ISSN 2078–5097. Вісн. Львів. ун-ту. Сер. прикл. матем. та інф. 2014. Вип. 21. С. 58–66
Visnyk of the Lviv University. Series Appl. Math. and Informatics. Issue 21. P. 58–66

*УДК 519.622.517.925*

# АПАРАТ НЕКЛАСИЧНИХ МІНОРАНТ НЬЮТОНА ФУНКЦІЙ, ЗАДАНИХ ТАБЛИЧНО, ТА ЙОГО ВИКОРИСТАННЯ ДЛЯ НАБЛИЖЕННЯ ФУНКЦІЙ

**Г. Цегелик[1], М. Глебена[2]**

*[1]Львівський національний університет імені Івана Франка,
вул. Університетська, 1, Львів, 79000, e-mail: kafmmsep@franko.lviv.ua
[2]Ужгородський національний університет, вул. Підгірна, 46, Ужгород, 88000*

Побудовано апарат некласичних мінорант Ньютона функцій однієї дійсної змінної, заданих таблично, використано цей апарат для оцінки точності наближення функцій некласичними мінорантами Ньютона.

*Ключові слова*: некласична міноранта Ньютона та її діаграма, апроксимація функцій.

## 1. ВСТУП

В [2] розглянуто побудову апарату некласичних мажорант і діаграм Ньютона функцій однієї й двох дійсних змінних, заданих таблично, та його використання для побудови чисельних методів розв'язування задачі Коші для звичайних диференціальних рівнянь і їхніх систем, точних на певних класах функцій. В [1] апарат некласичних мажорант і діаграм Ньютона використано для розробки чисельних методів оптимізації негладких логарифмічно вгнутих функцій однієї, двох і багатьох дійсних змінних.

Розглянемо побудову апарату некласичних мінорант Ньютона та їхніх діаграм функцій однієї дійсної змінної, заданих таблично, й оцінимо точність наближення функції некласичною мінорантою Ньютона.

## 2. ФОРМУЛЮВАННЯ ЗАДАЧІ

Нехай функція дійсної змінної $y = f(x)$ задана своїми значеннями в деяких точках $x_i$, $i = 1,2,\ldots,n$ :

$$f(x_i) = y_i, \quad i = 0,1,\ldots,n. \tag{1}$$

Вважатимемо, що

$$|y_i| = a_i, \quad 0 < a_i \le M, \quad i = 0,1,\ldots,n, \tag{2}$$

де $M$ – деяка стала. Треба для функції $f(x)$ побудувати міноранту Ньютона, визначити властивості, оцінити похибку наближення функції мінорантою Ньютона.

## 3. РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧІ

### 3.1. АПАРАТ НЕКЛАСИЧНИХ МІНОРАНТ НЬЮТОНА ФУНКЦІЙ, ЗАДАНИХ ТАБЛИЧНО

**Означення 1.** Точку $P_i(x_{i,} - \ln a_i)$ з координатами $x = a_i$, $y = -\ln a_i$ у площині $xy$ назвемо точкою зображення значення функції $y = f(x)$ у точці $x = x_i$.

Припустимо, що точки зображення $P_i$ значень функції $y = f(x)$ у точках $x_i$, $i = 0,1,\ldots,n$, в площині $xy$ побудовані. З кожної точки $P_i$ проведемо півпряму у від'ємному напрямі осі $Oy$ перпендикулярно до осі $Ox$. Множину точок цих півпрямих позначимо через $S$, а її опуклу оболонку – через $C(S)$. Для кожного $x \in [x_0, x_n]$ визначимо точку $D_x(x, \chi_x)$, де

$$\chi_x = \sup_{(x,y)\in C(S)} y .$$

Множина точок $D_x(x, \chi_x)$, $x \in [x_0, x_n]$, утворює лінію $\delta_f$, яка обмежує $C(S)$ зверху. Ця лінія є неперервною, вгнутою ламаною лінією і її рівняння таке:

$$y = \chi(x),\ x \in [x_0, x_n],$$

де $\chi(x) = \chi_x$.

Позначимо

$$m_f(x) = \exp(-\chi(x)),\ x \in [x_0, x_n].$$

Тоді для кожного $x_i$, $i = 0,1,\dots,n$, виконується нерівність

$$m_f(x_i) \le |f(x_i)| = a_i .$$

Справді, з побудови $\delta_f$ випливає, що

$$-\ln|f(x_i)| \le \chi(x_i),$$

або

$$|f(x_i)| \ge \exp(-\chi(x_i)) = m_f(x_i).$$

Крім того, $m_f(x_0) = |f(x_0)|$, $m_f(x_n) = |f(x_n)|$.

**Означення 2.** Функцію $y = m_f(x)$, визначену на проміжку $[x_0, x_n]$, назвемо некласичною мінорантою Ньютона функції $y = f(x)$ на цьому проміжку, а ламану лінію $\delta_f$ – її діаграмою.

На рис. 1 побудована діаграма міноранти Ньютона функції, заданої в дев'ятьох точках

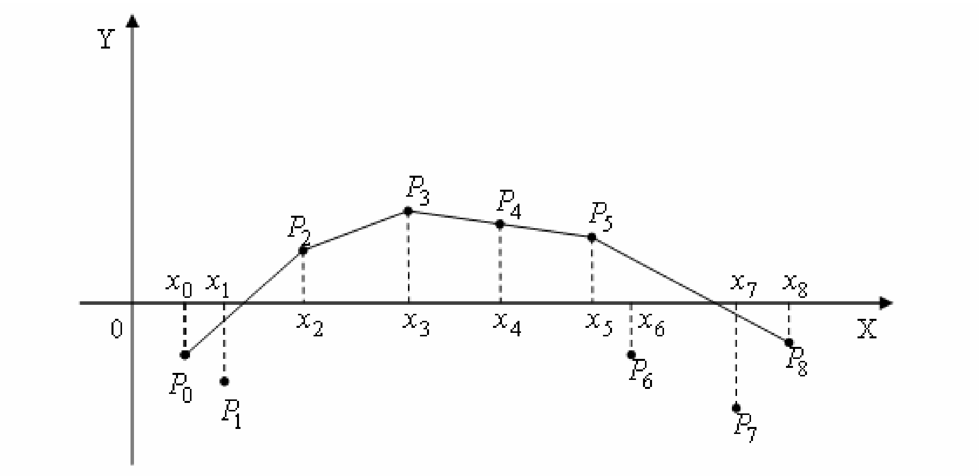


Рис. 1. Діаграма міноранти Ньютона функції, заданої в дев'ятьох точках

Діаграма $\delta_f$ міноранти Ньютона функції $y = f(x)$ має такі властивості:

– кожна вершина $\delta_f$ розміщена в одній із точок зображення $P_i$ значення функції $y = f(x)$ у точці $x_i$, $i = 0,1,\dots,n$;

– кожна точка зображення $P_i$, $i = 0,1,\dots,n$, розміщена на $\delta_f$ або нижче неї.

Нехай

$$m_f(x_i) = t_i, \; i = 0,1,\dots,n.$$

**Означення 3.** Величини

$$r_i = \left(\frac{t_{i-1}}{t_i}\right)^{\frac{1}{x_i - x_{i-1}}} \quad (i = 1,2,\dots,n)$$

і

$$d_i = \frac{r_{i+1}}{r_i} \quad (i = 1,2,\dots,n-1)$$

назвемо відповідно $i$-м числовим нахилом і $i$-м відхиленням діаграми $\delta_f$ мінoранти Ньютона.

**Означення 4.** Якщо точка зображення $P_i$, $i = 0,1,\dots,n$, розташована у вершині $\delta_f$, то індекс $i$ назвемо вершинним індексом, якщо ж на $\delta_f$, то діаграмним індексом $\delta_f$. Індекси $i = 0$ та $i = n$ зачислимо до вершинних індексів.

Множину всіх вершинних індексів позначимо через $I$, а множину діаграмних індексів – через $G$. Очевидно, $I \subseteq G$ і $t_i = a_i$ для всіх $i \in G$.

Нехай $\varphi_i$ – кут між відрізком $D_{x_{i-1}} D_{x_i}$ діаграми $\delta_f$ і додатним напрямом осі абсцис. Тоді кутовий коефіцієнт $k_i$ відрізка $D_{x_{i-1}} D_{x_i}$ визначиться за формулою

$$k_i = \frac{\chi_{x_i} - \chi_{x_{i-1}}}{x_i - x_{i-1}} = \frac{-\ln t_i + \ln t_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} = \ln\left(\frac{t_{i-1}}{t_i}\right)^{\frac{1}{x_i - x_{i-1}}}.$$

Тому

$$k_i = \ln r_i.$$

Звідси випливає, що

$$r_i = \exp(tg\varphi_i), \; d_i = \exp(tg\varphi_{i+1} - tg\varphi_i).$$

Якщо $\{i_k\}$ $(k = 0,1,\dots,s;\, s \le n)$ – послідовність вершинних індексів $\delta_f$, то

$$r_{i_1} > r_{i_2} > \dots > r_{i_s};$$
$$r_{i_k+1} = r_{i_k+2} = \dots = r_{i_{k+1}}, \quad k = 0,1,\dots,s-1;$$
$$d_i \le 1, \quad i = 1,2,\dots,n-1;$$
$$d_{i_k} < 1, \quad k = 1,2,\dots,s-1.$$

Нехай $p$ і $q$ – два послідовні вершинні індекси $\delta_f$, індекс $i$ задовольняє умову $p < i < q$. Розглянемо відрізок $D_{x_p} D_{x_q}$ діаграми $\delta_f$ (рис. 2).

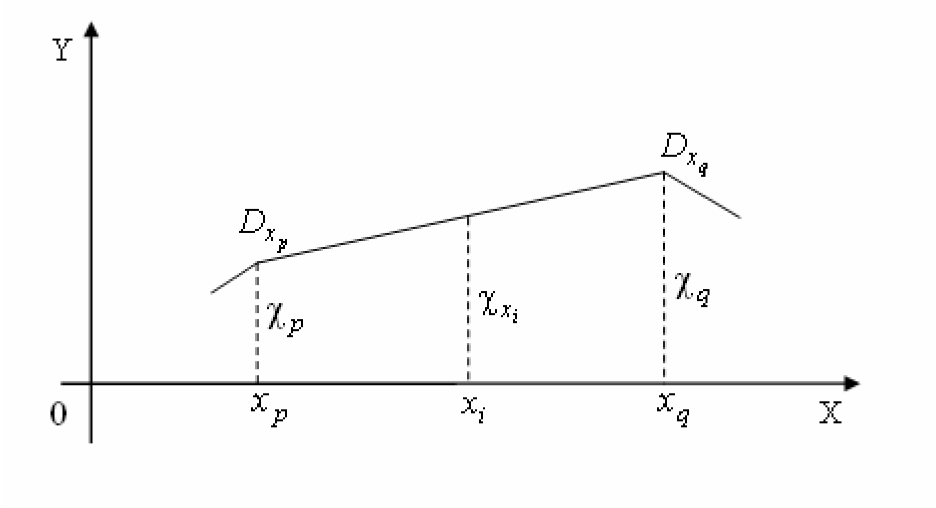


Рис. 2. Відрізок $D_{x_p}D_{x_q}$ діаграми $\delta_f$

Тоді

$$\frac{\chi_{x_q}-\chi_{x_p}}{x_q-x_p}=\frac{\chi_{x_i}-\chi_{x_p}}{x_i-x_p},$$

або

$$\frac{-\ln a_q+\ln a_p}{x_q-x_p}=\frac{-\ln t_i+\ln a_p}{x_i-x_p}.$$

Звідси

$$t_i=\left(a_p^{x_q-x_i}a_q^{x_i-x_p}\right)^{\frac{1}{x_q-x_p}}.$$

Аналогічно одержуємо формулу для міноранти Ньютона $m_f(x)$ на проміжку $\lfloor x_p,x_q\rfloor$

$$m_f(x)=\left(a_p^{x_q-x}a_q^{x-x_p}\right)^{\frac{1}{x_q-x_p}}.$$

### 3.2. ВЛАСТИВОСТІ МІНОРАНТИ НЬЮТОНА ТА ЇЇ ДІАГРАМИ

Якщо рівняння відрізка $D_{x_p}D_{x_q}$ діаграми $\delta_f$ набуває вигляду $y=kx+b$, $x\in\lfloor x_p,x_q\rfloor$, то

$$m_f(x)=\exp(-kx-b),\ x\in\lfloor x_p,x_q\rfloor.$$

Звідси випливає таке твердження.

**Твердження 1.**

а) Якщо $k\neq 0$, то міноранта Ньютона $m_f(x)$ на проміжку $\lfloor x_p,x_q\rfloor$ є строго опуклою функцією; якщо $k=0$, то $m_f(x)$ на цьому проміжку є відрізком, паралельним до осі абсцис.

б) Якщо $f(x)=A\exp(kx+b)$, то $m_f(x)=|f(x)|$.

З побудови $\delta_f$ випливають такі твердження.

**Твердження 2.**

а) Міноранта Ньютона $m_f(x)$, $x \in [x_0, x_n]$, складається з $(s-1)$ – ї опуклих дуг, де $s$ – кількість вершинних індексів $\delta_f$.

б) Якщо функція є логарифмічно опуклою, то $m_f(x) \geq f(x)$ для всіх $x \in [x_0, x_n]$; якщо логарифмічно вгнутою, то $m_f(x) \leq f(x)$ для всіх $x \in [x_0, x_n]$.

**Твердження 3.** Для того, щоб для функції $f(x)$, заданої таблицею значень (1), існувала діаграма $\delta_f$, визначена на проміжку $[x_0, x_n]$, необхідно і достатньо, щоб для неї виконувалась умова (2).

**Твердження 4.** Міноранта Ньютона $m_f(x)$ функції $y = f(x)$, заданої таблицею значень (1), є неперервною і логарифмічно опуклою функцією на проміжку $[x_0, x_n]$.

**Твердження 5.** Якщо для функції $y = f(x)$, заданої таблицею значень (1), виконуються умови (2), то

$$\min_{1 \prec i \leq n} |f(x_i| = \min_{x \in [x_0, x_n]} m_f(x).$$

Якщо

$$\min_{1 \prec i \leq n} |f(x_i| = |f(x_s|,$$

то

$$\min_{x \in [x_0, x_n]} m_f(x) = m_f(x_s) = t_s,$$

де $s \in G$.

### 3.3. ОЦІНКА ПОХИБКИ НАБЛИЖЕННЯ ФУНКЦІЇ НЕКЛАСИЧНОЮ МІНОРАНТОЮ НЬЮТОНА

Розглянемо питання оцінки похибки апроксимації функції некласичною мінорантою Ньютона. Нехай $f(x) \in C[a,b]$ – логарифмічно опукла функція на проміжку $[a,b]$ і на цьому проміжку задовольняє умову Ліпшиця зі сталою $L$. Виберемо на $[a,b]$ систему рівновіддалених точок $x_i = x_0 + ih$, $i = 0,1,\ldots,n$, де $x_0 = a$, $h = (b-a)/n$. Побудуємо для функції $y = f(x)$ некласичну міноранту Ньютона $m_f(x)$, визначену на проміжку $[a,b]$, за точками $x_0, x_1, \ldots, x_n$ і значеннями функції в цих точках. Позначимо її через $m_f^{(n)}(x)$. Оскільки $f(x)$ – логарифмічно опукла функція, то $m_f^{(n)}(x)$ на кожному з проміжків $[x_i, x_{i+1}]$, $i = 0,1,\ldots,n-1$, збігається з мінорантою Ньютона, побудованою для функції $f(x)$ за двома точками $(x_i, f(x_i))$ і $(x_{i+1}, f(x_{i+1}))$.

**Теорема 1.** Якщо для функції $f(x) \in C[a,b]$ виконуються умови:

1) $f(x)$ є логарифмічно опуклою функцією на $[a,b]$,

2) $f(x)$ на $[a,b]$ задовольняє умову Ліпшиця зі сталою $L$, то

$$\lim_{n \to \infty} m_f^{(n)}(x) = f(x)$$

рівномірно для всіх $x \in [a,b]$ й існує таке натуральне $N_0$, що для всякого $n \ge N_0$ правильна оцінка

$$0 \le m_f^{(n)}(x) - f(x) \le \frac{L(b-a)}{n}.$$

*Доведення.* Знайдемо таке натуральне число $N_0$, що для кожного $n \ge N_0$ на всіх проміжках $[x_i, x_{i+1}]$, $i = 0,1,\ldots,n-1$, функція $f(x)$ буде монотонно зростаючою або монотонно спадною. Тоді для будь-якого $x \in [a,b]$

$$m_f^{(n)}(x) - f(x) \le \max_{0 \le k \le n-1} \max_{x \in [x_k, x_{k+1}]} \left( m_f^{(n)}(x) - f(x) \right) \le$$

$$\le \max_{0 \le k \le n-1} \left| f(x_k) - f(x_{k+1}) \right| \le \max_{0 \le k \le n-1} L \left| x_k - x_{k+1} \right| = \frac{L(b-a)}{n}.$$

Отже, для будь-якого $x \in [a,b]$

$$m_f^{(n)}(x) - f(x) \le \frac{L(b-a)}{n}.$$

Звідси випливає рівномірна збіжність $m_f^{(n)}(x)$до $f(x)$ при $n \to \infty$.

Нехай тепер $f(x) \in C[a,b]$ – довільна функція, яка задовольняє умову Ліпшиця зі сталою $L$ на $[a,b]$. Припустимо, що $f(x) > 0$ для всіх $x \in [a,b]$. Виберемо на $[a,b]$ систему рівновіддалених точок $\bar{x}_i = \bar{x}_0 + ih$, $i = 0,1,\ldots,n$, де $\bar{x}_0 = a$, $h = (b-a)/n$. Доповнимо цю систему критичними точками функції $f(x)$, які належать проміжку $[a,b]$ і не входять у вибрану систему точок ( якщо такі існують). Внаслідок такого доповнення одержимо нову систему вузлів $x_0, x_1, \ldots, x_{n+m}$, де

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{n+m} = b,$$

$m$ $(m \ge 0)$ – кількість критичних точок функції $y = f(x)$, які належать проміжку $[a,b]$ і не входять до системи точок $\bar{x}_0, \bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n$. Для нової системи точок виконується умова

$$x_{i+1} - x_i \le h,\ i = 0,1,\ldots,n+m-1.$$

Побудуємо функцію $q_n(f;x)$, визначену на $[a,b]$, яка на кожному з проміжків $[x_i, x_{i+1}]$ збігається з мінорантою Ньютона , побудованою для функції $f(x)$ за двома точками $(x_i, f(x_i))$ і $(x_{i+1}, f(x_{i+1}))$. Очевидно, $q_n(f;x) \in C[a,b]$.

**Теорема 2.** Якщо функція $f(x) \in C[a,b]$ на проміжку $[a,b]$ задовольняє умову Ліпшиця зі сталою $L$, то

$$\lim_{n \to \infty} q_n(f;x) = f(x)$$

рівномірно за всіма $x \in [a,b]$ і правильна оцінка

$$\left| f(x) - q_n(f;x) \right| \le \frac{L(b-a)}{n}.$$

*Доведення*. Нехай

$$\max_{x \in [a,b]} \left| f(x) - q_n(f;x) \right| = \max_{x \in [x_k, x_{k+1}]} \left| f(x) - q_n(f;x) \right|.$$

Оскільки на проміжку $[x_k, x_{k+1}]$ функція $q_n(f;x)$ збігається з мінорантою Ньютона , побудованою для $f(x)$ за двома точками $(x_k, f(x_k))$ і $(x_{k+1}, f(x_{k+1}))$, і на цьому проміжку $f(x)$ монотонно спадає або зростає, то

$$\max_{x\in[x_k,x_{k+1}]} |f(x)-q_n(f;x)| \le |f(x_k)-f(x_{k+1})| \le L|x_k - x_{k+1}| \le \frac{L(b-a)}{n}.$$

Ця нерівність і доводить теорему.

Якщо $f(x) \in C^2[a,b]$ – логарифмічно опукла функція, то можна одержати іншу оцінку похибки апроксимації $f(x)$ некласичною мінорантою Ньютона.

**Теорема 3.** Якщо $f(x) \in C^2[a,b]$ – логарифмічно опукла функція, то

$$m_f(x) - f(x) \le \frac{M_2}{8}(b-a)^2,$$

де $M_2 = \max_{x\in[a,b]} f''(x)$.

*Доведення.* Оскільки $f(x)$ – логарифмічно опукла функція, то $m_f(x) \ge f(x)$ і $L_1(x) \ge m_f(x)$ для всіх $x \in [a,b]$, де $L_1(x)$ – інтерполяційний поліном Лагранжа першого степеня, побудований за вузлами $x_0 = a,\ x_1 = b$. Тоді

$$m_f(x) - f(x) \le L_1(x) - f(x) = -\frac{f''(\xi)}{2!}(x-a)(x-b), \quad \xi \in (a,b).$$

Добуток $-(x-a)(x-b)$ на проміжку $[a,b]$ набуває найбільшого значення $\frac{(b-a)^2}{4}$ при $x = \frac{a+b}{2}$. Тому

$$m_f(x) - f(x) \le -\frac{f''(\xi)}{8}(b-a)^2,$$

або

$$m_f(x) - f(x) \le \frac{M_2}{8}(b-a)^2.$$

Якщо на проміжку $[a,b]$ вибрати систему точок $x_i = x_0 + ih$, $i = 0,1,\dots,n$, де $x_0 = a$, $h = (b-a)/n$, і на кожному проміжку $[x_k, x_{k+1}]$, $k = 0,1,\dots,n-1$, побудувати некласичну міноранту Ньютона $m_f^{(n)}(x)$ за двома точками $(x_k, f(x_k))$ і $(x_{k+1}, f(x_{k+1}))$, то з теореми випливає такий наслідок.

**Наслідок 1.** Якщо $f(x) \in C^2[a,b]$ – логарифмічно опукла функція на проміжку $[a,b]$, то для всіх $x \in [x_k, x_{k+1}]$, $k = 0,1,\dots,n-1$ справджується оцінка

$$m_f(x) - f(x) \le \frac{M_2}{8}h^2.$$

До цього часу ми всюди вважали, що $f(x) > 0$, для всіх $x \in [a,b]$. Якщо ця умова не виконується, то для наближення функції $f(x)$ некласичною мінорантою Ньютона робимо так. Розглянемо функцію $f(x) + C$, де $C$ – деяка стала, така що $f(x) + C > 0$ для всіх $x \in [a,b]$. Тоді на проміжку $[a,b]$ вибираємо систему точок $x_k = x_0 + kh$, $k = 0,1,\dots,n$, де $x_0 = a$, $h = (b-a)/n$, і для функції $f(x) + C$ будуємо мінораниту Ньютона, яку позначаємо через $m_{f+c}(x)$. Очевидно, функція $m_{f+c}(x)-C$ буде апроксимуючою функцією для $f(x)$ і точність наближення $f(x)$ функцією $m_f(x)+C$ буде визначатись точністю наближення функції $f(x)+C$ мінорантою Ньютона $m_{f+c}(x)$, тобто будуть справджуватись аналогічні теореми про точність наближення $f(x)$ функцією $m_{f+c}(x)-C$ як у випадку наближення функції $f(x)>0$ мінорантою Ньютона $m_f(x)$.

**Наслідок 2.** Якщо $f(x)\in C^2[a,b]$ – логарифмічно опукла функція на проміжку $[a,b]$, то для всіх $x\in[a,b]$ справджується оцінка

$$m_f(x)-f(x)\le\frac{M_2}{8}h^2 .$$

4. ВИСНОВКИ

Побудовано апарат некласичних мінорант Ньютона функцій однієї дійсної змінної, заданих таблично. Визначено оцінки точності наближення функцій некласичною мінорантою Ньютона.

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. *Глебена М. І.* Математичні моделі та числові методи мажорантного типу для аналізу дискретних оптимізаційних процесів: автореф. дис. на здобуття наук. ступеня канд. фіз.-мат. наук: спец. 01.05.02 Математичне моделювання та обчислювальні методи / М. І. Глебена. – Івано-Франківськ, 2012. – 23 с.
2. *Цегелик Г. Г.* Аппарат некласичних мажорант і діаграм Ньютона функцій, заданих таблично, та його використання в чисельному аналізі: монографія / Г. Г. Цегелик. – Львів: ЛНУ імені Івана Франка, 2013. – 190 с.

*Стаття: надійшла до редколегії 02.10.2013*
*доопрацьована 20.11.2013*
*прийнята до друку 27.11.2013*

## АППАРАТ НЕКЛАССИЧЕСКИХ МИНОРАНТ НЬЮТОНА ФУНКЦИЙ, ЗАДАННЫХ ТАБЛИЧНО, И ЕГО ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ДЛЯ ПРИБЛИЖЕНИЯ ФУНКЦИЙ

**Г. Цегелик[1], М. Глебена[2]**

[1]*Львовский национальный университет имени Ивана Франко, ул. Университетская, 1, Львов, 79000, e-mail: kafmmsep@franko.lviv.ua*
[2]*Ужгородский национальный университет, ул. Подгорная, 46, Ужгород, 88000*

Построен аппарат неклассических минорант Ньютона функций одной действительной переменной, заданных таблично. Установлены оценки точности приближения функций неклассической минорантой Ньютона.

*Ключевые слова*: неклассическая миноранта Ньютона, аппроксимация функций.

**THE APPARATUS OF NON-CLASSICAL NEWTONIAN MINORANTS FUNCTIONS GIVEN TABULARLY AND THE USE IT FOR THE APPROXIMATION OF FUNCTIONS**

**H. Tsehelyk[1], M. Hlebena[2]**

[1]*Ivan Franko National University of Lviv,*
*Universytetska Str., 1, Lviv, 79000, e-mail: kafmmsep@franko.lviv.ua*
[2]*Uzhgorod National University, Pidgirna Str., 46, Uzhgorod, 88000*

The apparatus of non-classical Newtonian minorants functions given tabularly has been constructed. The accuracy of approximation of functions of non-classical Newtonian minorants has been established.

*Key words*: non-classical Newtonian minorants, accuracy of approximation.