ISSN 2078–5097. Вісн. Львів. ун-ту. Сер. прикл. матем. та інф. 2014. Вип. 21. С. 79–83
Visnyk of the Lviv University. Series Appl. Math. and Informatics. Issue 21. P. 79–83

УДК 519.212

ВИЗНАЧЕННЯ ПОНЯТТЯ РИЗИКУ ЗА ДОПОМОГОЮ ТЕОРІЇ НЕЧІТКИХ МНОЖИН

Я. Єлейко, Ю. Щербина, С. Дмитрів

Львівський національний університет імені Івана Франка,
вул. Університетська, 1, Львів, 79000, e-mail: solomiia.dmytriv@gmail.com

Доведено тісний зв'язок класичної теорії ймовірностей, теорії нечітких множин і можливість застосування цієї теорії в економічних цілях. На підставі теорії нечітких множин визначено поняття усередненої міри, ризику та міри ризику .

Ключові слова: ймовірність, нечітка множина, нечітка подія, функція належності, усереднена міра, ризик.

1. ВСТУП

Поняття події та ймовірності її появи – це головні поняття теорії ймовірностей. Нехай задано Ω – простір елементарних подій, $F-\sigma$-алгебра на Ω, $\mathrm{A} \in F$ (подія). Тоді ми знаємо[3], що P – ймовірнісна міра на (Ω, F), яка є дійснозначною функцією, що ставить у відповідність кожній події $\mathrm{A} \in F$ її ймовірність таку, що:

1) $0 \le \mathrm{P}(\mathrm{A}) \le 1, \forall \mathrm{A} \in F$;
2) $\mathrm{P}(\Omega) = 1$;
3) Якщо $\mathrm{A}_1, \mathrm{A}_2, \ldots \in F, \mathrm{A}_i \cap \mathrm{A}_j = \varnothing, i \ne j$, то

$$\mathrm{P}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} \mathrm{A}_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathrm{P}(\mathrm{A}_i).$$

Теорія ймовірностей забезпечує дуже потужні інструменти для боротьби з невизначеністю. Проте в класичній теорії ймовірностей всі випадкові події мають бути точно визначені. На жаль, це припущення видається занадто жорстким у багатьох реальних життєвих проблемах. Дуже часто, особливо у разі використання природної мови, люди мають справу з неточно визначеними певними поняттями, наприклад, "високий дохід", "хмарне небо", числа "близькі до 7". Для традиційної теорії ймовірностей такі вирази неточні і перебувають поза цією теорією. Тому, використовуючи теорію нечітких множин, сформовану у 1965 р. Л. Заде, поняття події та її ймовірності може бути природно розширене до поняття нечіткої події.

2. НЕЧІТКІ ПОДІЇ

Нехай Ω – n-вимірний евклідовий простір $\Re^n$, $F-\sigma$-алгебра борелевих множин в $\Re^n$. Якщо відомо, що $\mathrm{A} \in F$, то

$$\mathrm{P}(\mathrm{A}) = \int_A d\mathrm{P}\,. \tag{1}$$

Далі визначимо поняття нечіткої множини [6]. Нечітка множина A в $\Re^n$ визначається функцією $\mu_{\mathrm{A}}(x), \mu_{\mathrm{A}} : \Re^n \to [0,1]$, яка є степенем належності x до A. Наприклад, [2], якщо $\mathrm{A} = \Re$ – множина дійсних чисел, то числа "близькі до числа 7" визначимо за допомогою функції належності $\mu_X(a) = \left(\frac{1}{1+(a-7)^2}\right)$, а нечітку множину дійсних чисел “близьких до числа 7” запишемо так: $X = \int\limits_a \frac{\left(1+(a-7)^2\right)^{-1}}{a}$.

Нагадаємо деякі головні властивості функції належності[5]. Нехай A та B – нечіткі множини, тоді:

1) $A \subset B \Leftrightarrow \mu_A(x) \le \mu_B(x) \forall x$;
2) рівність: $A = B \Leftrightarrow \mu_A(x) = \mu_B(x) \forall x$;
3) доповнення: $\overline{A}$ – доповнення до $A \Leftrightarrow \mu_{\overline{A}}(x) = 1 - \mu_A(x) \forall x$;
4) об’єднання двох нечітких множин A та E, позначається $A \cup B$, визначається як найменша нечітка множина , яка містить як A так і B. Функція належності до $A \cup B$ задається виразом $\mu_{A \cup B}(x) = \max[\mu_A(x), \mu_B(x)] \forall x$;
5) перетин: $A \cap B$ – найбільша нечітка множина, яка міститься в A та B. Функція належності до $A \cap B$ задається виразом $\mu_{A \cap B}(x) = \min[\mu_A(x), \mu_B(x)] \forall x$;
6) опукла комбінація нечітких множин A і B і деякої третьої нечіткої множини Λ (позначається $(A, B; \Lambda)$) задається такою функцією належності[6]:
$$\mu_{(A,B;\Lambda)}(x) = \mu_\Lambda(x)\mu_A(x) + (1 - \mu_\Lambda(x))\mu_B \forall x .$$

Використовуючи поняття функції належності, ми можемо записати формулу (1), яка визначала ймовірність настання звичайної події для ймовірності настання нечіткої події[6]. Вона буде визначена як інтеграл Лебега-Стільтьєса (цей інтеграл існує, оскільки функція μ_A вимірна за Лебегом)
$$P(A) = \int\limits_{\Re^n} \mu_A(x) dP . \tag{2}$$
Ліва частина формули (2) може бути записана як математичне сподівання від функції належності, тому
$$P(A) = E(\mu_A).$$

3. ВИКОРИСТАННЯ ТЕОРІЇ НЕЧІТКИХ МНОЖИН

Існуючі загальноприйняті підходи до побудови математичних моделей об’єктів ґрунтуються на кількісних методах, які не дають підстав оперувати з невизначеністю. Однак цільове формулювання завдань процесу управління досить часто пов’язується з вихідною змінною нечіткої системи управління. Тому сьогодні процес аналітичного забезпечення та обґрунтування управлінських рішень стикається з необхідністю застосування на ринку моделей діагностики, які фундуються на теорії нечітких множин [4].

Переваги нечітких систем порівняно з іншими очевидні. Це можливість оперувати нечіткими вхідними даними, можливість нечіткої формалізації критеріїв оцінки, проведення якісних оцінок і швидкого моделювання складних динамічних систем, їхній порівняльний аналіз із заданим ступенем точності, оперуючи принципами поведінки системи, описаними нечіткими методами.

Розвиток нечіткої логіки йде шляхом створення систем, які потрібні великому бізнесу та військовим. Нечітку логіку застосовують для аналізу нових ринків, біржової гри, оцінки політичних рейтингів, вибору оптимальної цінової стратегії тощо. З'явилися і комерційні системи масового застосування.

Також нечітка логіка має широке застосування у моделюванні ризиків фінансово-економічної діяльності.

Ймовірна оцінка ризику математично відпрацьована, має свої теореми та методи обчислення.

Для оцінки підприємницького ризику використовують такі основні характеристики.

Математичне сподівання значення економічного показника, зумовленого невизначеністю ситуації, зазвичай визначається як середньозважене за ймовірністю всіх можливих його значень, де ймовірність кожного значення використовують як питому вагу, або статистичну частоту. Математичне сподівання обчислюють такою формулою[1]:

$$\mathrm{E}(x) = \sum_{j=1}^{n} x_j \mathrm{P}(x_j),$$

де $\mathrm{E}(x)$ – математичне сподівання випадкової (дискретної) величини; x – будь-яка випадкова величина, чи то ціна, дохід, прибуток тощо; x_j – значення випадкової величини в окремому випадку, тобто на певному сегменті ринку реалізації конкретного товару або стосовно різних підприємств тощо; $\mathrm{P}(x_j)$ – ймовірність випадкової величини; n – загальна кількість спостережень випадкової величини.

Абсолютне відхилення можливих випадкових значень економічного показника від математичного сподівання цього показника, тобто його середньозваженого за ймовірності значення характеризує амплітуду мінливості цього показника. Часто має сенс розрахувати максимальне абсолютне відхилення, а іноді й найменше абсолютне відхилення. Реалізуючи товар на різних ринках або різним замовникам, корисно зіставити абсолютне відхилення ціни від її середнього рівня.

Дисперсія дає загальнішу оцінку відхилень і є середньозваженим квадратним відхиленням конкретних показників (варіацій) від математичного сподівання, тобто середнього очікуваного його значення. Дисперсію обчислюють формулою[1]

$$D(x) = \sum_{j=1}^{n} \left(x_j - \mathrm{E}(x)\right)^2 \mathrm{P}(x_j),$$

де $D(x)$ – дисперсія випадкової величини x.

Середнє квадратичне відхилення, або стандартне відхилення, – це квадратний корінь із дисперсії. Ця ймовірна, статистична характеристика більше наближається до інтуїтивних уявлень про оцінку мінливості кон'юнктури ринку, ціннісних показників, оскільки зіставлення ведуться вже не з квадратами відхилень, а з квадратним коренем із суми квадратних відхилень. Інакше кажучи, ймовірні відхилення приводять в реальну розмірність. Обчислення середнього квадратичного відхилення проводять за формулою [1]

$$\sigma(x) = \sqrt{D(x)} = \sqrt{\sum_{j=1}^{n} \left(x_j - \mathrm{E}(x)\right)^2 \mathrm{P}(x_j)},$$

де $\sigma(x)$ – традиційне позначення середнього квадратичного відхилення випадкової величини x.

Коефіцієнт варіації випадкової величини $V(x)$ – це виражене у відсотках відношення середнього квадратичного відхилення до математичного сподівання, або середньозважене значення цієї величини

$$V(x)=\frac{\sigma(x)}{\mathrm{E}(x)}\cdot 100\% .$$

Математичне сподівання $\mathrm{E}(x)$ застосовують для усереднення досліджуваних величин, цін, що залежить від низки випадкових величин, коли інформація має відомий розкид. З математичним сподіванням звичайно пов'язують точку, біля якої ймовірність має найбільше значення. Тому в економічних розрахунках часто використовують показники середніх цін, індекси середніх цін, середньої собівартості, середньої рентабельності, оскільки конкретні ціни навіть у межах одного ринку мають зазвичай деякий розкид.

Тепер перенесемо сформовані питання у площину теорії нечітких множин.

Нехай B – нечітка множина; $\mathrm{A}_1, \mathrm{A}_2, ..., \mathrm{A}_n$ – повна група подій $\left(\bigcup_{i=1}^{n}\mathrm{A}_i=\Omega, \mathrm{A}_i\cap \mathrm{A}_j=\varnothing, i\neq j\right)$. Також будемо вважати, що задані $\mathrm{P}(\mathrm{A}_1), \mathrm{P}(\mathrm{A}_2), ..., \mathrm{P}(\mathrm{A}_n)$ і $\mu_{\mathrm{B}}^{\mathrm{A}_1}(x), \mu_{\mathrm{B}}^{\mathrm{A}_2}(x), ..., \mu_{\mathrm{B}}^{\mathrm{A}_n}(x)\forall x$ також відомі.

Тоді можемо записати, що функція належності x до нечіткої множини B буде визначатися як усереднена міра

$$\mu_{\mathrm{B}}(x)=\sum_{i=1}^{n}\mathrm{P}(\mathrm{A}_i)\mu_{\mathrm{B}}^{\mathrm{A}_i} .$$

Ми можемо обчислити відхилення очікуваного значення від конкретного показника. Це і буде наш ризик

$$D(x)=\sum_{i=1}^{n}\mathrm{P}(\mathrm{A}_i)\left(\mu_{\mathrm{B}}^{\mathrm{A}_i}(x)-\mu_{\mathrm{B}}(x)\right)^2 .$$

Міру ризику визначають за формулою

$$\sigma(x)=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\mathrm{P}(\mathrm{A}_i)\left(\mu_{\mathrm{B}}^{\mathrm{A}_i}(x)-\mu_{\mathrm{B}}(x)\right)^2} .$$

Середньозважене значення цієї величини набуває вигляду

$$V(x)=\frac{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\mathrm{P}(\mathrm{A}_i)\left(\mu_{\mathrm{B}}^{\mathrm{A}_i}(x)-\mu_{\mathrm{B}}(x)\right)^2}}{\sum_{i=1}^{n}\mathrm{P}(\mathrm{A}_i)\mu_{\mathrm{B}}^{\mathrm{A}_i}(x)}\cdot 100\% .$$

4. ВИСНОВОК

Отож, ми визначили поняття усередненої міри та поняття ризику в термінах теорії нечітких множин, що дає точнішу оцінку ризиків, з якими може стикається те чи інше підприємство, оскільки, внаслідок нечіткості, багато параметрів виявляються недоступними для точного вимірювання, тоді в його оцінці неминуче з'являється суб'єктивний компонент, який виражається нечіткими оцінками.

Список використаної літератури

1. *Дугіна С. І.* Маркетингова цінова політика: навч. посібник / С. І. Дугіна. – Київ: КНЕУ, 2005. – 307-308 с.
2. *Нікольський Ю. В.* Системи штучного інтелекту: навч. посібник / Ю. В. Нікольський, В. В. Пасічник, Ю. М. Щербина. – Львів: "Магнолія-2006", 2013. – 226 с.
3. *Скороход А. В.* Елементи теорії ймовірностей та випадкових процесів / А. В. Скороход. – Київ: Вища шк., 1975. – 13 с.
4. *Тищенко О. М.* Використання теорії нечітких множин у процесі діагностики стану підприємства / О. М. Тищенко, Л. О. Норік // Менеджмент та підприємництво в Україні: етапи становлення і проблеми розвитку [Текст]: [зб. наук. пр.]. – Львів: Видавництво Національного університету "Львівська політехніка", 2009. – № 647. – С. 610-617: іл. – (Вісник / Національний університет "Львівська політехніка").
5. *Rutkowska D.* Sieci neuronowe, algorytmy genetyczne i systemy rozmyte / D. Rutkowska, M. Piliński, L. Rutkowski. – Warszawa: PWN, 1999. – 412 s.
6. *Zadeh L.* Probability measures of fuzzy events / L. Zadeh // Journal of Mathematical Analysis and Applications. – 1968. – Vol. 23, No 2. – P. 421-427.

Стаття: надійшла до редколегії 22.01.2014
доопрацьована 19.02.2014
прийнята до друку 05.03.2014

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПОНЯТИЯ РИСКА С ПОМОЩЬЮ ТЕОРИИ НЕЧЕТКИХ МНОЖЕСТВ

Я. Елейко, Ю. Щербина, С. Дмытрив

Львовский национальный университет имени Ивана Франко,
ул. Университетская, 1, Львов, 79000, e-mail:solomiia.dmytriv@gmail.com

Показано тесную связь классической теории вероятностей и теории нечетких множеств и как следствие возможность применения этой теории в экономических целях. На основании теории нечетких множеств определено понятие усредненной меры, риска и степени риска.

Ключевые слова: вероятность, нечеткое множество, нечеткое событие, функция принадлежности, усредненная мера, риск.

DEFINITION OF THE RISK USING FUZZY SET THEORY

Ya. Yeleyko, Yu. Shcherbyna, S. Dmytriv

Ivan Franko National University of Lviv,
Universytetska Str., 1, Lviv, 79000, e-mail:solomiia.dmytriv@gmail.com

Shown the close relationship of classical probability theory and the theory of fuzzy sets and as a consequence the applicability of this theory to economic purposes. Based on the theory of fuzzy sets defined notion of the average extent of risk and risk.

Key words: probability, fuzzy sets, fuzzy event, the membership function, risk, averaged measure of risk.