

## УЗАГАЛЬНЕННЯ ЧИСЕЛЬНО-АНАЛІТИЧНОГО МЕТОДУ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ДВОВИМІРНИХ ІНТЕГРАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ТЕОРІЇ ПОТЕНЦІАЛУ У ВИПАДКУ СКЛАДНИХ ГРАНИЧНИХ ПОВЕРХОНЬ

Я. Гарасим, Б. Остудін

Львівський національний університет імені Івана Франка,  
вул. Університетська, 1, Львів, 79000, e-mail: [kom@franko.lviv.ua](mailto:kom@franko.lviv.ua)

Розглянуто узагальнення чисельно-аналітичної процедури розв'язування двовимірного інтегрального рівняння першого роду зі слабкою особливістю в ядрі у випадку складних граничних поверхонь. Такі рівняння використовують у процесі моделювання електростатичних полів у суттєво просторовому формулюванні. Враховуючи існування в окремих випадках просторового поля стосовно простої осесиметричної моделі, продемонстровано доцільність залучення саме двовимірних інтегральних рівнянь. Проаналізовано питання, пов'язані з уточненням отримуваних розв'язків.

*Ключові слова:* інтегральні рівняння, осьова симетрія, метод колокації, апостеріорна оцінка похибки.

### 1. ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА ПРОБЛЕМИ

Останнім часом для дослідження та розв'язування практично важливих задач математичної фізики використовують метод граничних інтегральних рівнянь. Особливо ефективним цей метод виявився в разі суттєво просторового моделювання окремих фізичних явищ за наявності розімкнених граничних поверхонь. Відомо [2], що, наприклад, електростатичне поле електронно-оптичної системи (ЕОС) створюють  $N$  ідеально провідні електроди, які в сукупності моделюють багатозв'язною поверхнею  $S := \bigcup_{i=1}^N S_i$ , де  $S_i \cap S_j = \emptyset$  при  $i \neq j$ . Кожен електрод

$S_i \in S$  пов'язують із заданим на ньому значенням потенціалу  $U_0^{(i)}$ .

Опираючись на відомі результати теорії потенціалу, з'ясовано, що для розрахунку електростатичного поля розглядуваної ЕОС треба розв'язати інтегральне рівняння (ІР) вигляду [2, 6]

$$(A\sigma)(M) \equiv \int_S \sigma(P) |M - P|^{-1} dS_P = U_0^{(i)}(M), \quad M \in S_i \quad (i = \overline{1, N}). \quad (1)$$

Тут  $\sigma(P)$  – шукана сукупна густина розподілу зарядів на  $S$ , тобто  $\sigma(P) := \{\sigma_i(P), P \in S_i; i = \overline{1, N}\}$ , а  $U_0^{(i)}(M)$  – граничне значення потенціалу на електроді, змодельованому поверхнею  $S_i$ , яка може бути і розімкненою.

Проводити аналіз розв'язності ІР (1), – враховуючи класи, до яких належить багатозв'язна поверхня  $S$ , – можна в різних функціональних просторах. Бажано зважати на особливу поведінку шуканої густини розподілу зарядів в околі контуру розімкненої поверхні та лінії її зламу. В такому контексті, не зменшуючи загальності, можемо керуватися відомим у теорії інтегральних рівнянь твердженням, яке виражає розв'язність ІР (1) [6]: якщо  $S$  – незамкнена Ліпшицева поверхня в  $\mathbf{R}^3$ , то  $A: H_{00}^{-1/2}(S) \rightarrow H^{1/2}(S)$  – ізоморфізм, причому

$$m_1 \|\sigma\|_{H_0^{-1/2}(S)} \leq \|A\sigma\|_{H^{1/2}(S)} \leq m_2 \|\sigma\|_{H_0^{-1/2}(S)}, \quad 0 < m_1 \leq m_2.$$

Щодо отримуваних двовимірних IP типу (1), то їх можна чисельно розв'язувати методом колокації з використанням кусково-постійної, білінійної, біквадратичної та бікубічної апроксимацій невідомої густини  $\sigma(P)$ . Є потреба обчислити значну кількість невластних інтегралів, ускладнених наявністю певних вагових функцій, які відображають сингулярні властивості шуканих розв'язків. Варто зауважити, що на вибір конкретного алгоритму наближеного розв'язування IP (1) суттєво впливає визначення класів розглядуваних граничних поверхонь і способів їхнього подання. Наприклад, досить ефективні розв'язки задач у суттєво просторовому формулюванні можна отримати, якщо заряджені електроди змодельовано деякою сукупністю прямокутних або трапецевидних пластин. Методику, яка ґрунтується на такому припущенні, ми називаємо чисельно-аналітичною [1, 4]. Ще одна її перевага – можливість досить просто зображати відповідну вагову функцію, яка адекватно враховує властивості шуканого розв'язку. Нехай, не зменшуючи загальності,  $S$  – одна прямокутна пластина, розташована перпендикулярно до осі  $Oz$  обраної прямокутної системи координат  $xuz$ , зі сторонами паралельними до осей  $Ox$  і  $Oy$ . Оскільки вагова функція  $1/\omega(x, y)$  повинна відбивати сингулярну поведінку розв'язку в околі вершин пластини, які мають координати  $x = \pm a$  і  $y = \pm b$ , а також при наближенні до її ребер, то  $\omega(x, y)$  пропонуємо подавати в такому вигляді:

$$\omega(x, y) := \frac{[(1-\lambda x)(1-\mu y)]^{1/2}}{(1-\lambda x)^\gamma + (1-\mu y)^\gamma}, \quad |x| \leq a, \quad |y| \leq b,$$

де  $\lambda, \mu \in \{-1, 1\}$ , а  $\gamma$  – деяка відома фізична стала [5]. Однак таке зваження особливості суттєво ускладнює алгоритми наближеного обчислення відповідних подвійних невластних інтегралів, які з'являються під час розв'язування (1) методом колокації, хоча від цих особливостей теоретично можна позбавитись шляхом запровадження спеціальних заміни змінних.

## 2. АПОСТЕРІОРНИЙ МЕТОД ОЦІНКИ ПОХИБКИ

При наближеному розв'язуванні IP (1) актуальною є проблема оцінки похибки отримуваних результатів. Приймаючи наведені аргументи щодо характеру поведінки  $\sigma(P)$ , доцільним виявився апостеріорний метод. Використовуючи відомі загальні ідеї [3], пропонуємо такий його варіант, придатний саме до IP типу (1) [4]. Нехай  $\sigma_h(P)$  – розв'язок (1), який належить до обраного простору апроксимацій. Цей розв'язок, з врахуванням його інтегрального подання, породжує наближене значення потенціалу в будь-якій точці  $M$  міжелектродного простору

$$U_h(M) = (A\sigma_h)(M).$$

Функцію похибки  $e_U$  обчислюємо за формулою

$$e_U = A\sigma - A\sigma_h = A(\sigma - \sigma_h) = Ae_\sigma,$$

причому  $e_\sigma$  є розв'язком IP  $(Ae_\sigma)(M) = U_0 - (A\sigma_h)(M)$ ,  $M \in S$ , де  $U_0$  – задане граничне значення потенціалу на поверхні  $S$ .

Розв'язок IP (1) поводить себе нерегулярно лише в околі контуру розімкненої поверхні  $S$ . Тому відтворюємо функцію  $e_U$  тільки на елементах  $D^e$ , які з'являються під час дискретизації  $S$ , і де  $e_U$  може набувати максимальні значення. Ми називаємо

такі елементи “екстремальними”. Далі перевіряємо умову досягнення наперед заданої точності

$$\frac{\|e_\sigma\|_{L_2,\omega(D^e)}}{\sqrt{\|\sigma_h\|_{L_2,\omega(D^e)}^2 + \|e_\sigma\|_{L_2,\omega(D^e)}^2}} < TOL. \quad (2)$$

Якщо на “екстремальному” елементі умова (2) не виконується, то необхідно виконати його поділ на кілька і розв’язати задачу на густішій сітці.

### 3. ВРАХУВАННЯ СПЕЦИФІКИ ГРАНИЧНИХ ПОВЕРХОНЬ

Особливе місце у наших дослідженнях займають окремі випадки IP (1), а також певні їхні спрощені аналоги. Мета – вивчити можливості використання одновимірних IP при аналізі електростатичних полів, які утворюють строго визначеними класами поверхонь – електродів. Найбільший інтерес становлять задачі за наявності осьової симетрії електростатичного поля. Нехай у півплощині

$zr$  ( $r > 0$ ) відоме параметричне зображення певного набору  $\Gamma := \bigcup_{i=1}^m \Gamma_i$  дуг

$$\Gamma_i = \left\{ (z_i(\tau), r_i(\tau)), \alpha_i \leq \tau \leq \beta_i; i = \overline{1, m} \right\}.$$

Вони обертаються навколо осі  $Oz$  обраної циліндричної системи координат  $(\varphi, z, r)$  утворюють сукупність поверхонь, яка і моделює досліджувану ЕОС. Можна довести [2], що в так званому осесиметричному випадку просторове поле не залежить від однієї координати, а саме,  $\varphi$ . Це дає підстави подати відповідний аналог (1) у вигляді одновимірного IP зі слабкою особливістю в ядрі. Зауважимо, що запроваджена так осесиметрична модель, як досить проста, стає в нагоді під час дослідження електростатичних полів з малими порушеннями осьової симетрії. Ці задачі, звісно, можна трактувати як суттєво просторові. В такому випадку, володіючи чисельно-аналітичною процедурою розв’язання двовимірних IP, можна завжди перевірити достовірність отримуваних за осесиметричною моделлю результатів. З’ясуємо як чисельно-аналітичну процедуру можна узагальнити за наявності досить складних граничних поверхонь.

Не зменшуючи загальності, розглянемо випадок, коли поверхня  $S$ , що наявна в (1), є бічною поверхнею обмеженого еліптичного циліндра, розташованого довільно у просторі. IP (1), з урахуванням параметризації  $S$

$$P := \{x(\alpha, \beta), y(\alpha, \beta), z(\alpha, \beta)\};$$

$$M := \{x(\bar{\alpha}, \bar{\beta}), y(\bar{\alpha}, \bar{\beta}), z(\bar{\alpha}, \bar{\beta})\}; (\alpha, \beta), (\bar{\alpha}, \bar{\beta}) \in \Delta := [\alpha_1, \alpha_2] \times [\beta_1, \beta_2],$$

набуває вигляду

$$\iint_{\Delta} \sigma(\alpha, \beta) \frac{F(\alpha, \beta)}{R(\alpha, \beta; \bar{\alpha}, \bar{\beta})} d\alpha d\beta = U_0(\bar{\alpha}, \bar{\beta}) \equiv \text{const}, \quad (3)$$

де

$$R(\alpha, \beta; \bar{\alpha}, \bar{\beta}) := \left\{ [x(\alpha, \beta) - x(\bar{\alpha}, \bar{\beta})]^2 + [y(\alpha, \beta) - y(\bar{\alpha}, \bar{\beta})]^2 + [z(\alpha, \beta) - z(\bar{\alpha}, \bar{\beta})]^2 \right\}^{1/2},$$

а  $F(\alpha, \beta) d\alpha d\beta$  виражає елемент поверхні  $S$  у локальних координатах  $\alpha$  і  $\beta$ . Зауважимо, що в (3) для простоти збережені позначення з (1). У локальній системі координат, пов’язаній із  $S$ , параметричні рівняння цієї поверхні набувають вигляду

$$x'(\alpha, \beta) = a \cos \alpha,$$

$$y''(\alpha, \beta) = b \sin \alpha, \quad \alpha_1 \leq \alpha \leq \alpha_2,$$

$$z'(\alpha, \beta) = \beta, \quad \beta_1 \leq \beta \leq \beta_2,$$

причому ортогональну систему координат  $x'y''z'$  (див. рис. 1–3) отримано з основної за два кроки.

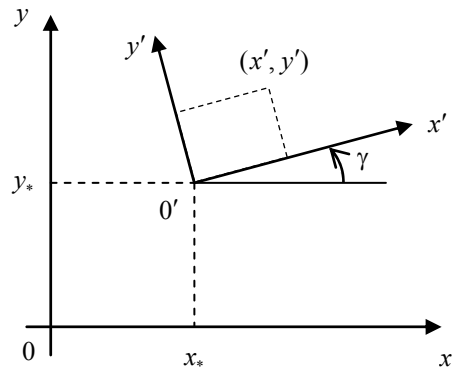


Рис. 1. Поворот осей у площині  $xу$

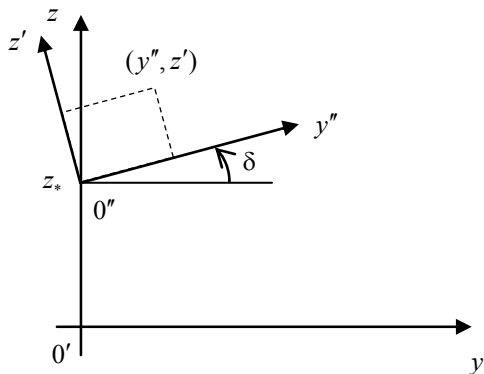


Рис. 2. Перенесення системи в напрямі осі  $0z$  та поворот у площині  $xz$

На першому кроці виконано перенесення та поворот осей на кут  $\gamma$  у площині  $xу$ , а далі – перенесення в напрямі осі  $0z$  та поворот на кут  $\delta$  у площині  $xу$ . Штрихи при  $y$  означають те, що вісь  $0у$  у процесі переміщення займала два положення. Основна система координат (назвемо її глобальною)  $xуz$  пов'язана з  $x'y''z'$  за посередництвом таких співвідношень:

$$\begin{aligned}x &= x' \cos \gamma - y'' \cos \delta \sin \gamma + z' \sin \delta \sin \gamma + x_*, \\y &= x' \sin \gamma + y'' \cos \delta \cos \gamma - z' \sin \delta \cos \gamma + y_*, \\z &= y'' \sin \delta + z' \cos \delta + z_*.\end{aligned}$$

Враховуючи останні співвідношення, отримаємо параметричні рівняння, які задають бічну поверхню (або її частину) еліптичного циліндра:

$$\begin{aligned}x(\alpha, \beta) &= a \cos \alpha \cos \gamma - b \sin \alpha \cos \delta \sin \gamma + \beta \sin \delta \sin \gamma + x_*, \\y(\alpha, \beta) &= a \cos \alpha \sin \gamma + b \sin \alpha \cos \delta \cos \gamma - \beta \sin \delta \cos \gamma + y_*, \\z(\alpha, \beta) &= b \sin \alpha \sin \delta + \beta \cos \delta + z_*.\end{aligned} \quad (4)$$

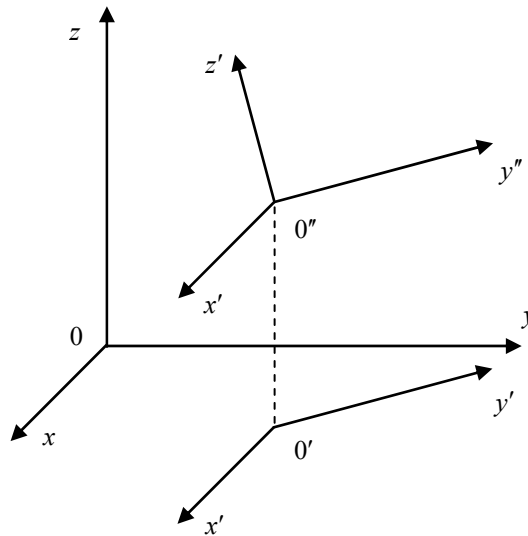


Рис. 3. Перехід від глобальної системи координат до локальної у випадку  $\mathbf{R}^3$

Легко бачити, що тепер, враховуючи (4), ІР (3) можна подати у вигляді

$$\int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \int_{\beta_1}^{\beta_2} \sigma(\alpha, \beta) \frac{F(\alpha, \beta) d\alpha d\beta}{\sqrt{(\alpha - \bar{\alpha})^2 T(\alpha, \bar{\alpha}) + (\beta - \bar{\beta})^2}} = U(\bar{\alpha}, \bar{\beta}), \quad (5)$$

причому

$$T(\alpha, \bar{\alpha}) := \frac{\sin^2\left(\frac{\alpha - \bar{\alpha}}{2}\right)}{\left(\frac{\alpha - \bar{\alpha}}{2}\right)^2} \left[ a^2 \sin^2\left(\frac{\alpha + \bar{\alpha}}{2}\right) + b^2 \cos^2\left(\frac{\alpha + \bar{\alpha}}{2}\right) \right],$$

а  $F(\alpha, \beta) \equiv \sqrt{a^2 \sin^2 \alpha + b^2 \cos^2 \alpha}$ ,  $a, b$  – півосі відповідного еліпса. Рівняння (5) розв'язували методом колокації з апроксимацією шуканої густини розподілу зарядів  $\sigma(\alpha, \beta)$  уздовж бічної поверхні циліндра за допомогою кусково-постійних базисних функцій. Результатом є система лінійних алгебричних рівнянь, матриця якої містить по діагоналі такі невластні інтеграли:

$$\int_{\frac{\bar{\alpha}-\frac{h_a}{2}}{\bar{\alpha}+\frac{h_a}{2}}}^{\frac{\bar{\beta}-\frac{h_b}{2}}{\bar{\beta}+\frac{h_b}{2}}} \int_{\frac{\bar{\alpha}-\frac{h_a}{2}}{\bar{\alpha}+\frac{h_a}{2}}}^{\frac{\bar{\beta}-\frac{h_b}{2}}{\bar{\beta}+\frac{h_b}{2}}} \frac{F_1(\alpha) d\alpha d\beta}{\sqrt{(\alpha-\bar{\alpha})^2 T(\alpha, \bar{\alpha}) + (\beta-\bar{\beta})^2}}, \quad (6)$$

де  $h_a, h_b$  – відповідно, кроки сітки по  $\alpha$  і  $\beta$  при дискретизації заданої області інтегрування,  $F_1(\alpha) := (a^2 \sin^2 \alpha + b^2 \cos^2 \alpha)^{1/2}$ . Далі в (6) перейдемо від інтегрування по незалежній змінній  $\alpha$  до інтегрування по величині  $l$ , яка має значення довжини дуги еліпса, яке відраховують від деякого початкового положення. Нехай цьому початкові відповідає значення параметра  $\alpha_0$ , а  $\bar{l}$  – довжина дуги, яка відповідає  $\alpha = \bar{\alpha}$ . Тоді в (6) за досить малих  $h_a$  і  $h_b$

$$(\alpha - \bar{\alpha})^2 T(\alpha, \bar{\alpha}) + (\beta - \bar{\beta})^2 \approx (l - \bar{l})^2 + (\beta - \bar{\beta})^2,$$

причому

$$\bar{l} = \int_{\alpha_0}^{\bar{\alpha}} F_1(\alpha) d\alpha,$$

а  $l$  перебуває у межах від  $l_1$  до  $l_2$ , де

$$l_1 := \int_{\alpha_0}^{\frac{\bar{\alpha}-\frac{h_a}{2}}{\bar{\alpha}+\frac{h_a}{2}}} F_1(\alpha) d\alpha, \quad l_2 := \int_{\alpha_0}^{\frac{\bar{\alpha}+\frac{h_a}{2}}{\bar{\alpha}+\frac{h_a}{2}}} F_1(\alpha) d\alpha.$$

Отже, (6) набуває вигляду

$$\int_{l_1}^{l_2} \int_{\frac{\bar{\beta}-\frac{h_b}{2}}{\bar{\beta}+\frac{h_b}{2}}}^{\frac{\bar{\beta}-\frac{h_b}{2}}{\bar{\beta}+\frac{h_b}{2}}} \frac{d\alpha d\beta}{\sqrt{(l-\bar{l})^2 + (\beta-\bar{\beta})^2}}$$

і до нього можна застосувати відому формулу [1]

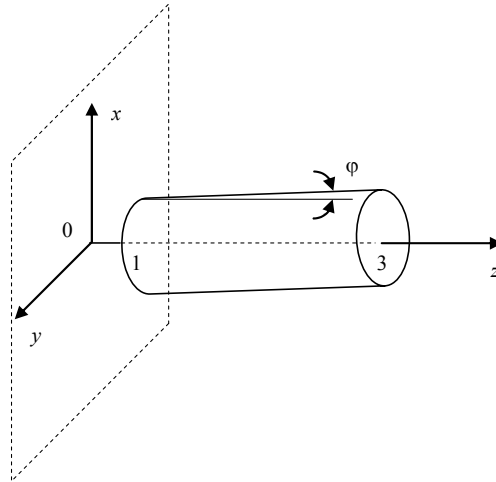
$$\int_s^t \int_p^q [(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2]^{-1/2} dx dy = G(v, r, w) + G(u, r, w) + G(r, v, u) + G(w, v, u),$$

де  $u := t - x_0$ ,  $v := x_0 - s$ ,  $w := q - y_0$ ,  $r := y_0 - p$ , а

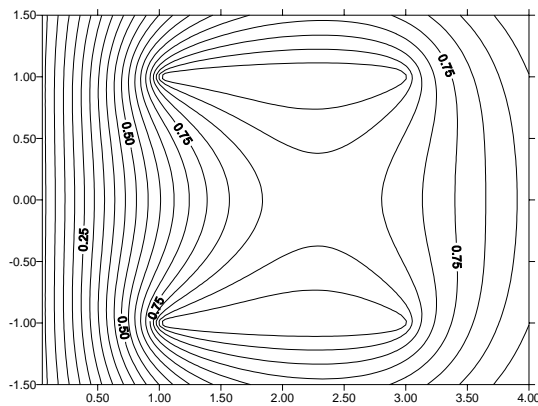
$$G(m, n, k) := m \left[ \ln \left( k + \sqrt{k^2 + m^2} \right) - \ln \left( -n + \sqrt{n^2 + m^2} \right) \right],$$

причому  $s \leq x_0 \leq t$ ,  $p \leq y_0 \leq q$ . Решту інтегралів з неперервними підінтегральними функціями обчислюємо за допомогою кубатурних формул із наперед заданою точністю. Такий спосіб обчислення значної кількості коефіцієнтів матриці виявився ефективнішим (з погляду витрат комп'ютерного часу), ніж методи, в основу яких покладено процедуру послаблення особливостей у відповідних невластних інтегралах.

У контексті наведених нижче міркувань розглянемо задачу розрахунку параметрів електростатичного поля ЕОС, який є катодом, змодельованим площиною  $z = 0$ , та обмежений електрод, який змодельовано бічною поверхнею циліндра, вісь якого незначно відхиляється від осі  $Oz$  (див. рис. 4).

Рис. 4. ЕОС з порушеною осью симетрією в  $\mathbb{R}^3$ 

Припустимо, що циліндр радіуса  $R=1$  розташований вздовж осі  $Oz$  в межах від 1 до 3 з порушеною осью симетрією, яка виражається кутом  $\varphi$  зі значенням близьким до  $10^{-1}$ . На бічній поверхні циліндра граничне значення потенціалу становило 1, а в площині  $xy=0$ . Для наближеного розв'язання ІР вигляду (5) використовували метод колокації з апроксимацією  $\sigma(\alpha, \beta)$  кусково-поліноміальними базисними функціями.

Рис. 5. Розподіл ліній рівня вздовж  $Oz$ 

На рис. 5 зображено розподіл ліній рівного потенціалу вздовж осі  $Oz$ , розрахований згідно з описаною методикою з використанням лінійної апроксимації шуканої густини ІР і сумарному виборі 200 точок колокації для відображення бічної поверхні циліндра та площини  $z=0$ . Значення потенціалу електростатичного поля у деяких контрольованих точках подано в табл.

Потенціал електростатичного поля в точках осі Oz

$z$	$r = x$	$u$
0.10	0.00	0.0640
1.00	0.00	0.5952
1.00	0.95	0.8572
1.00	1.00	0.9260
2.00	0.00	0.8683
2.50	0.00	0.8763
3.00	0.00	0.8227
3.00	1.00	0.9618
3.50	0.00	0.7299

Для поліпшення точності обчислень треба збільшувати кількість точок колокації та підвищувати порядок апроксимації шуканих величин. Це може призвести до суттєвого зростання розмірності СЛАР, особливо за умов розв'язання задачі в суттєво просторовому формулюванні. Ситуація також погіршується при непомірному збільшенні кількості поверхонь – електродів та зростанні їхніх геометричних розмірів. Водночас врахування різного типу симетрій у зображенні ЕОС дає підстави понизити розмірність задачі і суттєво зменшити обсяг обчислень.

На завершення варто додати, що розглядувана бічна поверхня не є замкненою, тому в околі її контуру наближені значення отримуваної густини підлягають уточненню згідно з описаною вище методикою.

#### 4. ВИСНОВКИ

Врахування наявної осьової симетрії досліджуваного поля дає змогу понизити розмірність відповідної системи лінійних рівнянь та, відповідно, суттєво зменшити обсяг обчислень. У багатьох випадках при суттєвому порушенні осьової симетрії доцільним виявився повільний перехід до використання просторової моделі, яка виконує роль наближеного аналог осесиметричної моделі і дає змогу контролювати межі ефективного застосування останньої. Застосування апостеріорного методу оцінки похибки допомагає отримувати розв'язки інтегральних рівнянь з потрібною точністю, що особливо актуально для розв'язування граничних задач у суттєво просторовому формулюванні на незамкнених поверхнях.

#### СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. *Гарасим Я.С.* Виявлення ефективної методики наближеного розв'язування двовимірних інтегральних рівнянь теорії потенціалу на основі обчислювальних експериментів / Я.С. Гарасим, Б.А. Остудін // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. прикл. матем. та інформ. – 2004. – Вип. 9. – С. 47–53.
2. *Ильин В.П.* Численные методы оптимизации эмиссионных электронно-оптических систем / В.П. Ильин, В.А. Катешов, Ю.В. Куликов, М.А. Монастырский. – Новосибирск: Наука, 1987. – 192 с.
3. *Eriksson K.* Introduction to Adaptive Method for Differential Equation / K. Eriksson, D. Estep, P. Hansbo, C. Johnson // Acta Numerica. –1995. – P. 1–54.
4. *Garasym Ya.S.* A posteriori error estimate for some two-dimensional integral equations of the first kind on unclosed surfaces in potential theory/ Ya.S. Garasym, B.A. Ostudin // J. Numer. Appl. Math. – 2009. – Vol. 97, No 1. – P. 57–69.



5. Morrison J.A. Charge singularity at the corner of a flat plate / J.A. Morrison, J.A. Lewis // SIAM J. Appl. Math. – 1976. – Vol. 31. – No 2. – P. 233–250.
6. Sybil Yu.M. Three dimensional elliptic boundary value problems for an open Lipschitz surface / Yu.M. Sybil // Матем. студії. – 1997. – Т. 8, № 2. – С. 79–96.

Стаття: надійшла до редколегії 31.10.2012

доопрацьована 26.12.2012

прийнята до друку 24.01.2013

## ОБОБЩЕНИЕ ЧИСЛЕННО-АНАЛИТИЧЕСКОГО ПОДХОДА ПРИ РЕШЕНИИ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ТЕОРИИ ПОТЕНЦИАЛА В СЛУЧАЕ СЛОЖНЫХ ГРАНИЧНЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ

Я. Гарасим, Б. Остудин

Львовский национальный университет имени Ивана Франко,  
ул. Университетская, 1, Львов, 79000, e-mail: [kom@franko.lviv.ua](mailto:korn@franko.lviv.ua)

Рассмотрено обобщение численно-аналитической процедуры решения двумерного интегрального уравнения первого рода со слабой особенностью в ядре в случае сложных граничных поверхностей. Такие уравнения используют в процессе моделирования электростатических полей в существенно пространственной постановке. Принимая во внимание существование в отдельных случаях пространственного поля относительно простой осесимметрической модели, продемонстрирована целесообразность привлечения именно двумерных интегральных уравнений. Изучены вопросы, связанные с уточнением получаемых решений.

*Ключевые слова:* двумерные интегральные уравнения, осевая симметрия, метод коллокации, апостериорная оценка погрешности.

## GENERALIZATION OF NUMERICALLY-ANALYTIC APPROACH IN CONNECTION WITH TWO-DIMENSIONAL INTEGRAL EQUATIONS SOLUTION OF POTENTIAL THEORY IN THE CASE OF COMPLICATED BOUNDARY SURFACES

Ya. Garasym, B. Ostudin

Ivan Franko National University of Lviv,  
Universytetska Str., 1, Lviv, 79000, e-mail: [kom@franko.lviv.ua](mailto:korn@franko.lviv.ua)

Taking into account complicated boundary surfaces the generalization of numerically-analytic procedure used for two-dimensional integral equations of the first kind with weak singularity in the kernel solution was considered. Such equations are used in process of electronic fields simulation in the case of essentially spatial formulation. Taking into consideration the presence in separate cases of spatial fields relatively prime axially symmetric model we treated the expediency of precisely two-dimensional integral equations attraction. The numerical correction of required solution was carried out by use of the special a posteriori error estimation.

*Key words:* two-dimensional integral equation, axial symmetry, collocation method, a posteriori error.