ISSN 2078–5097. Вісн. Львів. ун-ту. Сер. прикл. матем. та інф. 2014. Вип. 21. С. 3–12
Visnyk of the Lviv University. Series Appl. Math. and Informatics. Issue 21. P. 3–12

О Б Ч И С Л Ю В А Л Ь Н А   М А Т Е М А Т И К А

УДК 519.6

ПРО ЧИСЕЛЬНЕ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ МІШАНОЇ ЗАДАЧІ ДІРІХЛЕ-НЕЙМАНА ДЛЯ РІВНЯННЯ ЛАПЛАСА У ВИПАДКУ ТОРОЇДАЛЬНОЇ ОБЛАСТІ

К. Бабенко[1], Р. Хапко[2]

[1]*Українська інженерно-педагогічна академія,*
вул. Університетська, 16, Харків, 61003, e-mail: babenko.kristi@gmail.com
[2]*Львівський національний університет імені Івана Франка,*
вул. Університетська, 1, Львів, 79000, e-mail: chapko@lnu.edu.ua

Розглянуто наближене розв'язування мішаної задачі для рівняння Лапласа у осесиметричній області, утвореній обертанням двох замкнених гладких кривих навколо однієї з осей координат. За допомогою теорії потенціалу задачу редуковано до системи поверхневих інтегральних рівнянь. Враховуючи симетрію області, їх перетворено до одновимірних інтегральних рівнянь з логарифмічною особливістю в ядрах. Чисельне розв'язування виконано методом тригонометричних квадратур. Показано супералгебричну швидкість збіжності наближених розв'язків, що підтверджено наведеними результатами чисельних експериментів.

Ключові слова: інтегральні рівняння, тороїдальні області, еліптичні інтеграли, метод квадратур, супералгебрична збіжність.

1. ФОРМУЛЮВАННЯ ЗАДАЧІ ТА ЗВЕДЕННЯ ДО СИСТЕМИ ІНТЕГРАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

Один із підходів для дослідження та наближеного розв'язування граничних задач для рівнянь у частинних похідних полягає у використанні інтегральних рівнянь. За допомогою теорії потенціалу або формули Гріна задача для диференціального рівняння, яке має фундаментальний розв'язок, редукується до граничного інтегрального рівняння. У підсумку розмірність вихідної задачі зменшується на одиницю. Особливо ефективним цей метод виявився для просторових задач, які часто моделюють практично важливі проблеми прикладних застосувань. Якщо ж гранична поверхня задачі має осьову симетрію, то розмірність інтегрального рівняння може бути понижена ще на одиницю [2, 3, 6]. Для наближеного розв'язування отримується одновимірне інтегральне рівняння. Ми цей підхід використали для чисельного розв'язування мішаної задачі Діріхле-Неймана у випадку тороїдальної області. Тороїдальні області досить прості, добре досліджені та в більшості випадків дають змогу суттєво спростити розв'язування задачі. Незважаючи на це, тороїдальні області мають широке практичне застосування. Області тороїдальної форми використовують для моделювання форми іонних каналів [11], еритроцитів [4], у комп'ютерному моделюванні макромолекулярного перенесення речовин через стінки судин [5], магнітних полів у вакуумі [14], для розв'язування задач теорії пружності [10], аеродинаміки [13] тощо.

Нехай $D \subset \mathbf{R}^3$ обмежена область з границями $\Sigma_j \in C^2, j = 1, 2, \Sigma_1 \cap \Sigma_2 = \{\varnothing\}$. Треба знайти класичний розв'язок внутрішньої мішаної задачі Діріхле-Неймана

$$\Delta u = 0 \quad \text{в} \quad D, \tag{1.1}$$

$$u = f_1 \quad \text{на} \quad \Sigma_1, \tag{1.2}$$

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} = f_2 \quad \text{на} \quad \Sigma_2 . \tag{1.3}$$

Тут $\nu(x) = \big(\nu_1(x), \nu_2(x)\big)$ – одиничний вектор зовнішньої нормалі та $f_j \in C(\Sigma_j), j = 1,2$ – задані граничні функції.

За допомогою другої формули Гріна легко довести єдиність розв'язку сформульованої задачі.

Теорема 1.1. Мішана гранична задача Діріхле-Неймана (1.1.)-(1.3) має найбільше один розв'язок.

Будемо шукати цей розв'язок у формі суми потенціалів простого шару

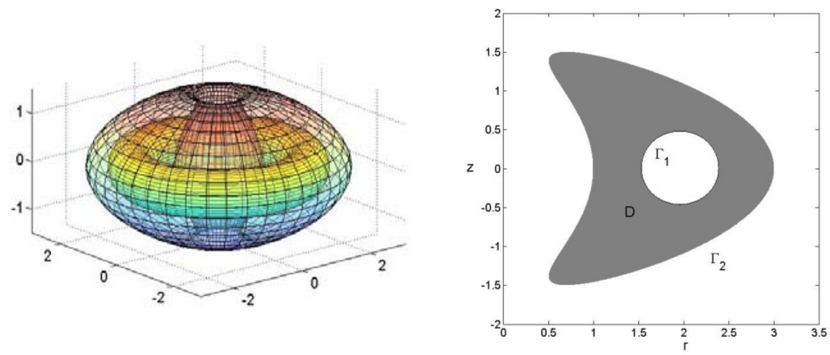
$$u(x) = \int_{\Sigma_1} \mu_1(y)\Phi(x,y)ds(y) + \int_{\Sigma_2} \mu_2(y)\Phi(x,y)ds(y), \; x \in D, \tag{1.4}$$

де $\mu_j \in C(\Sigma_j)$, $j = 1,2$ – невідомі густини і $\Phi(x,y) = \dfrac{1}{4\pi} \dfrac{1}{|x-y|}$ – фундаментальний розв'язок рівняння (1.1).

Зважаючи на неперервність потенціалу простого шару і стрибок його нормальної похідної [9], задача (1.1)-(1.3) зводиться до розв'язування системи граничних інтегральних рівнянь

$$\begin{cases} \displaystyle\int_{\Sigma_1} \mu_1(y)\Phi(x,y)ds(y) + \int_{\Sigma_2} \mu_2(y)\Phi(x,y)ds(y) = f_1(x), x \in \Sigma_1, \\ \displaystyle\frac{1}{2}\mu_2(x) + \int_{\Sigma_1} \mu_1(y)\frac{\partial \Phi(x,y)}{\partial \nu(x)}ds(y) + \int_{\Sigma_2} \mu_2(y)\frac{\partial \Phi(x,y)}{\partial \nu(x)}ds(y) = f_2(x), x \in \Sigma_2. \end{cases} \tag{1.5}$$

Зауважимо, що з властивостей стрибків нормальної похідної потенціалу простого шару в поєднанні з єдиністю розв'язку граничної задачі (теорема 1.1.), отримуємо, що система інтегральних рівнянь (1.5) має найбільше один розв'язок.



а *б*

Рис. 1. Вигляд областей: *а*) тороїдальна область; *б*) криві обертання

Припустимо, що область D - тороїдальна, тобто граничні поверхні $\Sigma_j, j = 1,2$ утворені обертанням замкнених кривих $\Gamma_j, j = 1,2$, навколо осі Ox_3 (див. рис.1). У цьому випадку доцільно ввести циліндричну систему координат (r, z, φ). Нехай

$\Gamma_j := \{x_j(t) = (r_j(t), z_j(t)),\ 0 \le t \le 2\pi\}$ з $r_j(t) > 0$ і $|x_j'(t)| > 0$ для довільного $t \in [0, 2\pi]$. Граничні поверхні можна подати у параметричній формі

$$\Sigma_j = \{x_j(t,\varphi) = (r_j(t)\cos\varphi, r_j(t)\sin\varphi, z_j(t)),\ 0 \le t, \varphi \le 2\pi\},\ j = 1,2\,.$$

Будемо вважати, що граничні функції $f_j, j = 1,2$ не залежать від кута φ. Ці припущення дають змогу записати інтегральні рівняння (1.5) у параметризованому вигляді

$$\begin{cases} \dfrac{1}{4\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi}\left[\gamma_1(\tau)L_{11}(t,\tau) + \gamma_2(\tau)L_{12}(t,\tau)\right]d\tau = g_1(t), \\ \dfrac{1}{2}\gamma_2(t) + \dfrac{1}{4\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi}\left[\gamma_1(\tau)L_{21}(t,\tau) + \gamma_2(\tau)L_{22}(t,\tau)\right]d\tau = g_2(t), \end{cases} \tag{1.6}$$

де $t \in [0, 2\pi]$, $\gamma_j(t) = \mu_j(x_j(t))$, $g_j(t) = f_j(x_j(t))$ і

$$L_{ij}(t,\tau) = r_j(\tau)\left|x_j'(\tau)\right|\Phi_i(x_i(t), x_j(\tau)),\ i,j = 1,2\,. \tag{1.7}$$

Тут введено позначення

$$\Phi_1(x,y) = \int_0^{2\pi}\frac{1}{R(x,y,\varphi)}d\varphi,\quad x = (r,z), y = (\overline{r}, \overline{z}) \in \Gamma_1 \cup \Gamma_2,$$

$$\Phi_2(x,y) = \frac{\partial}{\partial\nu(x)}\int_0^{2\pi}\frac{1}{R(x,y,\varphi)}d\varphi,$$

$$R(x,y,\varphi) = (r^2 + \overline{r}^2 - 2r\overline{r}\cos\varphi + [z - \overline{z}]^2)^{1/2}.$$

2. АНАЛІЗ ЯДЕР ІНТЕГРАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

Після нескладних перетворень [2, 6] функції $\Phi_i, i = 1,2$ набудуть вигляду

$$\Phi_1(x,y) = Q_1^K(x,y)K(k(x,y)),$$

$$\Phi_2(x,y) = Q_2^K(x,y)K(k(x,y)) + Q_2^E(x,y)E(k(x,y)),$$

де K і E – повні еліптичні інтеграли першого та другого роду, відповідно [1],

$$k(x,y) = \frac{4r\overline{r}}{p(x,y)},\quad p(x,y) = (r + \overline{r})^2 + (z - \overline{z})^2,$$

$$Q_1^K(x,y) = \frac{4}{\sqrt{p(x,y)}},\quad Q_2^K(x,y) = -\frac{2\nu_1(x)}{r\sqrt{p(x,y)}},$$

$$Q_2^E(x,y) = \frac{4\nu(x)\cdot(y-x)}{|x-y|^2\sqrt{p(x,y)}} + \frac{2\nu_1(x)}{r\sqrt{p(x,y)}}\,.$$

Для еліптичних інтегралів правильні такі розвинення [1]:

$$K(k) = K_1(k)\ln\frac{1}{1-k} + K_2(k)\ \text{ і }\ E(k) = E_1(k)\ln\frac{1}{1-k} + E_2(k), \tag{2.1}$$

де K_i, E_i, $i = 1,2$ – функції, які подають у вигляді степеневих рядів. Позаяк ці ряди для деяких значень параметра k повільно збіжні, то доцільно скористатись побудованими для них (див. [8]) високоточними чебишовськими апроксимаціями за допомогою многочленів

$$K_i(k) \approx \sum_{m=0}^{NK} a_{mi}(1-k)^m\ \text{ і }\ E_i(k) \approx \sum_{m=0}^{NE} b_{mi}(1-k)^m, \tag{2.2}$$

де a_{mi}, b_{mi} – відомі коефіцієнти. Зауважимо, зокрема, що при $NK = NE = 10$ максимальна абсолютна похибка обчислень за формулами (2.1) з використанням (2.2) має порядок 10^{-18}. Отже, остаточно для фундаментального розв'язку та його нормальної похідної в осесиметричному випадку отримуємо такі вирази:

$$\Phi_i(x,y) = Q_i^1(x,y)\ln\frac{1}{1-k(x,y)} + Q_i^2(x,y), \quad i = 1,2, \tag{2.3}$$

з

$$Q_1^m(x,y) = Q_1^K(x,y)K_m(k(x,y)), \quad m = 1,2,$$

$$Q_2^m(x,y) = Q_2^K(x,y)K_m(k(x,y)) + Q_2^E(x,y)E_m(k(x,y)), \quad m = 1,2.$$

Тепер у діагональних ядрах системи виділимо логарифмічну особливість у формі вагової періодичної функції

$$L_{ii}(t,\tau) = L_{ii}^1(t,\tau)\ln\left(\frac{4}{e}\sin^2\frac{t-\tau}{2}\right) + L_{ii}^2(t,\tau), i = 1,2,$$

де функції L_{ii}^1 і L_{ii}^2 мають вигляд

$$L_{ii}^1(t,\tau) = -r_i(\tau)\left|x_i^{'}(\tau)\right|Q_i^1(x_i(t),x_i(\tau)),$$

$$L_{ii}^2(t,\tau) = L_{ii}(t,\tau) - L_{ii}^1(t,\tau)\ln\left(\frac{4}{e}\sin^2\frac{t-\tau}{2}\right)$$

з діагональними виразами

$$L_{ii}^2(t,t) = r_i(t)\left|x_i^{'}(t)\right|\left[Q_i^1(x_i(t),x_i(t))\ln\frac{4r_i^2(t)}{e\left|x_i^{'}(t)\right|^2} + Q_i^2(x_i(t),x_i(t))\right],$$

$$Q_2^E(x_2(t),x_2(t)) = \frac{2\nu(x_2(t))\cdot x_2^{''}(t)}{\left|x_2^{'}(t)\right|^2\sqrt{p(x_2(t),x_2(t))}} + \frac{2\nu_1(x_2(t))}{r_2(t)\sqrt{p(x_2(t),x_2(t))}}.$$

Введемо інтегральні оператори

$$(S\varphi)(t) = \frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi}\varphi(\tau)\ln\left(\frac{4}{e}\sin^2\frac{t-\tau}{2}\right)d\tau,$$

$$(A_{11}\varphi)(t) = \frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi}\varphi(\tau)\left[(L_{11}^1(t,\tau)-1)\ln\left(\frac{4}{e}\sin^2\frac{t-\tau}{2}\right) + L_{11}^2(t,\tau)\right]d\tau,$$

$$(A_{22}\varphi)(t) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\varphi(\tau)\left[L_{22}^1(t,\tau)\ln\left(\frac{4}{e}\sin^2\frac{t-\tau}{2}\right) + L_{22}^2(t,\tau)\right]d\tau,$$

$$(A_{12}\varphi)(t) = \frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi}\varphi(\tau)L_{12}(t,\tau)d\tau, \ (A_{21}\varphi)(t) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\varphi(\tau)L_{21}(t,\tau)d\tau$$

і запишемо систему інтегральних рівнянь (1.6) в операторній формі

$$\left(U + A\right)\gamma = g, \tag{2.4}$$

де $\gamma = (\gamma_1,\gamma_2)^T$, $g = (g_1, 2g_2)^T$,

$$U = \begin{pmatrix} S & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}, \qquad A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}.$$

Позначимо $C^{l,\alpha}\left[0,2\pi\right]$, $l\in N\cup\{0\}$, $0<\alpha\le 1$ банахові простори 2π- періодичних функцій рівномірно неперервних за Гьольдером. Будемо також вважати, що $\Gamma_m\in C^{l+2}$, $m=1,2$.

Теорема 2.1. Для $g_1\in C^{1,\alpha}\left[0,2\pi\right], g_2\in C\left[0,2\pi\right]$ система інтегральних рівнянь (1.6) має єдиний розв'язок $\gamma_1\in C^{0,\alpha}\left[0,2\pi\right],\gamma_2\in C\left[0,2\pi\right]$, який неперервно залежить від вхідних даних.

Доведення. Оскільки оператор $S:C^{0,\alpha}\left[0,2\pi\right]\to C^{1,\alpha}\left[0,2\pi\right]$ – обмежений і має обмежений обернений, то систему (2.4) можна переписати у такій еквівалентній формі

$$\left[\begin{pmatrix} I_{C^{l,\alpha}} & 0\\ 0 & I_{C^l}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix} S^{-1}A_{11} & S^{-1}A_{12}\\ A_{21} & A_{22}\end{pmatrix}\right]\begin{pmatrix}\gamma_1\\ \gamma_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}S^{-1}g_1\\ 2g_2\end{pmatrix}. \qquad (2.5)$$

Тут I_X – одиничний оператор у відповідному просторі. З властивостей гладкості ядер L_{ij}, L_{ii}^1 і L_{ii}^2 отримуємо, що оператори $A_{1i}:C^{0,\alpha}\left[0,2\pi\right]\to C^{1,\alpha}\left[0,2\pi\right], i=1,2$, $A_{2i}:C\left[0,2\pi\right]\to C\left[0,2\pi\right], i=1,2$ – компактні. Отже, враховуючи єдиність розв'язку системи інтегральних рівнянь, згадувану раніше, за теорією Рісса операторне рівняння другого роду (2.5) має єдиний розв'язок у відповідних просторах.

Через еквівалентність систем інтегральних рівнянь (1.5) і (1.6) отримуємо твердження про коректність мішаної задачі (1.1)-(1.3).

Теорема 2.2. Для $f_1\in C^{1,\alpha}(\Sigma_1), f_2\in C(\Sigma_2)$ мішана задача (1.1)-(1.3) має єдиний розв'язок, який неперервно залежить від вхідних даних.

3. МЕТОД ТРИГОНОМЕТРИЧНИХ КВАДРАТУР

Введемо рівновіддалений поділ $t_j=\dfrac{j\pi}{M}, j=0,...,2M-1, M\in\mathrm{N}$ і розглянемо квадратурні формули

$$\frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi} f(\tau)\ln\left(\frac{4}{e}\sin^2\frac{t_j-\tau}{2}\right)d\tau\approx\sum_{i=0}^{2M-1}R_i(t_j)f(t_i)$$

і

$$\frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi} f(\tau)\,d\tau\approx\frac{1}{4M}\sum_{i=0}^{2M-1}f(t_i),$$

де $R_j(t)=-\dfrac{1}{4M}\left\{0.5+2\sum_{m=1}^{M-1}\dfrac{1}{m}\cos m(t-t_j)+\dfrac{\cos M(t-t_j)}{M}\right\}$.

Ці формули отримали через використання тригонометричної інтерполяції для гладкої частини *f* підінтегральної функції і подальшого точного інтегрування [9]. Після застосування виписаних квадратурних правил до інтегралів у рівнянні (1.7) і колокації у вузлах квадратурних формул приходимо до такої системи лінійних рівнянь

$$\begin{cases} \sum_{j=0}^{2M-1}\left(\gamma_{1j}\left[R_{|i-j|}L_{11}^{1}\left(t_i,t_j\right)+\frac{1}{4M}L_{11}^{2}\left(t_i,t_j\right)\right]+\gamma_{2j}\frac{1}{4M}L_{12}\left(t_i,t_j\right)\right)=g_1(t_i), \\ \frac{1}{2}\gamma_{2j}+\sum_{j=0}^{2M-1}\left(\gamma_{1j}\frac{1}{4M}L_{21}\left(t_i,t_j\right)+\gamma_{2j}\left[R_{|i-j|}L_{22}^{1}\left(t_i,t_j\right)+\frac{1}{4M}L_{22}^{2}\left(t_i,t_j\right)\right]\right)=g_2\left(t_i\right), \end{cases} \tag{3.1}$$

для $i=0,...,2M-1,\ R_j=R_j(0)$ стосовно невідомих значень $\gamma_{mj}\approx\gamma_m\left(t_j\right), m=1,2.$

Наближені розв'язки системи інтегральних рівнянь шукаємо за знайденими значеннями γ_{mi} за допомогою відповідних інтерполяційних тригонометричних поліномів з простору T_M тригонометричних поліномів до степеня $2M$. Визначимо оператор тригонометричного інтерполювання

$$\mathbf{P}_M : C^{0,\alpha}[0,2\pi]\times C[0,2\pi]\to T_M\times T_M,\ \mathbf{P}_M=\begin{pmatrix} P_M & 0 \\ 0 & P_M \end{pmatrix} \text{ з } P_M\varphi=\sum_{j=0}^{2M-1}\varphi(t_j)L_j,$$

де $\left\{L_j, j=0,2M-1\right\}$ – базис Лагранжа в T_M.

Розглянемо апроксимаційні оператори

$$(A_{11}^M\varphi)(t)=\sum_{j=0}^{2M-1}\varphi(t_j)\left[(L_{11}^1(t,t_j)-1)R_j(t)+\frac{1}{4M}L_{11}^2(t,t_j)\right],$$

$$(A_{22}^M\varphi)(t)=\sum_{j=0}^{2M-1}\varphi(t_j)\left[L_{22}^1(t,t_j)R_j(t)+\frac{1}{4M}L_{22}^2(t,t_j)\right],$$

$$(A_{12}^M\varphi)(t)=\frac{1}{4M}\sum_{j=0}^{2M-1}\varphi(t_j)L_{12}(t,t_j),\ (A_{21}^M\varphi)(t)=\frac{1}{2M}\sum_{j=0}^{2M-1}\varphi(t_j)L_{21}(t,t_j)$$

і матрицю операторів $A_M=\begin{pmatrix} A_{11}^M & A_{12}^M \\ A_{21}^M & A_{22}^M \end{pmatrix}$.

Враховуючи єдиність розв'язку задачі тригонометричного інтерполювання, систему (3.1) можна подати у такому еквівалентному операторному вигляді:

$$\mathbf{P}_M\left(U+A_M\right)\gamma_M=\mathbf{P}_M g. \tag{3.2}$$

Тут $\gamma_M=(\gamma_M^1,\gamma_M^2)^T$ з $\gamma_M^m=\sum_{j=0}^{2M-1}\gamma_{mj}L_j$, $m=1,2$.

Збіжність і аналіз похибки наведеного методу квадратур можна отримати на підставі теорії колективно-компактних операторів [7, 12] або за допомогою оцінок тригонометричної інтерполяції у просторах Соболєва [9], застосованих до послідовності операторних рівнянь (3.2). В останньому випадку цей аналіз ґрунтується на оцінці

$$\| P_M g-g\|_q\le\frac{C}{M^{p-q}}\| g\|_p, 0\le q\le p, \frac{1}{2}<p \tag{3.3}$$

для всіх g з простору Соболєва $H^q[0,2\pi]$ і константи C, залежної від p і q.

Теорема 3.1. Для досить великого M система лінійних рівнянь (3.1) має єдиний розв'язок і правильною є оцінка похибки

$$\|\gamma_M-\gamma\|\le C(\|(\mathbf{P}_M U-U)\gamma\|+\|\mathbf{P}_M(A_M-A)\gamma\|.$$

Отже, відповідно до (3.3) запропонований метод квадратур належить до алгоритмів без насичення, тобто його точність пов'язана з гладкістю вхідних даних і правильна так звана супералгебрична збіжність методу. Зауважимо, що при аналітичності Σ_m і f_m отримуємо експоненційну збіжність.

Наближений розв'язок вихідної задачі знаходимо відповідно до (1.4) за формулою

$$u_M(x) = \frac{1}{4M}\sum_{m=1}^{2}\sum_{j=0}^{2M-1}\gamma_{mj} r_m(t_j)\left|x_m'(t_j)\right|\Phi_1(x, x_m(t_j)), x \in D.$$

4. ЧИСЕЛЬНІ ЕКСПЕРИМЕНТИ

Приклад 1. Продемонструємо правильність отриманих апріорних оцінок на чисельному розв'язуванні задачі з точним розв'язком. Нехай граничні поверхні утворені обертанням кривих (див. рис. 1)

$$\Gamma_1 = \{x_1(t) = (0.5\cos t, 0.5\sin t),\ 0 \le t \le 2\pi\},$$

$$\Gamma_2 = \{x_2(t) = (0.35 + \cos t + 0.65\cos 2t, 1.5\sin t),\ 0 \le t \le 2\pi\}.$$

Як граничні функції виберемо $f_1 = 1$ на Γ_1 та $f_2 = 0$ на Γ_2. Очевидно, що $u = 1$ буде й точним розв'язком відповідної граничної задачі (1.1)-(1.3). У табл. 1 подано значення абсолютної похибки для різних значень параметра *M*. Як видно з табл. 1, при подвоєнні значення параметра дискретизації кількість вірних знаків подвоюється, що й свідчить про експоненційну збіжність методу.

Таблиця 1

Значення абсолютних похибок для прикладу 1

M	$x=(1.2,-1)$	$x=(1.2,-0.4)$	$x=(1.2,0)$	$x=(1.2,0.2)$	$x=(1.2,0.8)$
8	0.00071543	0.00016446	0.00007306	0.00010192	0.00033126
16	0.00000476	0.00000017	0.00000040	0.00000011	0.00000219
32	0.00000003	0.0	0.00000003	0.0	0.0

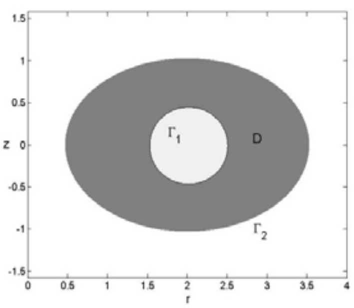
Приклад 2. Нехай криві обертання мають вигляд (див. рис. 2,*а*)

$$\Gamma_1 = \{x_1(t) = (2 + 0.5\cos t, 0.5\sin t),\ 0 \le t \le 2\pi\},$$

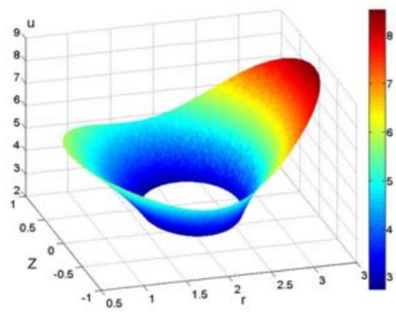
$$\Gamma_2 = \{x_2(t) = (2 + 1.5\cos t, \sin t),\ 0 \le t \le 2\pi\}$$

і граничні функції задані як

$$f_1(x) = x_1 + x_2 \text{ на } \Gamma_1 \text{ та } f_2(x) = x_1 - x_2 \text{ на } \Gamma_2.$$



а



б

Рис. 2. Результати прикладу 2: *а*) геометрія області; *б*) наближений розв'язок

На рис. 2, *б* зображено чисельні результати розв'язування задачі (1.1)-(1.3) пропонованим методом при $M = 64$. У табл. 2 подано чисельні результати у деяких точках спостереження при різних значеннях параметра M. Знову можна пересвідчитись у наявності експоненційної збіжності наближеного розв'язку.

Таблиця 2

Чисельні результати для прикладу 2

M	$x=(2.6,0)$	$x=(2.7,0)$	$x=(2.8,0)$	$x=(2.9,0)$	$x=(3.0,0)$
8	2.57399027	3.49397412	4.26034511	4.92511139	5.51254546
16	2.59461038	3.49575387	4.26057751	4.92517691	5.51257917
32	2.59516429	3.49575787	4.26057756	4.92517691	5.51257917
64	2.59516510	3.49575787	4.26057756	4.92517691	5.51257917

4. ВИСНОВКИ

Враховування наявної осьової симетрії геометрії області дало змогу звести мішану граничну задачу Діріхле-Неймана за допомогою теорії потенціалу до системи коректних одновимірних 2π- періодичних інтегральних рівнянь з логарифмічною особливістю в ядрах. Застосовуючи метод тригонометричних квадратур, отримано систему лінійних рівнянь з повністю заповненою матрицею, коефіцієнти якої є значеннями ядер у точках. Доведено збіжність методу та його належність до класу алгоритмів без насичення точності. Наведені результати чисельних експериментів підтверджують теоретичні оцінки.

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. *Абрамовиц М.* Справочник по специальным функциям / М. Абрамовиц, И. Стиган. – М.: Наука, 1979. – 832 с.
2. *Дацїв Г.* Про чисельне розв'язування однієї мішаної осесиметричної граничної задачі для рівняння Лапласа / Г. Дацїв, Р. Хапко // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. прикл. матем. та інформ. – 2006. – Вип. 11. – С. 43-53.
3. *Хапко Р.* Про числове розв'язування граничної задачі Діріхле для рівняння Гельмгольца у випадку замкнених і розімкнених тороїдальних поверхонь / Р. Хапко // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. прикл. матем. та інформ. – 2002. – Вип. 4. – С. 67-75.
4. *Biasio A. Di.* Electrical polarisability of differently sheped dielectric objects in the presence of localized interfacial charge distribution a unifying scenario / A. Di. Blasio, L. Ambrosone, C. Cametti // J. Phys. D: Applied Physics. – 2013. – Vol. 46. – doi: 10.1088/0022-3727/46/5/055305.
5. *Balsim I.* Harmonic solutions of a mixed boundary problem arising in the modeling of macromolecular transport into vessel walls / I. Balsim, M. A. Neimark, D. S. Rumschitzki // Computers and Mathematics with Applications. – 2010. – Vol. 59. – P. 1897-1908.
6. *Chapko R.* On the numerical solution of the Dirichlet initial boundary-value problem for the heat equation in the case of a torus / R. Chapko // J. Eng. Math. – 2002. – Vol. 43. – P. 75-87.
7. *Chapko R.* On a quadrature method for a logarithmic integral equation of the first kind / R. Chapko, R. Kress // In: World Scientific Series in Applicable Analysis

Contributions in Numerical Mathematics / [ed. Agarwal]. - World Scientific, Singapore. – 1993. – Vol. 2. – P. 127-140.
8. *Cody W. J.* Chebyshev approximation for the complete elliptic integrals *K* and *E* / W. Cody // Math. Comput. – 1965. – Vol. 19. – P. 105-112.
9. *Kress R*. Linear Integral Equations / R. Kress. – Springer, Berlin. – 1999. – 365 p.
10. *Krokhmal P*. Exact solution of the displacement boundary-value problem of elasticity ofr a torus / P. Krokhmal // Journal of Engineering Mathematics. – 2002. – Vol. 44. – P. 345-368.
11. *Kuyucak S.* Analytical solutions of Poison's equation for realistic geometrical shapes of membrane ion channels / S. Kuyucak, M. Hoyles, S.-Ho Chung // Biophysical Journal. – 1998. – Vol. 74. – P. 22-36.
12. *Li H.* Mechanical quadrature methods and splitting extrapolation algorithms for the boundary integral equations of the axisymmetric anisotropic Darcy's equtation / H. Li, J. Huang, C. Chen. (to appear).
13. *Lifanov P. I.* On a uniform approximation of a hypersingular integral equation on the torus / P.I. Lifanov // Differential Equations. – 2000. – Vol. 36, № 9. – P. 1381-1386. (Translated from Differentsyalnie Uravnenia. – 2000. – Vol. 36, № 9. – P. 1248-1252).
14. *Van Milligen B. Ph.* Expansion of vacuum magnetic fields in toroidal harmonics / B. Ph. Van Milligen, A. Lopez Fraguas // Comp. Phys. Comm. – 1994. – Vol. 81. – P. 74-90.

Стаття: надійшла до редколегії 29.01.2014
доопрацьована 19.02.2014
прийнята до друку 05.03.2014

О ЧИСЛЕННОМ РЕШЕНИИ СМЕШАННОЙ ЗАДАЧИ ДИРИХЛЕ-НЕЙМАНА ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ЛАПЛАСА В СЛУЧАЕ ТОРОИДАЛЬНОЙ ОБЛАСТИ

К. Бабенко[1], Р. Хапко[2]

[1] *Украинская инженерно-педагогическая академия,*
ул.Университетская, 16, Харьков, 61003, e-mail: babenko.kristi@gmail.com
[2] *Львовский национальный университет имени Ивана Франко,*
ул. Университетская, 1, Львов, 79000, e-mail: chapko@lnu.edu.ua

Рассмотрено приближенное решение смешанной задачи для уравнения Лапласа в осесимметрической области, образованной вращением двух замкнутых гладких кривых вокруг одной из осей координат. С помощью теории потенциала задача редуцирована к системе поверхностных интегральных уравнений. Учитывая симметрию области они преобразованы к одномерным интегральным уравнениям с логарифмической особенностью в ядрах. Численное решение осуществлено методом тригонометрических квадратур. Показано супералгебраическую скорость сходимости приближенных решений, что подтверждено приведенными результатами численных экспериментов.

Ключевые слова: интегральные уравнения, тороидальные области, эллиптические интегралы, метод квадратур, супералгебраическая сходимость.

ON THE NUMERICAL SOLUTION OF A MIXED DIRICHLET-NEUMANN BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR LAPLACE EQUATION IN THE CASE OF A TOROIDAL DOMAIN

C. Babenko[1], R. Chapko[2]

[1]Ukrainian Engineering Pedagogical Academy,
Universytetska Str., 16, Kharkiv, 61003, e-mail: babenko.kristi@gmail.com
[2]Ivan Franko National University of Lviv,
Universytetska Str., 1, Lviv, 79000, e-mail: chapko@lnu.edu.ua

We consider the numerical solution of a mixed boundary value problem for a Laplace equation in an axial-symmetric domain formed by rotating of two closed smooth curves around a coordinate axis. The problem is reduced to a system of integral equations over surfaces with the help of the potential theory. Taking into account the symmetry of the solution domain there are transformed to one-dimensional integral equations with the logarithmic singularity in kernels. The numerical solution is realized by a quadrature method. It is shown the superalgebraic convergence order and it is confirmed by results of numerical experiments.

Key words: integral equations, toroidal domains, elliptical integrals, quadrature method, superalgebraic convergence.