ISSN 2078–5097. Вісн. Львів. ун-ту. Сер. прикл. матем. та інф. 2013. Вип. 20. С. 19–33
Visnyk of the Lviv University. Series Appl. Math. and Informatics. Issue 20. P. 19–33

УДК 519.6:517.925

АНАЛІЗ ЗАДАЧ ПРО ВИМУШЕНІ ГАРМОНІЙНІ ВІБРУВАННЯ ПРУЖНИХ ТІЛ ТА ПОБУДОВА НАДІЙНИХ АПРОКСИМАЦІЙ МСЕ ДЛЯ ЇХНІХ РОЗВ'ЯЗКІВ

Г. Квасниця[1], Ф. Чабан[1], Г. Шинкаренко[1,2]

[1]Львівський національний університет імені Івана Франка,
вул. Університетська, 1, Львів, 79000, e-mail: cfedir@gmail.com
[2]Політехніка Опольська, Ополе, Польща, e-mail: h.shynkarenko@po.opole.pl

Сформульовано варіаційну задачу про амплітуди вектора швидкостей пружних зміщень тіла з миттєвою пам'яттю, яке виконує усталені вимушені коливання під впливом гармонійних навантажень заданої кругової частоти. Визначено умови коректності цього класу задач, досліджено енергетичні характеристики їхніх розв'язків і знайдено апріорні оцінки збіжності їхніх апроксимацій методом скінченних елементів (МСЕ). На доповнення цьому побудовано апостеріорні оцінювачі похибок (АОП) апроксимацій МСЕ, які допомагають обчислити розподіл енергетичних норм похибок шляхом розв'язування локальних задач про лишки на кожному скінченному елементі.

Ключові слова: вимушені гармонійні коливання, амплітуди швидкостей зміщень, енергетичні характеристики, метод скінчених елементів, апріорні оцінки збіжності, апостеріорний оцінювач похибок апроксимацій МСЕ.

1. ВСТУП

Серед різноманітних хвильових процесів важливе місце займає поширення гармонійних хвиль у пружних тілах та рідинах [1, 2, 4, 12]. У багатьох застосуваннях аналіз їхньої поведінки виконується за умов дії монохроматичних джерел збурення з деякою заданою частотою $\omega = const > 0$. Незважаючи на суттєві спрощення задач еластодинаміки завдяки виокремленню часової змінної, одержувані крайові задачі про амплітуди гармонійних хвиль здебільшого залишаються занадто складними для розв'язування аналітичними методами і ставлять низку високих вимог до поширених обчислювальних методів таких, як метод скінченних елементів [7, 14].

Апроксимації МСЕ в задачах еластодинаміки, що описують вимушені коливання пружних тіл, характеризуються втратою точності обчислень на високих частотах усталених коливань і частотах, близьких до резонансних. Для виявлення й аналізу похибок знайдених апроксимацій МСЕ в цій статті пропонується схема побудови їхніх апостеріорних оцінок похибок на кожному скінченному елементі тріангуляції, яка була запропонована в статтях [5,6] для задач еластостатики і з успіхом застосували [8, 9, 13].

Структура статті така. В п. 2 ми подаємо формулювання початково-крайової та відповідної їй варіаційної задачі еластодинаміки в термінах вектора пружних зміщень, запозичену з [7]. З огляду на ці результати п.3 присвячено побудові варіаційних задач для часткового випадку, який описує поширення гармонійних хвиль у пружних матеріалах із миттєвою пам'яттю під впливом розподілених гармонійних навантажень з фіксованою частотою коливань. Аналіз таких задач особливо важливий для лінійних середовищ з дисперсією, коли збурення, які залежать від часу, наближають у вигляді сукупності гармонійних хвиль [1, 4]. Тому, вибираючи за основні невідомі амплітуди швидкостей зміщень, в п. 4 ми визначаємо достатні умови коректності варіаційної задачі про вимушені гармонійні коливання таких в'язкопружних середовищ. Там само визначаємо важливу характеристику вимушених усталених коливань, а саме, що розглядувана варіаційна задача належить до класу задач про сідлову точку (або, в іншій термінології, про точку мінімаксу) деякого квадратичного функціонала. Ця властивість структури задач про гармонійні хвилі потребує належної уваги до побудови схем МСЕ, оскільки за цих умов його наближення втрачають властивість найліпшого наближення елементами вибраного простору апроксимацій.

У п. 5 описуємо особливості апроксимації розглядуваного класу задач методом скінченних елементів і подаємо апріорні оцінки швидкості його збіжності за стандартних допущень щодо вибору просторів апроксимацій, структура яких виявляється дуже близькою до тих оцінок, що визначені для задач еластостатики, див. наприклад [7]. Ми доповнюємо наш розгляд МСЕ конкретизацією побудови його системи лінійних алгебричних рівнянь в п. 6. І, наслідуючи методику [5, 6, 8] для задач еластостатики, в пп. 7, 8 формулюємо задачу про похибку апроксимацій МСЕ і пропонуємо спосіб її наближеного розв'язування, який полягає у послідовному обчисленні апостеріорних оцінювачів похибок шляхом розв'язування локальних варіаційних задач про лишок знайденої апроксимації МСЕ на кожному скінченому елементі.

2. ФОРМУЛЮВАННЯ ЗАДАЧ ЕЛАСТОДИНАМІКИ

Нехай пружне тіло займає обмежену зв'язну області Ω точок $x=(x_1,\dots,x_d)$ евклідового простору R^d з неперервною за Ліпшицем границею Γ, одиничний вектор зовнішньої нормалі до якої позначатимемо через $n=(n_1,\dots,n_d)$, де $n_i=\cos(n,x_i)$. Далі розглядатимемо таку початково-крайову задачу еластодинаміки: знайти вектор пружних зміщень $u=\{u_i(x,t)\}_{i=1}^d$ такий, що задовольняє рівняння еластодинаміки (скрізь далі передбачаємо звичайне підсумовування за індексами, які повторюються)

$$\begin{cases} \rho(u_i''-f_i)-\sigma_{ij,j}=0, \\ \sigma_{ij}:=c_{ijkm}\varepsilon_{km}(u)+a_{ijkm}\varepsilon_{km}(u'), \\ \varepsilon_{ij}(u):=\tfrac{1}{2}(u_{i,j}+u_{j,i}) \quad \text{в} \quad \Omega\times(0,T], \end{cases} \tag{1}$$

крайові умови

$$\begin{cases} u_i=0 \;\; на \;\; \Gamma_u\times[0,T], \;\; \Gamma_u\subset\Gamma, \;\; mes(\Gamma_u)>0, \\ \quad \sigma_{ij}n_j=\widehat{\sigma}_i \;\; на \;\; \Gamma_\sigma\times[0,T], \;\; \Gamma_\sigma=\Gamma\setminus\Gamma_u, \end{cases} \tag{2}$$

та початкові умови

$$u|_{t=0}=u^0, \quad u'|_{t=0}=v^0 \quad в \;\; \Omega. \tag{3}$$

Тут $\rho=\rho(x)>0$ – густина маси, $f=\{f_i(x,t)\}_{i=1}^d$ і $\widehat{\sigma}=\{\widehat{\sigma}_i(x,t)\}_{i=1}^d$ – вектори об'ємних і поверхневих сил, відповідно, $\sigma_{ij}(x,t)$ і $\varepsilon_{ij}(x,t)$ – компоненти симетричних тензорів напружень і деформацій, відповідно, складові $a_{ijkm}(x)$ і $c_{ijkm}(x)$ описують елементи тензорів в'язкості та пружності матеріалу пружного тіла зі звичайними властивостями симетрії та еліптичності, а саме

$$\begin{cases} a_{ijkm} = a_{jikm} = a_{kmij}, \\ a_{ijkm}\varepsilon_{ij}\varepsilon_{km} \ge \alpha_0\varepsilon_{ij}\varepsilon_{ij} \quad \alpha_0 = const > 0 \\ \forall \varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ji} \in R \text{ майже скрізь в } \Omega \end{cases} \tag{4}$$

та

$$\begin{cases} c_{ijkm} = c_{jikm} = c_{kmij}, \\ c_{ijkm}\varepsilon_{ij}\varepsilon_{km} \ge c_0\varepsilon_{ij}\varepsilon_{ij} \quad c_0 = const > 0 \\ \forall \varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ji} \in R \text{ майже скрізь в } \Omega. \end{cases} \tag{5}$$

На додаток до цього будемо вважати, що дані початково-крайової задачі (1)–(3) задовольняють такі умови регулярності:

$$\rho,\ a_{ijkm},\ a_{ijkm} \in L^\infty(\Omega),\ f \in L^2\left(0,T;[L^2(\Omega)]^d\right),\ \hat{\sigma} \in L^2\left(0,T;L^2[(\Gamma_\sigma)]^d\right). \tag{6}$$

Введемо простір $H = [L^2(\Omega)]^d$, простір допустимих пружних зміщень

$$V = \left\{ v \in \left[H^1(\Omega)\right]^d :\ v = 0 \text{ на } \Gamma_u \right\}$$

і позначимо через V' спряжений до нього простір. З огляду на початково-крайову задачу еластодинаміки (1)–(3), наведемо відповідне їй варіаційне формулювання [3]

$$\begin{cases} \text{задано } u_0 \in V,\ v_0 \in H \text{ та } l \in L^2(0,T;V') \\ \text{знайти } u \in L^\infty(0,T;V) \cap L^2(0,T;V) \text{ таке, що} \\ m(u''(t),v) + a(u'(t),v) + c(u(t),v) = \langle l(t),v \rangle,\ \forall t \in (0,T] \\ m(u'(0)-v_0,v) = 0, \qquad c(u(0)-u_0,v) = 0\ \forall v \in V, \end{cases} \tag{7}$$

де білінійні та лінійні форми визначаються такими виразами:

$$m(u,v) = \int_\Omega \rho u_i v_i dx,\ a(u,v) = \int_\Omega a_{ijkm}\varepsilon_{ij}(u)\varepsilon_{km}(v)dx,$$

$$c(u,v) = \int_\Omega c_{ijkm}\varepsilon_{ij}(u)\varepsilon_{km}(v)dx,\ \langle l,v \rangle = \int_\Omega \rho f_i v_i dx + \int_{\Gamma_\sigma} \hat{\sigma}_i v_i d\gamma\ \forall v \in V. \tag{8}$$

Можна довести, наприклад [3], що за визначених вище (і цілком прийнятних для застосувань) умов на дані, варіаційна задача еластодинаміки (7) коректно сформульована, іншими словами, задача (7) має єдиний і водночас стійкий розв'язок $u \in L^\infty(0,T;H) \cap L^2(0,T;V)$.

3. ФОРМУЛЮВАННЯ ВАРІАЦІЙНИХ ЗАДАЧ ПРО УСТАЛЕНІ ВІБРУВАННЯ

За умов, що навантаження змінюються гармонійно в часі з круговою частотою $\omega = const > 0$ за законом вигляду

$$l(t) = l_1 \cos\omega t + l_2 \sin\omega t \quad \forall t \in (0,T], \tag{9}$$

наближені розв'язки задачі (7) відшукують у вигляді лінійної комбінації

$$u(x,t) = u^1(x)\cos\omega t + u^2(x)\sin\omega t, \tag{10}$$

де $u^1 = u^1(x)$, $u^2 = u^2(x)$ – невідомі амплітуди пружних зміщень. За таких умов, наприклад, можна записати розвинення

$$u'(t) \cong -\omega\left[u^1 \sin\omega t - u^2 \cos\omega t\right] = s^1 \cos\omega t + s^2 \sin\omega t,$$

де амплітуди швидкостей зміщень визначено згідно з правилами

$$s^1(x) := \omega u^2(x),\ s^2(x) := -\omega u^2(x) \quad \forall\, x \in \Omega. \tag{11}$$

Підставивши розвинення (9) та наближення (10) у рівняння задачі (7) і знехтувавши її початковими умовами, отримуємо варіаційну задачу про амплітуди швидкостей зміщень вимушених гармонійних вібрувань (або, в іншій термінології, коливань) пружного тіла:

$$\begin{aligned}
&\textit{задано кругову частоту } \omega = const > 0,\ (l_1, l_2) \in W' = V' \times V' \\
&\textit{знайти амплітуди швидкостей } \phi = (s^1, s^2) \in W = V \times V \textit{ такі, що} \\
&\omega m(s^2, v^1) + a(s^1, v^1) - \omega^{-1} c(s^2, v^1) = \langle l_1, v^1 \rangle \qquad \forall\, v^1 \in V, \\
&-\omega m(s^1, v^2) + a(s^2, v^3) - \omega^{-1} c(s^1, v^2) = \langle l_2, v^2 \rangle \qquad \forall\, v^2 \in V.
\end{aligned} \tag{12}$$

Безпосередньо зі структури одержаної системи варіаційних рівнянь можна зробити висновок, що задача про амплітуди швидкостей (12) стає сингулярно збуреною, якщо частота вимушених коливань $\omega \to \infty$. У такому випадку обчислення наближених розв'язків варіаційної задачі (12) потребує надійного контролю за розподілом похибок і відповідного адаптування числових схем. З огляду на метод скінченних елементів, належним інструментом кваліфікованого обчислювального експерименту можуть слугувати оцінювачі похибок апроксимацій МСЕ та $h-$адаптивні схеми на їхній основі, наприклад, [5, 9]. З цих міркувань щойно одержана задача (12) буде основним об'єктом дослідження цієї статті. Зауважимо, що за відсутності ефекту в'язкості система варіаційних рівнянь задачі (12) поділяється, результатом чого стають дві незалежно розв'язувані задачі вигляду:

$$\begin{cases}
\textit{задано кругову частоту } \ \omega = const > 0,\ \ l_i \in V'; \\
\textit{знайти вектор амплітуд швидкостей } s^i \in V \textit{ такий, що} \\
\qquad \omega m(s^i, v) - \omega^{-1} c(s^i, v) = < l_i, v > \qquad \forall v \in V, \quad i = 1, 2.
\end{cases}$$

Наочні спрощення у цьому частковому випадку роблять видимими нові важливі особливості структури вимушених усталених коливань, тобто, режими резонансних коливань. Аналізу задач такого ґатунку та питанням побудови схем МСЕ їхнього розв'язування присвячена праця [6].

Натомість, якщо частота вимушених коливань $\omega \to 0$, то в граничному випадку задача (12) потребує належних підправлень. Повертаючись до визначень (9), (10) і (11), результатом граничного переходу в рівняннях задачі (12) з $\omega \to 0$ одержуємо варіаційну задачу еластостатики:

$$\begin{cases}
\textit{задано } \ l_1 \in V'; \\
\textit{знайти вектор } \ \textit{зміщень } u^1 \in V \textit{ такий, що} \\
\qquad c(u^1, v) = < l_1, v > \qquad \forall v \in V.
\end{cases}$$

Побудову $h-$адаптивних апроксимацій МСЕ з використанням квадратичних наближень зміщень на трикутних скінченних елементах та АОП бульбашкової структури для щойно сформульованої задачі еластостатики подано в статті [6]. Результати виконаних в цій статті обчислювальних експериментів та порівняння їх із добре відомою схемою Zienkiewicz-Zhu [11] виявилися настільки успішними, що згадана схема вибрана тут за основу побудови $h-$адаптивних апроксимацій МСЕ для відшукання розв'язків задачі про амплітуди швидкостей зміщень (12).

4. ЕКВІВАЛЕНТНА ВАРІАЦІЙНА ЗАДАЧА МІНІМАКСУ

Враховуючи варіаційну задачу (12), на просторі допустимих функцій W визначимо квадратичний функціонал вигляду

$$\begin{gathered} L(\omega; v^1, v^2) := \omega m(v^1, v^2) + \frac{1}{2}\left[a(v^1, v^1) - a(v^2, v^2)\right] - \omega^{-1} c(v^1, v^2) \\ -\langle l_1, v^1 \rangle + \langle l_2, v^2 \rangle \qquad \forall\ \varphi = (v^1, v^2) \in W \end{gathered} \tag{13}$$

і розглянемо таку задачу мінімаксу:

$$\begin{cases} \textit{задано частоту } \omega = const > 0,\ (l_1, l_2) \in W' = V' \times V'; \\ \quad \textit{знайти вектор } \phi = (s^1, s^2) \in W \textit{ такий, що} \\ \quad \sup\limits_{v \in V} L(\omega; s^1, v) \le L(\omega; s^1, s^2) \le \inf\limits_{v \in V} L(\omega; v, s^2). \end{cases} \tag{14}$$

Теорема (про еквівалентну задачу мінімаксу). Задача про систему варіаційних рівнянь гармонійного вібрування (12) еквівалентна задачі мінімаксу (14).

Доведення. Припустимо, що вектор $\phi = (s^1, s^2) \in W$ є розв'язком задачі (12), і розглянемо значення $L(\omega; s^1 + \varepsilon v^1, s^2 + \varepsilon v^2)$. Використовуючи лінійність складових його форм за кожним аргументом та симетрію білінійних форм, після зведення подібних одержимо

$$\begin{aligned} L\left(\omega; s^1 + \varepsilon v^1, s^2 + \varepsilon v^2\right) &= L\left(w; s^1, s^2\right) \\ &+ \varepsilon\left\{\left[\omega m\left(s^2, v^1\right) + a\left(s^1, v^1\right) - \omega^{-1} c\left(s^2, v^1\right) - \left\langle l_1, v^1 \right\rangle\right]\right. \\ &- \left.\left[\omega m\left(s^2, v^1\right) + a\left(s^1, v^1\right) - \omega^{-1} c\left(s^1, v^2\right) - \left\langle l_2, v^2 \right\rangle\right]\right\} \\ &+ \varepsilon^2\left[a\left(v^1, v^1\right) - a\left(v^2, v^2\right)\right] \qquad \forall \varepsilon \in R \quad \forall \phi = \left(v^1, v^2\right) \in W \end{aligned}$$

або після врахування системи рівнянь із задачі (10)

$$\begin{gathered} L(\omega; s^1 + \varepsilon v^1, s^2 + \varepsilon v^2) = L(w; s^1, s^2) + \varepsilon^2\left[a(v^1, v^1) - a(v^2, v^2)\right] \\ \forall \varepsilon \in R \quad \forall \varphi = (v^1, v^2) \in W. \end{gathered} \tag{15}$$

Прийнявши у (15), наприклад, $v^1 = 0$ (а це допустимо!), знаходимо, що

$$L(\omega; s^1, s^2 + \varepsilon v^2) = L(w; s^1, s^2) - \varepsilon^2 a(v^2, v^2) \quad \forall \varepsilon \in R \quad \forall v^2 \in V$$

або внаслідок додатної визначеності білінійної форми $a(\ \cdot, \cdot\ ) : V \times V \to R$

$$L(\omega; s^1, s^2 + \varepsilon v^2) \le L(w; s^1, s^2) \quad \forall \varepsilon \in R \quad \forall v^2 \in V,$$

що й доводить правильність лівої нерівності з задачі (14). Подібно, прийнявши $v^2 = 0$ у (16), переконуємося також у правильності правої із нерівностей задачі (14). Отже, кожен розв'язок $\phi = (s^1, s^2) \in W$ задачі (12) є одночасно і розв'язком задачі (14).

Навпаки, припустимо, що вектор $\phi = (s^1, s^2) \in W$ є розв'язком задачі (14), тоді, наприклад, буде правильною нерівність

$$L(\omega; s^1, s^2 + \varepsilon v^2) \le L(w; s^1, s^2) \quad \forall \varepsilon \in R \quad \forall v^2 \in V.$$

Після зведення подібних цій рівності можна надати вигляду

$$0 \geq \varepsilon\left[-\omega m\left(s^1,v^2\right)+a\left(s^2,v^2\right)+\omega^{-1}c\left(s^1,v^2\right)-\left\langle l_2,v^2\right\rangle\right]$$
$$+\varepsilon^2 a\left(v^2,v^2\right) \qquad \forall \varepsilon \in R \quad \forall v^2 \in V,$$

що можливо лише в тому випадку, коли пара $\phi=\left(s^1,s^2\right)\in W$ задовольняє друге з рівнянь задачі (12). Зрештою, подібним способом можна переконатися, що ця пара задовольняє й перше рівняння задачі (12).

Зауважимо, що щойно доведена теорема визначає важливу характеристику розглядуваних варіаційних задач про гармонійне вібрування пружних тіл: вона засвідчує, що вони належать до так званих змішаних варіаційних задач. Не вдаючись до питань аналізу та числового розв'язування цього класу задач, ми відсилаємо читача до фундаментальної монографії [10].

Зазначимо, що теорема еквівалентності задач (12) та (14) залишає відкритим питання існування, єдиності та стійкості їхніх розв'язків.

5. КОРЕКТНІСТЬ ВАРІАЦІЙНОЇ ЗАДАЧІ ПРО ВИМУШЕНЕ ВІБРУВАННЯ

Переходячи до аналізу коректності формулювання задачі (12) чи, що еквівалентно, задачі (14), зауважимо, див. наприклад, [3, 9], що симетричні білінійні форми $c(\cdot,\cdot): V\times V \to R$ і $a(\cdot,\cdot): V\times V\to R$ є неперервними і $V-$еліптичними, що дає змогу на просторі допустимих зміщень V визначити еквівалентні енергетичні норми

$$\|u\|_V := c^{1/2}(u,u), \ |u|_V := a^{1/2}(u,u) \quad \forall\, u\in V. \tag{16}$$

Подібні властивості має білінійна форма $m(\cdot,\cdot): H\times H\to R$, тобто, вона є симетричною, неперервною, $H-$еліптичною і породжує норму

$$\|u\|_H := m^{1/2}(u,u) \qquad \forall u\in H.$$

Щоб спростити майбутнє викладення, для будь-яких $\omega>0$ визначимо білінійну форму

$$B(\omega;\phi,\varphi):=\omega\left[m(s^2,v^1)-m(s^1,v^2)\right]+\left[a(s^1,v^1)+a(s^2,v^2)\right]+$$
$$-\omega^{-1}\left[c(s^2,v^1)-c(s^1,v^2)\right] \qquad \forall\phi=(s^1,s^2),\ \varphi=(v^1,v^2)\in W$$

і лінійний функціонал

$$<\chi,\varphi>:=\sum_{i=1}^{2}<l_i,v^i> \qquad \forall\varphi=(v^1,v^2)\in W.$$

Використавши ці позначення, надамо задачі (12) дещо коротшого запису

$$\begin{cases} \textit{задано частоту } \omega=const>0,\ \chi=\left(l_1,l_2\right)\in W';\\ \textit{знайти вектор } \phi=\left(s^1,s^2\right)\in W \textit{ такий, що}\\ B(\omega;\phi,\varphi)=\langle\chi,\varphi\rangle \qquad \forall\ \varphi=\left(v^1,v^2\right)\in W.\end{cases} \tag{17}$$

Теорема (про коректність варіаційної задачі про амплітуди швидкостей гармонійних вібрувань). Нехай частина межі Γ_u пружного тіла, що займає обмежену зв'язну область $\Omega\subset R^d$ з неперервною за Ліпшицем межею Γ, має ненульову міру, $mes\,\Gamma_u>0$, і на додаток його фізико-механічні характеристики та навантаження задовольняють умови (4)–(6). Тоді варіаційна задача (12) або, що еквівалентна, задачі мінімаксу (14) має єдиний розв'язок $\phi=\left(s^1,s^2\right)\in W$ і такий, що

$$\|\phi\|_W \leq \|\chi\|_* \qquad \forall\omega>0, \tag{18}$$

де норма на просторі W визначається згідно з правилом

$$\|\varphi\|_W := \sqrt{B(\omega;\varphi,\varphi)} \quad \forall\ \varphi \in W \tag{19}$$

і

$$\|\chi\|_* := \sup_{0\neq\varphi\in W} \frac{|\langle\chi,\varphi\rangle|}{\|\varphi\|_W}.$$

Доведення коректності задачі (17) виконаємо на підставі міркувань з праці [8]. Введемо на просторі допустимих амплітуд швидкості W скалярний добуток згідно з правилом

$$(\phi,\varphi) := \sum_{i=1}^{2} a(s^i,v^i) \quad \forall\ \phi=(s^1,s^2),\ \varphi=(v^1,v^2)\in W \tag{20}$$

та відповідну йому енергетичну норму

$$\|\varphi\|_W := \sqrt{(\varphi,\varphi)} \qquad \forall\ \varphi\in W. \tag{21}$$

Ключовим фактом цього доведення є рівність

$$B(\omega;\varphi,\varphi) = \|\varphi\|_W^2 \quad \forall\ \varphi\in W \quad \forall\ \omega>0, \tag{22}$$

яка негайно визначає $W-$еліптичність білінійної форми $B(\omega;\cdot,\cdot): W\times W \to R$ із задачі (17). Використовуючи нерівність Буняковського-Шварца, можна довестити, що складові форми задачі (15) неперервні або, іншими словами, обмежені

$$|B(\omega;\phi,\varphi)| \le C\max\{\omega^{-1},1,\omega\}\ \|\phi\|_W\ \|\varphi\|_W,$$

$$|<\chi,\varphi>| \le M\|\varphi\|_W, \qquad \forall \phi,\varphi\in W$$

зі сталими $C, M>0$, значення яких не залежать від величин, які нас можуть цікавити. Зважаючи на ці властивості, норму (21) та лему Лакса-Мільграма-Вишика, робимо висновок, що існує єдиний вектор $\phi=(s^1,s^2)\in W$, який задовольняє рівняння задачі (17) та умову стійкості (18).

Коректність еквівалентних варіаційних задач про гармонійне вібрування (12), (14) чи (17) надає досить велику свободу вибору числових методів їхнього розв'язування. Перше, ніж їх використати, ми виконаємо деякий додатковий аналіз структури розглядуваної варіаційної задачі.

6. ЕНЕРГЕТИЧНА ХАРАКТЕРИСТИКА ВАРІАЦІЙНОЇ ЗАДАЧІ

Ми розпочнемо з рівняння балансу енергії, яке задовольняє розв'язок $u=u(t)$ варіаційної задачі еластодинаміки (7) (детальніше див. [3]),

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left[m(u'(t),u'(t))+c(u(t),u(t))\right]+a(u'(t),u'(t)) = \langle l(t),u'(t)\rangle, \quad \forall\ t\in(0,T]$$

або після інтегрування в часі та врахування початкових умов варіаційної задачі

$$\frac{1}{2}\left[m(u'(T),u'(T))+c(u(T),u(T))\right]+\int_0^T a(u'(t),u'(t))\,dt =$$

$$= \frac{1}{2}\left[m(v^0,v^0)+c(u^0,u^0)\right]+\int_0^T <l(t),u'(t)>dt.$$

Тут вирази

$$E(t) := \frac{1}{2}\left[m(u'(t),u'(t))+c(u(t),u(t))\right]$$

і

$$D(t) := a\,(u'(t), u'(t))$$

подають значення повної енергії руху пружного тіла та її дисипації на момент часу t, відповідно.

Підставивши до останнього рівняння розвинення (9) та (10), дослідимо структуру цього рівняння для випадку вимушеного гармонійного пружного вібрування.

Лема (про дисипацію гармонійного вібрування). Нехай виконуються умови теореми про коректність задачі (17) і $\phi = (s^1, s^2) \in W$ є її розв'язком. Позначимо через $T := \pi\omega^{-1}$ – півперіод гармонійного вібрування. Тоді поводження в часі дисипації енергії пружного вібрування описується функцією вигляду

$$\begin{aligned} D(t) &:= \frac{1}{2}\Big[\|\phi\|_W^2 + D_c(\phi)\cos 2\omega t + D_s(\phi)\sin 2\omega t\Big] \\ &= \frac{1}{2}\Big[\|\phi\|_W^2 + \sqrt{D_c^{\,2}(\phi) + D_s^{\,2}(\phi)}\,\cos(2\omega t - \delta_D)\Big], \quad \forall t \in [0, T], \end{aligned}$$

де

$$\begin{cases} D_c(\phi) := 4a\left(\dfrac{s^1 + s^2}{2}, \dfrac{s^1 - s^2}{2}\right) = |v^1|_V^2 - |v^2|_V^2, \\ D_s(\phi) := 2a(s^1, s^2) = 2\left[\left|\dfrac{v^1 + v^2}{2}\right|_V^2 - \left|\dfrac{v^1 - v^2}{2}\right|_V^2\right], \\ \delta_D := arctg\,\dfrac{D_s(\phi)}{D_c(\phi)}. \end{cases}$$

На додаток до цього

$$\|\phi\|_W^2 = \frac{2}{T}\int_0^T \left|s^1\cos\omega t + s^2\cos\omega t\right|_V^2 dt \quad \forall\ \varphi = (v^1, v^1) \in W.$$

Доведення розпочнемо з ланцюжка перетворень

$$\begin{aligned} \left|v^1\cos\omega t + v^2\sin\omega t\right|_V^2 &= a\big(v^1\cos\omega t + v^2\sin\omega t, v^1\cos\omega t + v^2\sin\omega t\big) \\ &= \frac{1+\cos\omega t}{2}a(v^1, v^1) + \frac{1-\cos\omega t}{2}a(v^2, v^2) + \sin 2\omega t a(v^1, v^2) \\ &= \frac{1}{2}\big[a(v^1, v^1) + a(v^2, v^2)\big] + \frac{1}{2}\big[a(v^1, v^1) - a(v^2, v^2)\big]\cos 2\omega t \\ &\quad + \sin 2\omega t a(v^1, v^2). \end{aligned}$$

З огляду на те, що

$$\int_0^T \cos 2\omega t dt = \int_0^T \sin 2\omega t dt = 0,$$

одержуємо

$$\int_0^T \left|v^1\cos\omega t + v^2\sin\omega t\right|_V^2 dt = \frac{1}{2}\big[a(v^1, v^1) + a(v^2, v^2)\big] = \frac{1}{2}\|\varphi\|_W^2 \quad \forall\ \varphi = (v^1, v^1) \in W.$$

З іншого боку,

$$\left|v^1\cos\omega t+v^2\sin\omega t\right|_V^2=\frac{1}{2}\|\varphi\|_W^2+\frac{1}{2}\left[\left|v^1\right|_V^2-\left|v^2\right|_V^2\right]\cos 2\omega t+a\left(v^1,v^1\right)\sin 2\omega t$$

$$=\frac{1}{2}\|\varphi\|_W^2+2a\left(\frac{v^1+v^2}{2},\frac{v^1-v^2}{2}\right)\cos 2\omega t+\left[\left|\frac{v^1+v^2}{2}\right|_V^2-\left|\frac{v^1-v^2}{2}\right|_V^2\right]\sin 2\omega t$$

$$=\frac{1}{2}\|\varphi\|_W^2+\left\{4a^2\left(\frac{v^1+v^2}{2},\frac{v^1-v^2}{2}\right)+\left[\left|\frac{v^1+v^2}{2}\right|_V^2-\left|\frac{v^1-v^2}{2}\right|_V^2\right]\right\}^{\frac{1}{2}}\cos\left(z-2\omega t\right)$$

де

$$z=\arctan\frac{\left|v^1+v^2\right|_V^2-\left|v^1-v^2\right|_V^2}{2\left[\left|v^1\right|_V^2-\left|v^2\right|_V^2\right]}.$$

Подібно доводиться істинність такого твердження.

Лема (про енергію гармонійного вібрування). Нехай виконуються умови теореми про коректність задачі (17) і $\phi=\left(s^1,s^2\right)\in W$ є її розв'язком. Позначимо через $T:=\pi\omega^{-1}$ – півперіод гармонійного вібрування. Тоді поводження в часі енергії пружного вібрування описується функцією вигляду

$$E(t)=\frac{1}{2}\left[E_0(\phi)+E_c(\phi)\cos 2\omega t+E_s(\phi)\sin 2\omega t\right]$$
$$=\frac{1}{2}\left[E_0(\phi)+\sqrt{E_c^{\,2}(\phi)+E_s^{\,2}(\phi)}\cos(2\omega t-\delta_E)\right]\quad\forall t\in[0,T],$$

де

$$\begin{cases}E_0\left(\phi\right):=\frac{1}{2}\left\{\left[\left\|s^1\right\|_H^2+\omega^{-2}\left\|s^1\right\|_V^2\right]+\left[\left\|s^2\right\|_H^2+\omega^{-2}\left\|s^2\right\|_V^2\right]\right\},\\ E_c\left(\phi\right):=\frac{1}{2}\left\{\left[\left\|s^1\right\|_H^2+\omega^{-2}\left\|s^1\right\|_V^2\right]-\left[\left\|s^2\right\|_H^2+\omega^{-2}\left\|s^2\right\|_V^2\right]\right\},\\ E_s\left(\phi\right):=m\left(s^1,s^2\right)-\omega^{-2}c\left(s^1,s^2\right),\\ \delta_E:=arctg\frac{E_c\left(\phi\right)}{E_s\left(\phi\right)}.\end{cases}$$

Доведення розпочнемо з ланцюжка перетворень

$$\left\|s^1\cos\omega t+s^2\sin\omega t\right\|_H^2=m\left(s^1\cos\omega t+s^2\sin\omega t,s^1\cos\omega t+s^2\sin\omega t\right)$$

$$=\frac{1+\cos 2\omega t}{2}m\left(s^1,s^1\right)+\frac{1-\cos 2\omega t}{2}m\left(s^2,s^2\right)+\sin 2\omega t m\left(s^1,s^2\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left[m\left(s^1,s^1\right)+m\left(s^2,s^2\right)\right]+\frac{1}{2}\left[m\left(s^1,s^1\right)-m\left(s^2,s^2\right)\right]\cos 2\omega t+\sin 2\omega t m\left(s^1,s^2\right).$$

Запроваджуючи на просторі $H\times H$ норму

$$\|\varphi\|_H:=\sqrt{\left\|v^1\right\|_H^2+\left\|v^2\right\|_H^2}\qquad\forall\varphi=(v^1,v^2)\in H\times H\ ,$$

ми маємо змогу обчислювати поводження кінетичної енергії гармонійних хвиль, зокрема, вираз

$$\frac{1}{4}\|\phi\|_H^2 = \frac{1}{4}\left[\|s^1\|_H^2 + \|s^2\|_H^2\right]$$

описує усталену в часі частину цієї енергії.

З огляду на те, що

$$\int_0^T \cos 2\omega t dt = \int_0^T \sin 2\omega t dt = 0,$$

і

$$\int_0^T \|s^1 \cos\omega t + s^2 \sin\omega t\|_H^2 dt = \frac{T}{2}\|\phi\|_H^2 ,$$

одержуємо фізичну інтерпретацію введеної норми, а саме,

$$\frac{1}{4}\|\phi\|_H^2 = \frac{1}{2T}\int_0^T \|s^1 \cos\omega t + s^2 \sin\omega t\|_H^2 dt.$$

Наступний результат засвідчує властивості скалярного добутку (20) та асоційованої з ним норми (21) в просторі допустимих амплітуд W .

Наслідок (про енергетичні характеристики гармонійного вібрування). Нехай виконуються умови теореми про коректність задачі (17) і $\phi = (s^1, s^2) \in W$ є її розв'язком. Позначимо через $T := \pi\omega^{-1}$ – півперіод гармонійного вібрування. Тоді

$$\|\phi\|_W^2 = \frac{2}{T}\int_0^T |s^1 \cos\omega t + s^2 \sin\omega t|_V^2 dt = \langle \chi, \phi \rangle .$$

7. АПРОКСИМАЦІЇ МСЕ ТА ЇХНЯ ЗБІЖНІСТЬ

Схема Гальоркіна передбачає перенесення розв'язку варіаційної задачі (14) з простору $W := V \times V$ до його вибраного скінченновимірного підпростору $W_h := V_h \times V_h$, $V_h \subset V$, $\dim W_h = N(h) < +\infty$. Отож, дискретизована за Гальоркіним задача (14) набуває вигляду

$$\begin{cases} \textit{задано частоту } \omega = const > 0, \ \chi \in W' \\ \textit{простір апроксимацій } W_h \subset W, \ \dim W_h < +\infty \\ \textit{знайти вектор } \phi_h \in W \textit{ такий, що} \\ \qquad B(\omega; \phi_h, \varphi) = \langle \chi, \varphi \rangle \qquad \forall\ \varphi \in W_h . \end{cases} \tag{23}$$

Оскільки задача (14) коректно сформульована, то цю властивість має й дискретизована задача (23). З огляду на цей факт неважко переконатися [8], що за типових для МСЕ допущень є правильною теорема.

Теорема (про збіжність апроксимацій МСЕ). Нехай $\phi \subset W$ – розв'язок задачі (14), причому існує натуральне $k \ge 1$ таке, що $\phi \in W \cap [H^{k+1}(\Omega)]^{2d}$, і нехай апроксимації МСЕ ϕ_h визначаються розв'язуванням задачі (23) в просторах $W_h \subset W$, які побудовані з допомогою кусково-поліноміальних базисів МСЕ та мають таку властивість: для кожного $\varphi \in W \cap [H^{k+1}(\Omega)]^{2d}$, $k \ge 1$, існують $\varphi_h \in W_h$ та $S = const > 0$ такі, що

$$\|\varphi - \varphi_h\|_{m,\Omega} \le S \cdot h^{k+1-m} \|\varphi\|_{k+1,\Omega} , \ 0 \le m \le k ,$$

де h – діаметр сітки скінченних елементів; k – максимальний степінь повного полінома від d змінних, який точно відтворюється базисними функціями з W_h в межах кожного скінченного елемента. Тоді швидкість збіжності послідовності $\{\phi_h\} \subset W$ характеризується оцінкою

$$\|\phi - \phi_h\|_{1,\Omega} \le S \cdot h^k \cdot C \cdot \max\{\omega^{-1}, 1, \omega\}\|\phi\|_{k+1,\Omega},$$

де $C = const > 0$ не залежить від величин, що нас цікавлять.

8. ПОБУДОВА СИСТЕМИ РІВНЯНЬ МСЕ

На цьому етапі деталізуємо структуру задачі (23) за допущення, що простір апроксимацій W_h конструюється технологією методу скінченних елементів. Спочатку в той чи інший спосіб виберемо поділ $\Im_h = \{K\}$ області Ω на скінченні елементи K, $h := \max\limits_{K \in \Im_h} h_K$, $h_K := diam\, K$. Позначимо через X множину всіх вузлів $x^m = \left(x_1^m, ..., x_d^m\right)$ тріангуляції $\Im_h$, які не належать до частини межі Γ_u, і позначимо через N кількість її елементів, $N := card\, X$.

Виберемо тепер систему кусково визначених скалярних функцій $\upsilon^j = \upsilon^j(x)$ з властивостями

$$\begin{cases} \upsilon^j\left(x^m\right) = \delta_{jm} \quad \forall x^m \in X_V, \\ \Omega_j := \sup \upsilon^j = \left\{K \in \Im_h : \ \upsilon^j(x) \ne 0 \quad на \quad \overline{K}\right\}, \ j = 1, \ldots, N_V. \end{cases} \tag{24}$$

За допомогою таких функцій утворимо базис простору апроксимацій V_h із векторів вигляду

$$\upsilon_1^j(x) := \begin{pmatrix} \upsilon^j(x) \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \ldots, \upsilon_d^j(x) := \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \upsilon^j(x) \end{pmatrix} \quad j = 1, \ldots, N_V. \tag{25}$$

Тоді $\dim V_h = N_V \cdot d$ і кожен елемент $v = \left(v_1, \ldots, v_d\right)$ із цього простору V_h можна подати у вигляді лінійної комбінації щойно розглянутих векторів

$$v(x) = \sum_{j=1}^{N_V} \sum_{m=1}^{d} a_m^j \upsilon_m^j(x)$$

або у скалярному записі

$$v_k(x) = \sum_{j=1}^{N} a_k^j \upsilon^j(x) \qquad k = 1, \ldots, d.$$

За цією деталізацією структури просторів апроксимацій дискретизованій задачі (20) можна надати вигляду

$$\begin{cases} \textit{знайти вектори } s_h^\alpha(x) = \sum\limits_{j=1}^{N} \sum\limits_{m=1}^{d} s_m^{\alpha j} \upsilon_m^j(x), \ \alpha = 1, 2, \ \textit{такі, що} \\ \qquad \textit{задовольняють систему алгебричних рівнянь} \\ \omega m\left(s_h^2, v_1\right) + a\left(s_h^1, v_1\right) - \omega^{-1} c\left(s_h^2, v_1\right) = < l_1, v^1 >, \\ -\omega m\left(s_h^1, v_2\right) + a\left(s_h^2, v_2\right) + \omega^{-1} c\left(s_h^1, v_2\right) = < l_2, v^2 > \qquad \forall v_1, v_2 \in V_h, \end{cases}$$

або після застосування класичної процедури Гальоркіна

$$\begin{cases} \textit{знайти вектори } q^{\alpha} = \left(s_1^{\alpha 1}, s_1^{\alpha 2}, \ldots, s_d^{\alpha N}\right) \in R^{Nd},\ \alpha = 1{,}2,\ \textit{такі, що} \\ \quad \textit{задовольняють систему лінійних алгебричних рівнянь} \\ \quad \begin{bmatrix} A & \omega M - \omega^{-1} C \\ -\left[\omega M - \omega^{-1} C\right] & A \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q^1 \\ q^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L^1 \\ L^2 \end{bmatrix}. \end{cases} \tag{26}$$

Тут, наприклад, $A = \{A_{nl}\}_{n.l=1}^{Nd}$ – симетрична додатно визначена матриця, елементи якої обчислюють згідно з правилами

$$\begin{aligned} A_{nl} := a\left(\upsilon_m^i, \upsilon_k^j\right),\ n = d(i-1) + m,\ l = d(j-1) + k, \\ i, j = 1, \ldots, N_V,\ m, k = 1, \ldots, d. \end{aligned} \tag{27}$$

Складові симетричних додатно визначених матриць M та C обчислюють подібно,

$$L_n^{\alpha} :=< l_{\alpha}, \upsilon_m^i >, \quad n = d(i-1) + m, \quad i = 1, \ldots, N, \quad m = 1, \ldots, d.$$

9. АПОСТЕРІОРНИЙ ОЦІНЮВАЧ ПОХИБКИ АПРОКСИМАЦІЙ МСЕ

З огляду на (20) ми можемо сформулювати варіаційну задачу про відшукання похибки апроксимації Гальоркіна

$$\begin{cases} \textit{задано частоту } \omega = const > 0 \textit{ та апроксимацію } \phi_h \in W_h; \\ \textit{знайти похибку } e := \phi - \phi_h \in E := W \setminus W_h \textit{ таку, що} \\ B(\omega; e, \varphi) =< \rho(\omega; \phi_h), \varphi >:= \langle \chi, \varphi \rangle - B(\omega; \phi_h, \varphi), \qquad \forall\, \varphi \in E. \end{cases} \tag{28}$$

Оскільки функціонал $\rho(\omega; \varphi_h) : W \to R$ обмежений на W, то задача (28) коректно сформульованана. Знайти розв'язок (28) так само важко, як і вихідної задачі (12), тому ми вдаємося до її дискретизації за вже використовуваною схемою Гальоркіна в деякому скінченновимірному підпросторі E_h із простору похибок E. Щоб цю процедуру можна було використати на практиці, ми пов'яжемо її реалізацію з поділом $\Im_h = \{K\}$ області Ω на скінченні елементи K і далі будемо припускати, що саме на цьому поділі за допомогою певної технології МСЕ знайдено кусково визначений розв'язок $\phi_h \in W_h$ дискретизованої задачі (23). Тепер сформулюємо задачу про апостеріорний оцінювач похибки апроксимації МСЕ

$$\begin{cases} \textit{задано частоту } \omega = const > 0, \\ \textit{апроксимацію } \phi_h \in W_h \textit{ та } E_h \subset E,\ \dim E_h < +\infty; \\ \textit{знайти оцінювач } e_h := \left(e_h^1, e_h^2\right) \in E_h \textit{ такий, що} \\ \quad \Pi(\omega; e_h, \varphi) =< \rho(\omega; \phi_h), \varphi > \quad \forall \varphi \in E_h. \end{cases} \tag{29}$$

Оскільки її складові виконують умови леми Лакса-Мільграма-Вишика, то варіаційна задача (29) про відшукання наближення e_h до актуальної похибки дискретизації $e = \phi - \phi_h \in E = W \setminus W_h$ коректно сформульована.

Якщо певним способом задача про апостеріорний оцінювач похибки (29) вже розв'язана, то значення його енергетичної норми

$$\left|e_h\right|_W^2 = \sqrt{\left(e_h, e_h\right)} \tag{30}$$

свідчить про приблизну величину похибки знайденої апроксимації МСЕ $\phi_h \in W_h$. У деяких випадках практичних застосувань такої кількісної характеристики похибки буває достатньо, однак технологія МСЕ здатна надавати детальнішу інформацію, а саме про розподіл норми похибки поміж скінченними елементами K використаної тріангуляції $\Im_h$

$$|e_h|_K^2 := \int_K \sum_{\alpha=1}^{2} c_{ijkm}\varepsilon_{ij}\left(e_h^\alpha\right)\varepsilon_{km}\left(e_h^\alpha\right)dx \qquad \forall K\in\Im_h . \tag{31}$$

10. РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЛОКАЛЬНИХ ЗАДАЧ ПРО ПОХИБКИ МСЕ

З огляду на (31) пропонуємо спеціальний спосіб побудови просторів E_h, який даэ змогу обчислювати оцінювач e_h на довільно вибраному окремому елементі K незалежно від решти елементів тріангуляції $\Im_h$. Йдеться про належне конструювання базису простору E_h, яке здатне забезпечити недороге знаходження норми апостеріорного оцінювача похибки (31) на кожному скінченному елементі K. З цією метою за запропонованою нижче методикою на кожному з них треба розв'язати систему лінійних алгебричних рівнянь порядку $2d$.

На заданій тріангуляції $\Im_h=\{K\}$ розглянемо кусково визначену невід'ємну функцію $b\in H_0^1(\Omega)$ бульбашкової структури

$$\begin{cases} b|_K := b_K \in H_0^1(K), \\ b_K(x_K)=1 \qquad \forall K\in\Im_h \qquad \forall h>0, \end{cases} \tag{32}$$

де за точку $x_K\in K$ ми вибираємо, наприклад, центр ваги елемента K.

Складові апостеріорного оцінювача похибки $e_K=\left(e_K^1,e_K^2\right)$ знайденої апроксимації амплітуд швидкостей $\varphi_h=\left(s_1^h,s_2^h\right)\in W_h$ на скінченому елементі K будемо шукати у вигляді лінійних комбінацій

$$e_K^\alpha(x) := \lambda_1^\alpha\begin{pmatrix} b_K(x)\\ 0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix} + \lambda_2^\alpha\begin{pmatrix} 0\\ b_K(x)\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix} + \dots + \lambda_d^\alpha\begin{pmatrix} 0\\ 0\\ \vdots\\ b_K(x)\end{pmatrix},\ \alpha=1,2,\ \forall x\in K \tag{33}$$

з невідомими коефіцієнтами $\lambda_K^\alpha=\left(\lambda_1^\alpha,\dots,\lambda_d^\alpha\right)\in R^d$, $\alpha=1,2$. Тепер, вибираючи вектори $b_K^1=(b_K,0,\dots,0)^T$, $b_K^2=(0,b_K,0,\dots,0)^T$, ... ,$b_K^d=(0,\dots,0,b_K)^T$ за базис простору B_K і приймаючи $E_K := B_K\times B_K$ за простір апроксимацій процедури Гальоркіна, прийдемо до алгебричного подання задачі (29) про апостеріорний оцінювач похибки апроксимації МСЕ

$$\begin{cases} \textit{знайти вектори } \lambda_K=\left(\lambda_K^1,\lambda_K^2\right)\in R^{2d},\ \alpha=1,2, \\ \textit{такі, що задовольняють систему} \\ \textit{лінійних алгебричних рівнянь} \\ \begin{bmatrix} A & \omega M-\omega^{-1}C \\ -\left[\omega M-\omega^{-1}C\right] & A\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\lambda_K^1\\ \lambda_K^2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}Z^1\\ Z^2\end{bmatrix} \quad \forall K\in\Im_h . \end{cases} \tag{34}$$

Тут компоненти векторів Z^α обчислюють згідно з правилами

$$\begin{cases} Z_m^1 := <\rho(\omega;\phi_h),\ (b_K^m,0)>, \\ Z_m^2 := <\rho(\omega;\phi_h),\ (0,b_K^m)> \end{cases} \qquad m=1,\dots,d.$$

Складові матриці системи рівнянь (34) обчислюють згідно з правилами, які ми подали в п. 7, наприклад,

$$A_{ij}^{K} := a(b_K^i, b_K^j), \quad i, j = 1, \dots, d.$$

11. ВИСНОВКИ

Для скінченно-елементних апроксимацій задач про вимушені усталені коливання пружних тіл побудовано апостеріорні оцінювачі похибок, які дають змогу незалежно відшукати похибки на кожному скінченному елементі. Побудова оцінювача охоплювала такі кроки: формулювання та доведення коректності варіаційної задачі, виконання дискретизації Гальоркіна, побудови відповідних класичних схем МСЕ та знаходження апріорних оцінок збіжності; на підставі властивостей бабл-функцій та сформульованої задачі про похибку побудовано апостеріорні оцінювачі похибок. На додаток сформульовано та доведено леми про структури енергії та дисипації гармонійного вібрування.

Список використаної літератури

1. *Бреховских Л.М.* Акустика слоистых сред / Л.М. Бреховских., О.А. Годин. – М.: Наука, 1989. – 416 с.
2. *Виноградова М.Б.* Теория волн / М.Б. Виноградова, О.В. Руденко, А.П. Сухоруков. – М.: Наука, 1979. – 384 с.
3. *Дюво Г.* Неравенства в механике и физике / Г. Дюво, Ж.-Л. Лионс. – М.: Наука, 1980. – 384 с.
4. *Жарий О.Ю.* Введение в механику нестационарных колебаний и волн / О.Ю. Жарий, А.Ф. Улитко. – К.: Выща шк., 1989. – 184 с.
5. *Квасниця Г.А.* Порівняння простих апостеріорних оцінювачів похибок методу скінченних елементів для задач еластостатики / Г.А. Квасниця, Г.А. Шинкаренко // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. прикл. матем. та інформ. – 2002. – Вип. 5. – С. 95–106.
6. *Квасниця Г.А.* Порівняння простих апостеріорних оцінювачів похибок методу скінченних елементів для задач еластостатики / Г.А. Квасниця, Г.А. Шинкаренко // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. прикл. матем. та інформ. – 2003. – Вип. 7. – С. 162–174.
7. *Сьярле Ф.* Метод конечных элементов для эллиптических задач / Ф. Сьярле. – М.: Мир, 1992. – 472 с.
8. *Чабан Ф.* Апостеріорні оцінювачі похибок скінченноелементних апроксимацій для задачі про вимушені гармонічні коливання п'єзоелектриків / Ф. Чабан, Г. Шинкаренко // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2009. – 52, № 4. – С. 88–98.
9. *Ainsworth M.*A. Posteriori Error Estimations in Finite Element Analysis / M. Ainsworth, J.T. Oden. – New York: Wiley, 2000. – 240 p.
10. *Brezzi F.* Mixed and Hybrid Finite Element Methods / F.Brezzi, M. Fortin. –New York: Springer-Verlag, 1991. – 350 p.
11. *Chaban F.V.* Constructing of *h*-adaptive finite element for piezoelectricity problems / F.V. Chaban, H.A. Shynkarenko // Jornal of Numerical and Applied Mathematics. – 2009. – Vol. 97 (1). – P. 1–9.
12. *Geradin M.* Mechanical Vibrations. Theory and Application to Structural Dynamics / M. Geradin, D. Rixen. – Chichester: Wiley, 1994. – 411 p.
13. *Kvasnytzia H.* Construction of the *h*-adaptive FEM for the forced vibration problems / H. Kvasnytzia, F. Chaban, H. Shynkarenko // Short papers 18-th Intern. Conf. on Computer Methods in Mechanics. – Zielona Gora. – 2009. – P. 271–272.

14. *Zienkiewicz O.C.* The Finite Element Method. Vol. 1. The Basis. 5th Ed / O. C. Zienkiewicz, R.L. Taylor. – Oxford: Butterworth-Heinemann, 2000. – 689 p.

Стаття: надійшла до редколегії 10.10.2012
доопрацьована 21.11.2012
прийнята до друку 05.12.2012

АНАЛИЗ ЗАДАЧ О ВЫНУЖДЕННЫХ ГАРМОНИЧЕСКИХ КОЛЕБАНИЯХ УПРУГИХ ТЕЛ И КОНСТРУИРОВАНИЕ НАДЕЖНЫХ АППРОКСИМАЦИЙ МКЭ ДЛЯ ИХНИХ РЕШЕНИЙ

Г. Квасныця[1], Ф. Чабан[1], Г. Шинкаренко[1,2]

[1]*Львовский национальный университет имени Ивана Франко,*
ул. Университетская, 1, Львов, 79000, e-mail: cfedir@gmail.com
[2]*Политехника Опольская, ул. Любошицкая, 7, Ополе , Польша,*
e-mail: h.shynkarenko@po.opole.pl

Сформулировано вариационную задачу об амплитудах вектора скоростей упругих смещений тела с мгновенной памятью, которое совершает установившиеся колебания под воздействием гармонических нагрузок заданной круговой частоты. Найдены достаточные условия корректности этого класса задач, исследованы энергетические характеристики их решений и вычислены априорные оценки сходимости аппроксимаций МКЭ. В дополнение к этому построены апостериорные оценщики погрешности аппроксимаций МКЭ, которые позволяют вычислять распределение энергетических норм погрешности путем решения локальных задач о невязке на каждом конечном элементе триангуляции.

Ключевые слова: вынужденные гармонические колебания, амплитуды скоростей смещений, энергетические характеристики, МКЭ, априорные оценки погрешности, апостериорные оценки погрешности.

ANALYSIS OF HARMONIC FORCED VIBRATION PROBLEMS AND CONSTRUCTION OF ROBUST FEM APPROXIMATIONS FOR THEIR SOLUTIONS

H. Kvasnytzia[1], F. Chaban[1], H. Shynkarenko[1,2]

[1]*Ivan Franko National University of Lviv,*
Universytetska Str., 1, Lviv, 79000, e-mail: cfedir@gmail.com
[2]*Polytechnica Opolska, Opole, Poland, e-mail: h.shynkarenko@po.opole.pl*

Formulated variational problem of the vector magnitude of elastic displacement of the body with immediate memory, which makes steady oscillations under the influence of harmonic loads specified circular frequency. Found sufficient conditions for the correctness of this class of problems, investigated the energy characteristics of their solutions and evaluated a priori estimates of the convergence of FEM approximations. In addition, built a posteriori error estimators of FEM approximations that allow us to calculate the distribution of the energy norm of the error by solving local problems of the residual on each finite element of triangulation.

Key words: forced harmonic vibration, amplitude of the displacement velocity, energy characteristics, finite element method (FEM), a priori error estimator, a posteriori error estimator (AEE).