ISSN 2078–5097. Вісн. Львів. ун-ту. Сер. прикл. матем. та інф. 2013. Вип. 20. С. 109–117
Visnyk of the Lviv University. Series Appl. Math. and Informatics. Issue 20. P. 109–117

І Н Ф О Р М А Т И К А

УДК 004.02+519.17

ІЗОЛЬОВАНІ СЕРЕДИННІ УМОВИ ТА ЇХНІ ВЛАСТИВОСТІ ДЛЯ ЗАДАЧІ МАКСИМІЗАЦІЇ ПОБУДОВИ ПРОСТОГО ЛАНЦЮГА ГРАФА

В. Черняхівський

Львівський національний університет імені Івана Франка,
вул. Університетська, 1, Львів, 79000, e-mail: v_chrn@franko.lviv.ua

Для задачі побудови максимального простого ланцюга графа визначено поняття серединної умови. Побудовано означення серединних умов типу 1, 2 і 3 для випадку взаємної незалежності вершин графа. Визначено поняття конструктивної повноти ізольованих серединних умов. Сформульовано та доведено твердження про властивості серединних умов щодо конструктивної повноти.

Ключові слова: граф, простий ланцюг, максимізація, серединна умова, конструктивна повнота умови, властивість умови.

1. ВСТУП

Відома задача побудови мінімального ланцюга неорієнтованого графа [1,9], визначеного сукупністю вершин і ребер. Розв’язки задач побудови мінімального ланцюга можна отримати, наприклад, методом пошуку на графі в ширину – для незважених графів, або за алгоритмом Дейкстри – для зважених графів. Пошукові задачі на графах в різних формулюваннях можна знайти в публікаціях зарубіжних видань [4-8].

Для практичних потреб часто виникає задача побудови не мінімального, а максимального ланцюга графа, щоб отримати якнайбільше покриття за певними додатковими умовами.

2. ФОРМУЛЮВАННЯ ЗАДАЧІ

Розглянуто симетричну мінімаксну задачу побудови ланцюга графа в такому формулюванні. Задано неповний граф $G=(V,E)$ з кількістю вершин $n=|V|$. Граф розглядаємо як незважений або з ребрами однакової ваги. Треба відшукати максимальний простий ланцюг між двома заданими вершинами V_a, V_b, тобто шлях з максимальною кількістю вершин

$$(V_a, V_1, V_2, \ ..., V_k, V_b), k \to max, V_i \neq V_j \text{ при } i \neq j, \text{ крім, можливо, } V_a \ i \ V_b.$$

Якщо $V_a = V_b$, то отримаємо циклічний простий максимальний ланцюг. Якщо $k = n-2$ і $V_a \neq V_b$, то одержимо гамільтоновий шлях. Якщо $k = n-1$ і $V_a = V_b$, то отримаємо гамільтоновий цикл. У такому формулюванні симетричної мінімаксної задачі гамільтоновий шлях і гамільтоновий цикл можна вважати граничними випадками максимального простого ланцюга графа.

Задача побудови максимального простого ланцюга має два випадки: 1) для кожної заданої початкової V_a і кінцевої V_b вершин знайти максимально можливий простий ланцюг без додаткових умов; 2) шукати максимальний простий ланцюг з умовою, що деякі зазначені вершини мають бути наявні в знайденому ланцюзі, або/і деякі вершини не повинні бути в знайденому ланцюзі.

Розв'язок першого випадку задачі можна будувати на підставі рекурсивного алгоритму відшукання максимального простого ланцюга [2]. Розв'язок другого випадку побудовано на визначеному понятті серединної умови ланцюга графа [3].

3. ЗМІСТ РЕКУРСИВНОГО АЛГОРИТМУ ДЛЯ ПЕРШОГО ВИПАДКУ ЗАДАЧІ

Рекурсивний алгоритм $\mathrm{P}_0^{\mathrm{r}}$ відшукання максимального простого ланцюга побудовано на підставі методу пошуку з поверненнями [2]. Алгоритм виконує перегляд усіх можливих простих ланцюгів, які починаються у вершині V_a, і використовує дві головні структури даних: матрицю суміжності $A[n,n]$ і список L_+ вже відвіданих на цей момент вершин. Усі вершини графа нумерують натуральними числами 1, 2, ..., n у довільному порядку. За один крок рекурсії алгоритм $\mathrm{P}_0^{\mathrm{r}}=\mathrm{P}_0^{\mathrm{r}}(i)$ будує одну наступну ланку простого ланцюга, починаючи з вершини i: $\mathrm{P}_0^{\mathrm{r}}(i) \to j$, якщо це можливо, і сприяє рекурсивно $\mathrm{P}_0^{\mathrm{r}}(j)$. У цьому разі додаємо вершину i до списку L_+. Якщо ж нову ланку неможливо побудувати, то крок алгоритму не виконує ніяких операцій. Отже, $\mathrm{P}_0^{\mathrm{r}}=\mathrm{P}_0^{\mathrm{r}}(\mathrm{P}_0^{\mathrm{r}}(\mathrm{P}_0^{\mathrm{r}}(\ ...\ (\mathrm{P}_0^{\mathrm{r}}(a))\ ...\ )))$. Побудова чергової ланки $\mathrm{P}_0^{\mathrm{r}}(i) \to j$ супроводжується викресленням вершини i та всіх інцидентних їй ребер з графа. Вершина i викреслена, якщо $i \in L_+$, а наступну вершину j для простого ланцюга треба шукати в множині $j \in \{V\} \setminus L_+$.

Зауважимо, що множина $\{V\} \setminus L_+$ враховує вершину V_b, або V_a і V_b при $V_a = V_b$, отже, на кожному кроці алгоритму існує можливість отримати гамільтоновий шлях або гамільтоновий цикл – якщо це можливо за структурою графа.

4. ОЗНАЧЕННЯ ІЗОЛЬОВАНИХ СЕРЕДИННИХ УМОВ

Означення. Узагальненою серединною умовою задачі побудови простого ланцюга визначимо вектор $Z = \{r_i(M)\}, i = 1,\ 2,\ ...,\ |M|$, де $M = \{V\} \setminus \{V_a, V_b\}$ – множина вершин, які не є граничними для шуканого ланцюга, $r_i(M)$ – предикат для кожної вершини номер i з допустимими значеннями {-1; 0; +1}. При $r_i = +1$ вершина i повинна входити до ланцюга L, при $r_i = -1$ не повинна бути в ланцюзі L, а при $r_i = 0$ наявність чи брак вершини в ланцюгу не визначено. У загальному випадку предикат $r_i(M)$ є функцією від усіх вершин множини M.

У праці [3] викладений модифікований рекурсивний алгоритм P_c^r (рекурсивний алгоритм r з врахуванням умов c) відшукання максимального простого ланцюга, який допомагає виконувати перевірки дотримання серединних умов за довільним критерієм. Для вершин x, які є кандидатами на входження до максимального простого ланцюга, алгоритм $P_\mathrm{c}^{\mathrm{r}}$ перевіряє умову $cond_T(x) = true$, де $cond_\mathrm{T}$ визначає конкретний зміст серединної умови.

Ми розглядаємо випадки предиката $r_i = r_i(V_i)$, тобто предикат є функцією лише власної вершини, а всі вершини графа взаємно незалежні щодо наявності в максимальному простому ланцюгу. Значення предиката для кожної вершини окремо визначають, враховуючи потреби отримати точнішу структуру шуканого максимального ланцюга. Отже, розглядають серединні умови як вектор $Z = \{r_i(V_i)\}$. Такий вектор назвемо ізольованими серединними умовами.

Ізольована серединна умова типу 1. Умовою *типу 1* (або [+1;0]) називають вектор $Z=\{r_i(V_i)\}, i=1,\ 2,\ ...,\ \left|M\right|$, де $r_i(V_i)=1$ для вершин *i*, які повинні входити до ланцюга *L*, і $r_i(V_i)=0$ для всіх інших вершин. За умовою типу 1 усі вершини взаємно незалежні.

Умову типу 1 застосовуємо у випадках, коли максимальний ланцюг має обов'язково проходити через деякі фіксовані вершини, хоча порядок проходження через такі фіксовані вершини не визначений. Отже,

$$L=\{V_a,V_b\}\cup\{V_i\ \text{при}\ r_i=1\}\cup\{V_k\ \text{при}\ r_k=0\}, \left|\{V_i\ \text{при}\ r_i=1\right|=\sum(r_i=1), \left|V_k\ \text{при}\ r_k=0\right|\geq 0\,.$$

У ланцюгу мають бути граничні вершини, і всі вершини з умовою $r_i(V_i)=1$, наявність решти вершин визначається критерієм максимізації.

Ізольована серединна умова типу 2. Умовою *типу 2* (або [-1;0]) називають вектор $Z=\{r_i(V_i)\}, i=1,\ 2,\ ...,\ \left|M\right|$, де $r_i(V_i)=-1$ для вершин *i*, які не повинні бути у ланцюзі *L*, і $r_i(V_i)=0$ для всіх інших вершин. За умовою типу 2 всі вершини взаємно незалежні.

Умову типу 2 застосовуємо у випадках, коли з максимального ланцюга треба вилучити деякі фіксовані вершини. Отже, $L=\{V_a,V_b\}\cup\{\,V_m\subseteq(M\setminus\{V_i\ \text{при}\ r_i=-1\})\,\}$. В ланцюзі мають бути граничні вершини, а також вершини з умовою $r_i(V_i)=0$ за критерієм максимізації.

Ізольована серединна умова типу 3. Умовою *типу 3* (або [±1;0]) називають вектор $Z=\{r_i(V_i)\}, i=1,\ 2,\ ...,\ \left|M\right|$, де $r_i(V_i)=1$ для вершин *i*, які повинні входити до ланцюга *L*, $r_i(V_i)=-1$ для вершин *i*, які не повинні бути у ланцюзі *L*, і $r_i(V_i)=0$ для всіх інших вершин. За умовою типу 3 всі вершини взаємно незалежні.

Умову типу 3 застосовуємо у випадках, коли одночасно максимальний ланцюг має обов'язково проходити через деякі фіксовані вершини і в цьому разі з ланцюга треба вилучити інші фіксовані вершини. Отже,

$$L=\{V_a,V_b\}\cup\{V_i\ \text{при}\ r_i=1\}\cup\{V_m\subseteq(M\setminus\{V_i\ \text{при}\ r_i=-1, r_i=1\})\}\,.$$

В ланцюзі мають бути граничні вершини, всі вершини з умовою $r_i(V_i)=1$, а також вершини з умовою $r_i(V_i)=0$ за критерієм максимізації. Підмножина вершин з умовою $r_i(V_i)=0$ для умови типу 3 має менше елементів, ніж для умови типу 1.

5. КОНСТРУКТИВНА ПОВНОТА ІЗОЛЬОВАНИХ СЕРЕДИННИХ УМОВ

Означення 1. Тип серединної умови $T=T(V_a,V_b)$ для граничних вершин V_a, V_b називається *конструктивно повним щодо вершин*, якщо граф $G=(V,E)$ зв'язний і максимальний простий ланцюг від V_a до V_b може бути побудований за таким типом умови для будь-якої підмножини попарно суміжних вершин графа $G=(V,E)$, які можна сполучити в ланцюг за структурою графа, і *конструктивно неповним щодо вершин* у протилежному випадку. Тобто, ланцюг можна отримати для будь-якої підмножини вершин $\{V_{i1},V_{i2},\ \ldots,V_{ik}\}$ такої, що суміжними є всі пари

$$(V_a,V_{i1}),\ (V_{i1},V_{i2}),\ (V_{i2},V_{i3}),\ (V_{i3},V_{i4}),\ \ldots,\ (V_{i(k-1)},V_{ik}),\ (V_{ik},V_b)$$

з точністю до порядку сполучення.

Інтерпретація повноти серединної умови щодо вершин означає обернене формулювання задачі побудови максимального ланцюга: чи можна записати сукупність серединних умов $Z_1 \cup Z_2 \cup \ldots \cup Z_N$ таку, щоб розв'язками задачі були всі можливі підмножини вершин $\{V\} \setminus \{V_a, V_b\}$, які належать хоча б одному простому ланцюгу від V_a до V_b, який можна побудувати за структурою графа. Порядок обходу вершин ланцюга значення не має.

Означення 2. Тип серединної умови $T = T(V_a, V_b)$ для граничних вершин V_a, V_b називається *конструктивно повним щодо шляхів*, якщо граф $G = (V, E)$ зв'язний і максимальний простий ланцюг може бути побудований за таким типом умови для будь-якого допустимого ланцюга графа $G = (V, E)$ від вершини V_a до V_b, і *конструктивно неповним щодо шляхів* у протилежному випадку.

Інтерпретація повноти серединної умови щодо шляхів означає обернене формулювання задачі побудови максимального ланцюга: чи можна записати сукупність серединних умов $Z_1 \cup Z_2 \cup \ldots \cup Z_N$ таку, щоб розв'язками задачі були всі можливі прості ланцюги від V_a до V_b, які можна побудувати за структурою графа. Порядок обходу вершин ланцюга має значення.

Зауважимо (без доведення), що конструктивна повнота серединної умови щодо шляхів є сильнішою властивістю, ніж конструктивна повнота щодо вершин. Для того, щоб існувала конструктивна повнота щодо шляхів, необхідно, але не достатньо, щоб існувала конструктивна повнота щодо вершин. Між граничними вершинами V_a, V_b може існувати декілька шляхів однакової максимальної довжини. Для того, щоб відшукати всі такі максимальні шляхи, серединна умова повинна допускати можливість відшукання хоча б одного з максимальних шляхів. Але відшукання одного максимального шляху не гарантує відшукання всіх інших максимальних шляхів і залежить від типу серединної умови.

6. ВЛАСТИВОСТІ СЕРЕДИННИХ УМОВ

Твердження 1.1. Ізольована серединна умова типу 1 конструктивно неповна щодо вершин.

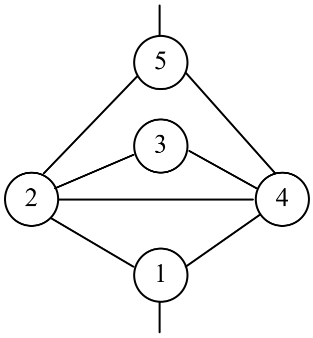

Рис. 1. Фрагмент графа 1

Доведення. Припустимо, що до максимального простого ланцюга від V_a до V_b без серединної умови входять вершини $S = \{s_1, s_2, \ldots, s_m\}$, частина з яких належить фрагменту графа, зображеному на рис. 1, тобто $\{1, 2, 3, 4, 5\} \subset S$. Треба визначити сукупність серединних умов типу 1 таку, щоб побудувати підмножини вершин

$$K_1 = \{1,2,3,4,5\},\ K_2 = \{1,2,4,5\},\ K_3 = \{1,2,5\},\ K_4 = \{1,4,5\},$$

які можуть входити до простого ланцюга за структурою фрагмента. Зауважимо, що шлях від 1 до 5 має обов'язково пройти через 2 або через 4. Визначимо для фрагмента спершу серединну умову

$$Z_1 = \{r_1(V_1)=1, r_2(V_2)=1, r_3(V_3)=1, r_4(V_4)=1, r_5(V_5)=1\},$$

або у скороченій формі $Z_1 = \{V_1, V_2, V_3, V_4, V_5\}$. Тобто для всіх п'яти вершин накладаємо умову обов'язкової наявності в ланцюзі. Розв'язком задачі буде підмножина вершин K_1 за конкретними шляхами 1-2-3-4-5 або 1-4-3-2-5. Визначимо тепер серединну умову $Z_2 = \{V_1, V_2, V_5\}$, а $r_3(V_3)=0$ і $r_4(V_4)=0$. Проте розв'язком знову буде підмножина вершин K_1 за такими самими конкретними шляхами, бо алгоритм будує максимальний ланцюг. Аналогічний результат отримаємо і для $Z_3 = \{V_1, V_4, V_5\}$. Якщо ж визначити серединну умову таку, що $r_2(V_2)=0$ і $r_4(V_4)=0$ одночасно, то шляху від 1 до 5 не буде взагалі. Виконуючи перебір різних комбінацій входження вершин, дійдемо висновку, що для будь-якої умови $Z_x = \{V_1, V_2, V_5,\ ...\}$ або $Z_x = \{V_1, V_4, V_5,\ ...\}$ будемо отримувати той самий розв'язок K_1, і неможливо сформулювати умову типу 1 для отримання розв'язків K_2, K_3, K_4. Отже, в загальному випадку ізольована серединна умова типу 1 конструктивно неповна щодо вершин.

Твердження 1.2. Ізольована серединна умова типу 1 конструктивно неповна щодо шляхів.

Доведення. Конструктивна неповнота щодо шляхів випливає з конструктивної неповноти щодо вершин (твердження 1.1). Якщо неможливо отримати розв'язки деяких підмножин вершин (K_2, K_3, K_4), то неможливо отримати відповідну частину шляху для максимального простого ланцюга.

Твердження 2.1. Ізольована серединна умова типу 2 конструктивно повна щодо вершин.

Доведення. Нехай для деякого j і для деякого k існує підмножина попарно суміжних вершин $P_{j,k} = \{V_a, V_{j1}, V_{j2},\ \ldots, V_{jk}, V_b\}$, які можна сполучити в ланцюг; k – кількість вершин у підмножині; j – кількість підмножин з рівною кількістю елементів $k = const$. Тоді визначимо для цієї підмножини серединну умову так:

$$Z(P_{j,k}) = \{r_1(V_{j1})=0, r_2(V_{j2})=0,\ \ldots, r_k(V_{jk})=0,\ r_x(V_x)=-1\}$$

для всіх $V_x \in \{M \setminus \{V_j \text{ при } r_j = 0\}\}$. Тобто, для всіх вершин, які мають бути в ланцюзі, визначаємо предикат, що дорівнює нулю, для решти вершин визначаємо предикат, який дорівнює мінус одиниці. Граничні вершини є умовою задачі і перевіряють для кожного ланцюга окремо. Ланцюг можна отримати лише з вершин $P_{j,k}$. Припустимо, що існує підмножина суміжних вершин $P^*_{j,k}$, яка складається з підмножини вершин $P_{j,k}$ таких, що $P_{j,k} : P^*_{j,k} \subset P_{j,k}$, $\left|P^*_{j,k}\right| < \left|P_{j,k}\right|$. За основною властивістю алгоритм будує максимальний ланцюг, тому розв'язком буде підмножина $P_{j,k}$ з точністю до порядку сполучення вершин. Отже, для будь-якої заданої підмножини $P_{j,k}$, яка задовольняє умову попарної суміжності всіх вершин підмножини, можна отримати розв'язок на цілій підмножині і лише на цілій.

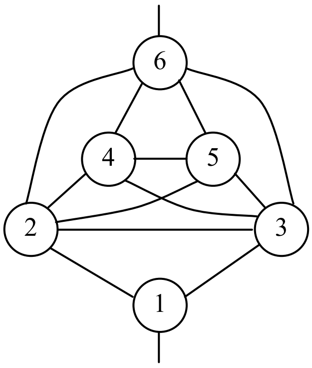

Рис. 2. Фрагмент графа 2

Нехай фрагмент графа (рис. 2) має входити до максимального ланцюга на підставі ізольованої серединної умови типу 2. Визначимо для фрагмента серединну умову

$$Z_1 = \{r_1(V_1) = 0, r_2(V_2) = 0, r_3(V_3) = 0, r_4(V_4) = -1, r_5(V_5) = -1, r_6(V_6) = 0\}$$

або у скороченій формі $Z_1 = \{-V_4, -V_5\}$. Розв'язком задачі буде підмножина вершин $K_1 = \{1, 2, 3, 6\}$ за конкретними шляхами 1-2-3-6 або 1-3-2-6. Ланцюг 1-2-6 чи 1-3-6 буде відхилений, бо його довжина коротша.

Якщо ж треба шукати розв'язок на підмножині вершин $K_2 = \{1, 2, 3, 5, 6\}$, то серединна умова має бути визначена як $Z_2 = \{-V_4\}$. Тоді можливі розв'язки 1-2-3-5-6, 1-2-5-3-6, 1-3-2-5-6, 1-3-5-2-6.

Якщо шукати розв'язок на підмножині вершин $K_3 == \{1, 4, 5, 6\}$, то потрібно визначати серединну умову $Z_3 = \{-V_2, -V_3\}$. У цьому разі неможливо побудувати жодну послідовність суміжних пар $(V_1, V_{i1}),\ \ldots, (V_{it}, V_6)$, бо не виконується умова сполучення в ланцюг.

Твердження 2.2. Ізольована серединна умова типу 2 конструктивно неповна щодо шляхів.

Доведення. На підставі доведення твердження 2.1 можна визначити будь-яку серединну умову $Z(P_{j,k})$ таку, за якою до максимального ланцюга будуть входити *k* вершин деякої підмножини $P_{j,k}$. Якщо за структурою графа можна отримати лише одну послідовність суміжних пар $(V_{i1}, V_{i2}),\ (V_{i2}, V_{i3}),\ (V_{i3}, V_{i4}),\ \ldots,\ (V_{i(k-1)}, V_{ik})$, то її знайдемо за алгоритмом. Якщо ж за структурою графа існує декілька послідовностей суміжних пар

$$[(V_{i1}, V_{i2}),\ (V_{i2}, V_{i3}),\ (V_{i3}, V_{i4}),\ \ldots,\ (V_{i(k-1)}, V_{ik})]_m,\ m > 1,$$

кожна з яких враховує всі $k = const$ вершин, то алгоритм пошуку максимального ланцюга не визначає вибір конкретної послідовності за серединною умовою типу 2. Декілька різних ланцюгів можуть задовольняти ту саму умову типу 2. Розв'язком задачі буде лише один з ланцюгів довжини *k*. Отримати решту ланцюгів довжини *k* на тій самій підмножині вершин неможливо, бо розв'язок задачі алгоритм будує як єдиний.

Твердження 3.1. Ізольована серединна умова типу 3 конструктивно повна щодо вершин.

Доведення. Нехай існує деяка сукупність L^* всіх можливих простих ланцюгів між V_a і V_b різної довжини: $L^* = \{L_k\}$. Розглянемо окремий ланцюг $L_k \in L^*$. Для всіх вершин, наявних в ланцюгу L_k, визначимо серединну умову як $r_i(V_i) = 1$ (для всіх $V_i \in L_k$), а для всіх решта вершин графа, крім граничних для ланцюга, визначимо серединну умову як $r_i(V_i) = -1$. Граничні вершини алгоритм перевіряє окремо. У цьому разі ланцюг L_k між V_a і V_b буде покривати точно ті і лише ті вершини, які позначені серединною умовою $r_i(V_i) = 1$, бо такий ланцюг існує за припущенням. Зауважимо, що замість серединної умови $r_i(V_i) = 1$ можна визначити умову $r_i(V_i) = 0$, бо алгоритм шукає максимальний ланцюг між V_a і V_b. Якщо є коротший ланцюг між V_a і V_b з вершин $r_i(V_i) = 0$, то він буде відхилений за основною властивістю алгоритму побудови максимального ланцюга. Можна сказати, що позначення вершин серединною умовою $r_i(V_i) = 1$ швидше знаходить розв'язок задачі, ніж позначення $r_i(V_i) = 0$, бо скорочується кількість варіантів пошуку. Отже, для будь-якого існуючого ланцюга між V_a і V_b можна скласти підмножину вершин, які належать ланцюгу $\{V_i\}_k \in L_k$, і вибираючи зазначені серединні умови, отримати покриття підмножини деяким ланцюгом.

Твердження 3.2. Ізольована серединна умова типу 3 конструктивно неповна щодо шляхів.

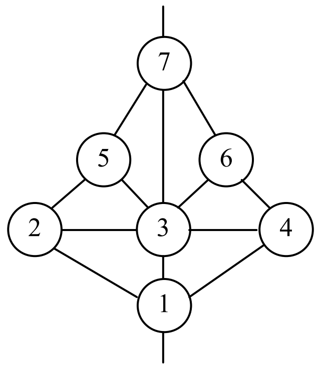

Рис. 3. Фрагмент графа 3

Доведення. Доведення цього твердження є продовженням доведення твердження 3.1. Для будь-якого існуючого ланцюга між V_a і V_b можна скласти підмножину вершин, які належать ланцюгу $\{V_i\}_k \in L_k$, і отримати розв'язок на такій підмножині. Проте декілька різних ланцюгів можуть покривати ту саму підмножину вершин за рахунок зміни порядку обходу вершин $\{V_i\}_k \in L_{k1}$, $\{V_i\}_k \in L_{k2}$, …, $\{V_i\}_k \in L_{kt}$. Довжини всіх ланцюгів однакові і дорівнюють кількості елементів підмножини $\{V_i\}_k$: $|L_{k1}| = |L_{k2}| = ... = |L_{kt}| = |\{V_i\}_k|$. Розв'язком задачі буде лише один з L_{kj}. Серединна умова типу 3 не визначає способу вибору конкретного ланцюга з декількох рівних за довжиною, отже, є конструктивно неповною щодо шляхів.

Розглянемо, наприклад, фрагмент графа на рис.3, який має входити до максимального ланцюга. Нехай до ланцюга має входити підмножина вершин $\{1,2,3,6,7\}$. Тоді визначаємо серединну умову $Z_1 = \{V_1, V_2, V_3, V_6, V_7, -V_4, -V_5\}$, за якою отримаємо розв'язок 1-2-3-6-7. Такий самий розв'язок можна отримати і за серединною умовою $Z_2 = \{-V_4, -V_5\}$, бо він дає найдовший ланцюг на підмножині $\{1,2,3,6,7\}$. Якщо потрібно ввести до ланцюга підмножину вершин $\{1,2,3,7\}$, тоді серединна умова буде $Z_3 = \{V_1, V_2, V_3, V_7, -V_4, -V_5, -V_6\}$, за якою отримаємо розв'язок 1-2-3-7. Зауважимо, що, наприклад, для умови $Z_4 = \{V_1, V_2, V_3, V_4, V_7, -V_5, -V_6\}$ побудувати розв'язок неможливо, бо для підмножини вершин $\{1,2,3,4,7\}$ неможливо побудувати послідовність суміжних пар (V_1, V_{i1}), …, (V_{it}, V_7), тобто не виконується умова сполучення в ланцюг.

Нехай до ланцюга треба ввести підмножину $\{1,2,3,5,7\}$. Тоді серединна умова набуде вигляду: $Z_5 = \{V_1, V_2, V_3, V_5, V_7, -V_4, -V_6\}$. За такою умовою можливими є три розв'язки: 1-2-3-5-7, 1-2-5-3-7, 1-3-2-5-7. Серединна умова типу 3 не визначає способу вибору одного з трьох розв'язків. Знайдений буде лише один з трьох, два інші не будуть, отже, неможливо побудувати всі прості ланцюги.

7. ВИСНОВКИ

На підставі наведених означень серединних умов можна будувати алгоритми та проекти щодо обчислень максимальних ланцюгів неповного графа за різними критеріями. Залежно від формулювання конкретної задачі є змога обрати один з трьох критеріїв: обов'язкова наявність підмножини вершин в шуканому ланцюгу, виключення підмножини вершин з шуканого ланцюга, одночасна наявність однієї підмножини вершин в ланцюгу і виключення іншої підмножини з порожнім перетином щодо першої. Сформульовано і доведено твердження про властивості серединних умов щодо конструктивної повноти, які визначають рішення про вибір конкретної серединної умови.

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. *Нікольський Ю.В.* Дискретна математика: підручник / Ю.В. Нікольський, В.В. Пасічник, Ю.М. Щербина; за заг. ред. М.З. Згуровського. – К.: Видавнича група BHV, 2007. – 368 с.
2. *Черняхівський В.В.* Рекурсивний алгоритм побудови максимального простого ланцюга неповного графа / В.В.Черняхівський // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. прикл. матем. та інформ. – 2007. – Вип. 13. – С. 45–50.
3. *Черняхівський В.* Серединні умови задач побудови максимальних простих ланцюгів неповного графа / В. Черняхівський // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. прикл. матем. та інформ. – 2008. – Вип. 14. – С. 204–209.
4. *Fomin F.V.* Graph searching, elimination trees, and a generalization of bandwidth / F.V. Fomin, P. Heggernes, J.A. Telle // Lecture Notes in Computer Science. – 2003. – Vol. 2751. – P. 73–85.
5. *Hvalica D.* Searching for a minimal solution subgraph in explicit and/or graphs / D.Hvalica // Discrete Applied Mathematics Science. – 2001. – Vol. 110, No 2–3. – P. 213–225.

6. *Korf R.* Best-first minimax search / R. Korf, D. Chickering // Artif. Intell. – 84. – 1996. – Vol. 1–2 (July). – P. 299–337.
7. *Recuero A.* Algorithms for path searching and for graph connectivity analysis / A. Recuero // Advances in Engineering Software Science. – 1995. – Vol. 23, No 1. – P. 27–35.
8. *Korf R.E.* Frontier Search / R.E. Korf, W. Zhang, I. Thayer, H. Hohwald // Journal of the ACM. – 2005. – Vol. 52, No 5. – P. 715–748.
9. *Rosen K.H.* Discrete Mathematics and Its Applications / K.H. Rosen. – MsGraw-Hill, 2002.

Стаття: надійшла до редколегії 26.09.2012
доопрацьована 29.11.2012
прийнята до друку 05.12.2012

ИЗОЛИРОВАННЫЕ СЕРЕДИННЫЕ УСЛОВИЯ И ИХ СВОЙСТВА ДЛЯ ЗАДАЧИ МАКСИМИЗАЦИИ ПОСТРОЕНИЯ ПРОСТОЙ ЦЕПИ ГРАФА

В. Черняховский

Львовский национальный университет имени Ивана Франко,
ул. Университетская, 1, Львов, 79000, e-mail: v_chrn@franko.lviv.ua

Для задачи построения максимальной простой цепи графа определено понятие серединного условия. Построено определение серединных условий типа 1, 2 и 3 для случая взаимной независимости вершин графа. Определено понятие конструктивной полноты изолированных серединных условий. Сформулированы и доказаны утверждения о свойствах серединных условий относительно конструктивной полноты.

Ключевые слова: граф, простая цепь, максимизация, серединное условие, конструктивная полнота условия, свойство условия.

ISOLATED MEDIAL CONDITIONS AND THEIR PROPERTIES FOR THE MAXIMIZATION PROBLEM OF CONSTRUCTING A SIMPLE CIRCUIT GRAPH

V. Chernyakhivskij

Ivan Franko National University of Lviv,
Universytetska Str., 1, Lviv, 79000, e-mail: v_chrn@franko.lviv.ua

Defined the concept of the middle condition in the construction problem of the longest possible simple chain of a graph. Constructed the definition of the middle conditions of types 1, 2 and 3 for the case of mutual independence of graph's vertices. Defined the concept of structural completeness of isolated middle conditions. Formulated and proved the statements about middle conditions properties concerning the constructive completeness.

Key words: graph, simple chain, maximization, middle condition, constructive completeness of the condition, condition property.