\partial}{\partial n}(\eta_k \varphi_k)\,ds - \int_\Gamma \frac{\partial \Delta w_n}{\partial n} \eta_k\,\varphi_k ds\,.$$

Використовуючи останнє співвідношення, рівності (14) можна надати вигляду

$$\iint_S \Delta^2 w_n \eta_k \varphi_k\,dxdy + \int_\Gamma \Delta w_n \frac{\partial}{\partial n}(\eta_k \varphi_k)\,ds - \int_\Gamma \frac{\partial \Delta w_n}{\partial n}\eta_k\,\varphi_k ds -$$

$$- \int_\Gamma ((1-\sigma)/\rho - k) \frac{\partial w_n}{\partial n} \frac{\partial(\eta_k\,\varphi_k)}{\partial n} ds - \iint_S f \eta_k \varphi_k\,dxdy = 0\,. \tag{15}$$

З урахуванням крайових умов (11) і (13) останнє співвідношення (15) набуває такого вигляду:

$$\iint_S (\Delta^2 w_n - f)\,\eta_k \varphi_k\,dxdy + \int_\Gamma N w_n \frac{\partial}{\partial n}(\eta_k \varphi_k) ds = 0\,, \tag{16}$$

де $N w_n = \Delta w_n - \dfrac{1-\sigma}{\rho}\dfrac{\partial w_n}{\partial n} + k\dfrac{\partial w_n}{\partial n}$ (згідно з уведеними в (3) позначеннями).

Виразимо у формулі (16) криволінійні інтеграли через звичайні. Тоді після стандартних перетворень, враховуючи умову (11) та співвідношення
$\cos(n,x)\big|_{x=a} = -1$, $\cos(n,x)\big|_{x=b} = 1$, $\cos(n,y)\big|_{x=a} = 0$, $\cos(n,y)\big|_{x=b} = 0$,
отримаємо таку рівність:

$$\int_\Gamma N w_n \frac{\partial}{\partial n}(\eta_k \varphi_k) ds = \int_a^b N w_n \eta_k \frac{\partial \varphi_k}{\partial n}\sqrt{1+y'^2}\bigg|_{y=g(x)} dx + \int_{g(b)}^{h(b)} N w_n \eta_k' \varphi_k \Big|_{x=b} dy +$$

$$+ \int_a^b N w_n \eta_k \frac{\partial \varphi_k}{\partial n}\sqrt{1+y'^2}\bigg|_{y=h(x)} dx - \int_{g(a)}^{h(a)} N w_n \eta_k' \varphi_k \Big|_{x=a} dy\,.$$

Якщо підставити отриманий вираз для криволінійного інтеграла у співвідношення (15), то одержимо

$$\int_a^b \eta_k(x) \left\{ \int_{g(x)}^{h(x)} (A w_n - f)\varphi_k\,dy + N w_n \frac{\partial \varphi_k}{\partial n}\sqrt{1+y'^2}\bigg|_{y=g(x)} + N w_n \frac{\partial \varphi_k}{\partial n}\sqrt{1+y'^2}\bigg|_{y=h(x)} \right\} dx -$$

$$- \eta_k'(a) \int_{g(a)}^{h(a)} N w_n \varphi_k \Big|_{x=a} dy + \eta_k'(b) \int_{g(b)}^{h(b)} N w_n \varphi_k \Big|_{x=b} dy = 0\,.$$

Внаслідок довільності функцій $\eta_k(x)$ з останньої рівності отримаємо

$$\int_{g(x)}^{h(x)} (A w_n - f)\varphi_k\,dy + N w_n \frac{\partial \varphi_k}{\partial n}\sqrt{1+y'^2}\bigg|_{y=g(x)} + N w_n \frac{\partial \varphi_k}{\partial n}\sqrt{1+y'^2}\bigg|_{y=h(x)} = 0\,,$$

$$\int_{g(a)}^{h(a)} N w_n \varphi_k \Big|_{x=a} dy = 0\,, \quad \int_{g(b)}^{h(b)} N w_n \varphi_k \Big|_{x=b} dy = 0\,.$$

Отож, шукані функціональні коефіцієнти $C_k(x)$, $k = 1,2,\ldots,n$ визначаються з такої системи методу Канторовича, яка відповідає досліджуваній задачі (1)–(3)

$$\int_{g(x)}^{h(x)} (Aw_n - f)\varphi_k(x,y)\,dy + Nw_n \frac{\partial \varphi_k}{\partial n}\sqrt{1+y'^2}\Big|_{y=g(x)} + Nw_n \frac{\partial \varphi_k}{\partial n}\sqrt{1+y'^2}\Big|_{y=h(x)} = 0 \quad (17)$$

за умов

$$C_k(x) = 0 \text{ при } x = a\,;\; C_k(x) = 0 \text{ при } x = b\,,\; k = 1,2,\ldots,n\,; \quad (18)$$

$$\int_{g(a)}^{h(a)} Nw_n\varphi_k(x,y)\Big|_{x=a} dy = 0\,,\; \int_{g(b)}^{h(b)} Nw_n\varphi_k(x,y)\Big|_{x=b} dy = 0\,,\; k = 1,2,\ldots,n\,. \quad (19)$$

Система (17)–(19) за припущенням щодо існування для функцій $\varphi_k(x,y)$ майже всюди частинних похідних до четвертого порядку включно, сумованих з квадратом, зводиться до лінійної системи звичайних диференціальних рівнянь четвертого порядку щодо шуканих коефіцієнтів $C_k(x)$.

Введемо поняття узагальненого розв'язку системи методу Канторовича (17)–(19). Позначимо через H_n простір функцій вигляду $\sum_{k=1}^{n} a_k(x)\varphi_k(x,y)$. Нехай для деякої функції $w_n(x,y) \in H_n \cap H_0$ справджується тотожність

$$[w_n, v_n]_0 = (f, v_n)\,, \quad (20)$$

де $v_n(x,y) \in H_n \cap H_0$ – довільна функція. Тоді така функція $w_n(x,y) \in H_n \cap H_0$ називається узагальненим розв'язком системи методу Канторовича (17)–(19), тобто узагальненим розв'язком системи методу Канторовича є елемент w_n, який реалізує мінімум функціонала енергії $J(w)$ на множині функцій $w_n(x,y) \in H_n \cap H_0$, що випливає зі співвідношення (14).

4. ІСНУВАННЯ ТА ЄДИНІСТЬ УЗАГАЛЬНЕНОГО РОЗВ'ЯЗКУ

Апроксимація (10) дає змогу отримати розв'язок лінійної двовимірної крайової задачі (1)–(3). Доведемо існування та єдиність узагальненого розв'язку системи методу Канторовича (17)–(19), до якої зведено досліджувану задачу. Для побудови наближеного розв'язку одновимірної задачі (17)–(19) використаємо систему функцій $\varphi_k(x,y)$, яка лінійно незалежна в проміжку $[g(x), h(x)]$ і задовольняє умови (11). Крім того, вибираємо їх так, щоб система функцій $\{\chi_l(x)\varphi_k(x,y)\} \in H_0$ була повною системою лінійно незалежних функцій в просторі H_0, у цьому разі система функцій $\chi_l(x)$ задовольняє умови

$$\chi_l(x) = 0 \text{ при } x = a\,,\; \chi_l(x) = 0 \text{ при } x = b\,,\; l = 1,2,\ldots\,. \quad (21)$$

Для розв'язування задачі (1)–(3) застосуємо метод Бубнова–Гальоркіна, згідно з яким наближений розв'язок $w_n^m(x,y)$ шукаємо у такому вигляді:

$$w_n^m(x,y) = \sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{m} C_{kl}\,\chi_l(x)\varphi_k(x,y)\,. \quad (22)$$

Невідомі коефіцієнти C_{kl} в (22) визначаємо з системи рівнянь вигляду

$$[w_n^m, \chi_j(x)\varphi_i(x,y)]_0 = \iint_S f\chi_j(x)\varphi_i(x,y)\,dxdy\,, \qquad i = 1,2,\ldots,n; \quad j = 1,2,\ldots,m. \quad (23)$$

Система (23) зводиться до системи лінійних алгебричних рівнянь стосовно невідомих коефіцієнтів C_{kl} і має єдиний розв'язок, тому що її детермінант відмінний від нуля.

Позначимо через $H_n^m \subset H_0$ простір функцій вигляду $v_n^m(x,y) = \sum_{k=1}^{m}\sum_{l=1}^{n} b_{kl}\,\chi_l(x)\varphi_k(x,y)$, де b_{kl} – довільні числа. Тоді на підставі (23) для довільного елемента $v_n^m \in H_n^m$ отримаємо

$$[w_n^m, v_n^m]_0 = \iint_S f v_n^m \,dxdy\,. \tag{24}$$

Доведемо тепер, що послідовність розв'язків $\{w_n^m\}$ системи (23) методу Бубнова–Гальоркіна слабко збігається в просторі H_0 до узагальненого розв'язку методу Канторовича. З використанням співвідношення (24) при $v_n^m = w_n^m$ та нерівності (7) отримаємо

$$[w_n^m, w_n^m]_0 = \iint_S f w_n^m \,dxdy \le \|f\|\|w_n^m\| \le \frac{1}{\gamma}\|f\|\left|w_n^m\right|_0.$$

Звідси одержуємо

$$\left|w_n^m\right|_0 \le \frac{1}{\gamma}\|f\|\,. \tag{25}$$

З нерівності (25) випливає, що послідовність $\{w_n^m\}$ слабко компактна в просторі $H_n \cap H_0$, а з урахуванням співвідношення (7) також і в просторі $H_n \cap H$.

Використовуючи співвідношення (6), можемо записати

$$[w,w]_0^2 = \iint_S \left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)^2 + 2\sigma\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)^2 + 2(1-\sigma)\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}\right)^2\right]dx\,dy + k\int_\Gamma\left(\frac{\partial w}{\partial n}\right)^2 ds =$$

$$= \iint_S \left\{(1-\sigma)\left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)^2\right] + \sigma\left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)^2\right] + \right.$$

$$\left. + 2\sigma\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2(1-\sigma)\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}\right)^2\right\}dx\,dy + k\int_\Gamma\left(\frac{\partial w}{\partial n}\right)^2 ds =$$

$$= \iint_S \left\{(1-\sigma)\left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)^2\right] + \sigma\left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)^2\right] + 2(1-\sigma)\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}\right)^2\right\}dx\,dy +$$

$$+ k\int_\Gamma\left(\frac{\partial w}{\partial n}\right)^2 ds \ge$$

$$\ge \iint_S \left\{(1-\sigma)\left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)^2\right] + 2(1-\sigma)\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}\right)^2\right\}dx\,dy + k\int_\Gamma\left(\frac{\partial w}{\partial n}\right)^2 ds =$$

$$= \iint_S \left\{(1-\sigma)\left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)^2 + 2\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)^2\right]\right\}dx\,dy + k\int_\Gamma\left(\frac{\partial w}{\partial n}\right)^2 ds\,.$$

Отож, з останнього співвідношення випливає

$$\iint_S \left\{ (1-\sigma)\left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)^2 + 2\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)^2 \right] \right\} dx\, dy + k\int_\Gamma \left(\frac{\partial w}{\partial n}\right)^2 ds \le [w,w]_0 = |w|_0^2 .$$

Звідси при $w = w_n^m$, враховуючи нерівність (25), отримаємо, що послідовності $\{w_n^m\}$, $\left\{\frac{\partial^2 w_n^m}{\partial x^2}\right\}$, $\left\{\frac{\partial^2 w_n^m}{\partial x \partial y}\right\}$, $\left\{\frac{\partial^2 w_n^m}{\partial y^2}\right\}$ будуть слабко компактними в просторі H. Отже, з цих послідовностей можна виділити підпослідовності $\{w_n^{m_s}\}$, $\left\{\frac{\partial^2 w_n^{m_s}}{\partial x^2}\right\}$, $\left\{\frac{\partial^2 w_n^{m_s}}{\partial x \partial y}\right\}$, $\left\{\frac{\partial^2 w_n^{m_s}}{\partial y^2}\right\}$, які при $m_s \to \infty$ слабко збігаються в просторі сумованих з квадратом функцій H відповідно до елементів w_n, $\frac{\partial^2 w_n}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 w_n}{\partial x \partial y}$, $\frac{\partial^2 w_n}{\partial y^2}$. Крім того, послідовність $\left\{\frac{\partial w_n^{m_s}}{\partial n}\right\}$ слабко збігається в просторі сумованих з квадратом функцій на межі Γ області S, тобто

$$\int_\Gamma \frac{\partial w_n^{m_s}}{\partial n} v\, ds \to \int_\Gamma \frac{\partial w_n}{\partial n} v\, ds \text{ при } m_s \to \infty$$

для довільної сумованої з квадратом на межі Γ області S функції $v(x,y)$. Не обмежуючи загальності, можемо вважати, що всі згадані послідовності слабко збіжні до відповідних елементів.

Оскільки для довільного елемента $v_n(x,y) = \sum_{k=1}^n a_k(x)\varphi_k(x,y) \in H_n \cap H_0$ можна побудувати послідовність елементів $v_n^m = \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^m a_{kl}\chi_l(x)\varphi_k(x,y) \in H_n^m \cap H_0$, де коефіцієнти a_{kl} визначаються як розв'язки системи алгебричних рівнянь

$$\sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^m a_{kl}[\chi_l(x)\varphi_k(x,y), \chi_j(x)\varphi_i(x,y)] = [v_n(x,y), \chi_j(x)\varphi_i(x,y)]_0 , \quad i=1,2,\ldots,n, \quad j=1,2,\ldots,m, \tag{26}$$

таку, що $|v_n - v_n^m| \to 0$ при $m \to \infty$, то, зафіксувавши елемент $v_n \in H_n \cap H_0$, приймаємо у співвідношенні (24) елемент $v_n^m \in H_n^m$, коефіцієнти якого a_{kl} визначають із системи рівнянь (26). Тепер у формулі (24) можемо перейти до границі при $m \to \infty$. У цьому разі отримаємо співвідношення

$$[w_n, v_n]_0 = (f, v_n) ,$$

яке правильне для довільного елемента $v_n \in H_n \cap H_0$.

Доведемо єдиність узагальненого розв'язку системи методу Канторовича. Нехай $w_n(x,y)$ і $u_n(x,y)$ – два узагальнені розв'язки. Для них, враховуючи співвідношення (20) при $v_n = w_n - u_n$, відповідно одержимо

$$[w_n, w_n - u_n]_0 = (f, w_n - u_n),$$
$$[u_n, w_n - u_n]_0 = (f, w_n - u_n).$$

Якщо від першої рівності відняти другу, то отримаємо

$$[w_n - u_n, w_n - u_n]_0 = 0.$$

Звідси випливає, що $w_n = u_n$. Оскільки оператор A додатно визначений, то будь-яка послідовність, що мінімізує функціонал енергії (8), збігається по енергії до узагальненого розв'язку, що відповідає крайовій задачі (1)–(3). Отже,

$$\left|w - w_n\right|_0 \to 0 \text{ при } n \to \infty,$$

тому, враховуючи нерівність (7), і за нормою вихідного простору $H = L_2(S)$

$$\left\|w - w_n\right\| \to 0 \text{ при } n \to \infty.$$

Точність апроксимацій шуканого розв'язку крайової задачі , яка може бути досягнута за методом Канторовича, є чутлива до конкретного вибору координатних функцій, належний вибір яких залежить від розглядуваної задачі та характеру крайових умов. У нашому випадку координатну систему функцій $\{\varphi_k(x, y)\}$ можна прийняти у такому вигляді [9]:

$$y^k (y - g(x))(y - h(x)), \ k = 0, 1, 2, \ldots .$$

ВИСНОВКИ

З використанням концепції редукції вихідної крайової задачі до одновимірної методом Канторовича побудовано наближений розв'язок лінійної двовимірної крайової задачі про деформування пружно закріпленої ізотропної пластини за дії статичного навантаження. У контексті розв'язання лінійної двовимірної крайової задачі методом Канторовича досліджено його ефективність стосовно розглядуваної задачі, сформульовано рекомендації щодо вибору координатних функцій з урахуванням заданих граничних умов. Доведено існування та єдиність узагальненого розв'язку системи методу Канторовича та його збіжність.

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. *Бате К.* Численные методы анализа и метод конечных элементов / К. Бате, Е. Вильсон. – М.: Стройиздат, 1982.
2. *Бенерджи П.* Метод граничных элементов в прикладных науках / П. Бенерджи, Р. Баттерфилд. – М.: Мир, 1984.
3. *Васильев А.Н.* Нейронные сети как новый универсальный подход к численному решению задач математической физики / А.Н. Васильев, Д.А. Тархов // Нейрокомпьютеры: разработка, применение. – 2004. – № 7-8. – С. 111–118.
4. *Власова Е.А.* Приближенные методы математической физики / Е.А. Власова, В.С. Зарубин, Г.Н Кувыркин. – М., 2001.
5. *Григоренко Я.М.* Решение задач теории пластин и оболочек с применением сплайн-функций (Обзор) / Я.М. Григоренко, Н.Н. Крюков // Прикл. механика. – 1995. – 31, № 6. – С. 3-27.
6. *Жук М.* До питання про оцінку швидкості збіжності методу Канторовича / М. Жук, А. Кіндибалюк, Н. Щербина // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. прикл. матем. та інформ. – 2009. – Вип. 15. – С. 43-51.
7. *Канторович Л. В.* Приближенные методы высшего анализа / Л.В. Канторович, В.И. Крылов. – М.; Л.: Физматгиз, 1962.

8. *Лучка А.Ю.* Возникновение и развитие прямых методов математической физики / А. Ю. Лучка, Т.Ф. Лучка. – К.: Наук. думка, 1985.
9. *Михлин С.Г.* Вариационные методы в математической физике / С.Г. Михлин. – М.: Наука, 1970.
10. *Молчанов И.Н.* Достоверность решений, полученных по методу конечных элементов / И.Н. Молчанов // Кибернетика. – 1991. – № 3. – С. 23-31.
11. *Рвачев В.Л.* R-функции в задачах теории пластин / В.Л. Рвачев, Л.В. Курпа. – К.: Наук. думка, 1987.
12. *Савула Я.Г.* Числовий аналіз задач математичної фізики варіаційними методами / Я.Г. Савула. – Львів: Видавничий Центр ЛНУ ім. І. Франка, 2004.
13. *Щербина Н.М.* Комбінований алгоритм розв'язування лінійної двовимірної крайової задачі / Н.М Щербина, М.В. Жук // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2005. – Т. 48, № 4. – С. 133–139.
14. *Щербина Н.* Наближене розв'язування лінійної двовимірної крайової задачі про тримальну здатність ортотропних пластин / Н. Щербина, М. Жук, А. Кіндибалюк. // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. прикл. матем. та інформ. – 2011. – Вип. 17. – С. 116–128.
15. *Atluri S.N.* New Meshless Local Petrov–Galerkin (MLPG) Approach in Computational Mechanics // S.N. Atluri, T.L. Zhu // Comput. Mech. – 1998. – 22. – P. 117–127.

Стаття: надійшла до редколегії 07.09.2012
доопрацьована 14.11.2012
прийнята до друку 05.12.2012

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ АСПЕКТЫ РЕШЕНИЯ ДВУХМЕРНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ О ДЕФОРМИРОВАНИИ УПРУГО ЗАКРЕПЛЕННОЙ ПЛАСТИНЫ МЕТОДОМ КАНТОРОВИЧА

М. Жук[1], Адриана Киндыбалюк[2], Н. Щербина[3]

[1]Львовский национальный университет имени Ивана Франко,
ул. Университетская, 1, Львов, 79000
[2]Киевский национальный университет строительства и архитектуры,
Повитрофлотский проспект, 31, Киев, 03037
[3]Институт прикладных проблем механики и математики
им. Я.С. Подстригача НАН Украины, ул. Наукова, 3б, Львов, 79601

Исследованы математические аспекты применимости метода Канторовича к решению двухмерной краевой задачи о деформировании упруго закрепленной пластины под действием статической поперечной нагрузки. Математическая модель основана на теории пластин Кирхгоффа–Лява. Используя метод Канторовича, исходная задача сведена к соответствующей системе обыкновенных дифференциальных уравнений. Доказаны существование и единственность обобщенного решения метода Канторовича, а также его сходимость.

Ключевые слова: двухмерная краевая задача, упруго закрепленная пластина, метод Канторовича, обобщенное решение, сходимость.

MATHEMATICAL ASPECTS OF SOLUTION FOR THE TWO-DIMENSIONAL BOUNDARY PROBLEM ON ELASTIC CLAMPED PLATE DEFORMATION BY USING KANTOROVICH'S METHOD

M. Zhuk[1], Adriana Kindybaljuk[2], N. Shcherbyna[3]

[1]*Ivan Franko National University in Lviv*
Universytetska str.,1, 79000 Lviv, Ukraine
[2]*National university of building and architecture in Kyiv*
Prosp. Povitroflotsky, 31, 03037, Kyiv, Ukraine
[3]*Pidstryhach Institute of Applied Problems of Mechanics and Mathematics National Academy of Sciences of Ukraine, Naukova str., 3-b, 79601 Lviv, Ukraine*

Mathematical aspects of applicability of the Kantorovich's method for solving the two-dimensional boundary-value problem on the plate deformation with elastic clamped edges under transversal loading were investigated. The mathematical model was based on the Kirchhoff–Love plate theory. According to Kantorovich's method an original problem was reduced to the corresponding system of ordinary differential equations. The existence and uniqueness of generalized solution by using the Kantorovich's method and also its convergence were proved.

Key words: two-dimensional boundary-value problem, plate with elastic clamped edges, Kantorovich method, generalized solution, convergence.