

## ЗАСТОСУВАННЯ КУСКОВО–СТЕПЕНЕВИХ АПРОКСИМАЦІЙ МСЕ ДЛЯ СИНГУЛЯРНО ЗБУРЕНИХ ЗАДАЧ АДВЕКЦІЇ – ДИФУЗІЇ – РЕАКЦІЇ

Аркадій Кіндибалюк<sup>1</sup>, Г. Шинкаренко<sup>1,2</sup>

<sup>1</sup>Львівський національний університет імені Івана Франка,  
вул. Університетська, 1, Львів, 79000, e-mail: [a.kindybaluk@mail.ru](mailto:a.kindybaluk@mail.ru)

<sup>2</sup>Опольський політехнічний університет,  
вул. Прушковська, 76, Ополь, 45-758, e-mail: [h.shynkarenko@gmail.com](mailto:h.shynkarenko@gmail.com)

На прикладі сингулярно збурених задач адвекції–дифузії та адвекції–дифузії–реакції доведено ефективність застосування кусково-степеневих базисних функцій. Проаналізовано результати обчислювальних схем за різних способів вибору параметра кусково-степеневих апроксимацій. Розглянуто модельні задачі як з постійними та зі змінними коефіцієнтами.

*Ключові слова:* метод скінченних елементів, стабілізовані схеми, кусково-степеневі базисні функції, сингулярно збурена крайова задача, рівняння адвекції–дифузії, рівняння адвекції–дифузії–реакції.

### 1. ВСТУП

Задачі міграції домішок відіграють важливу роль у моделюванні гідродинамічних процесів [4]. За деяких фізичних умов такі задачі стають сингулярно збуреними, а класичні схеми методу скінченних різниць чи методу скінченних елементів виявляються непридатними для проведення обчислень [9].

Початком розвитку обчислювальних схем для такого ґатунку задач можна вважати роботу Ільїна-Саусвела [9]. Протягом наступних десятирок різні підходи поділилися на дві фундаментальні групи, а саме стабілізаційні схеми та адаптивні. Перевагою адаптивних схем є те, що можемо отримати розв'язок з деякою наперед заданою точністю і зазвичай похибка стосовно точного розв'язку є однаковою на усіх скінченних елементах. Проте такий підхід потребує виконання багатьох ітерацій. Ідеєю стабілізаційних схем є штучне підвищення коефіцієнта дифузії. Серед таких підходів можна виділити протипотокові схеми [8], апроксимації Хемкера [6, 7], експоненціальні базисні функції [5] методу скінченних елементів. Для розв'язування сингулярно збурених задач адвекції-дифузії та дифузії-реакції запропоновано використовувати кусково-степеневі базисні функції [1-3].

Мета праці – визначити застосування степеневих апроксимацій для задач адвекції–дифузії–реакції з постійними та змінними коефіцієнтами.

Стаття побудована так: у другому пункті сформульовано задачу, у третьому – наведені кусково-степеневі апроксимації МСЕ. У четвертому пункті наведено числові результати для рівняння адвекції-дифузії з постійними коефіцієнтами. У п'ятому пункті наведено результати для задачі адвекції-дифузії-реакції, а у шостому пункті – результати для задачі адвекції-дифузії зі змінними коефіцієнтами.

### 2. ФОРМУЛЮВАННЯ ЗАДАЧІ

Розглянемо модельну крайову задачу для рівняння адвекції-дифузії-реакції з постійними коефіцієнтами [5]

$$\begin{cases} \text{знайти функцію } u = u(x) \text{ таку, що} \\ -u'' + \beta(x)u' + \sigma(x)u = f(x) \text{ на } \Omega := (0, 1), u(0) = u(1) = 0, \end{cases} \quad (2.1)$$

де число Пекле  $Pe = \|\beta\|_\infty$  характеризує відношення швидкості адвекційних процесів до дифузійних процесів. Якщо  $Pe \rightarrow \infty$ , то задача (2.1) сингулярно-збурена і породжує нестійкість стандартних схем МСЕ.

Варіаційне формулювання задачі (2.1) набуло вигляду

$$\begin{cases} \text{задано простір } V = H_0^1(\Omega) = \{v \in H^1(\Omega) : v(0) = v(1) = 0\}, \\ \text{знайти } u \in V \text{ такий, що } a(u, v) = \langle l, v \rangle \forall v \in V, \end{cases} \quad (2.2)$$

де

$$a(u, v) := \int_0^1 (u'v' + Peu'v + uv) dx = \int_0^1 (u'(v' + Pev) + uv) dx, \langle l, v \rangle = \int_0^1 f v dx, \forall u, v \in V.$$

### 3. КУСКОВО–СТЕПЕНЕВА АПРОКСИМАЦІЯ МСЕ

Зафіксуємо натуральне  $N$  та поділимо відрізок  $[0, 1]$  на інтервали  $K_{i+1/2} := (x_i, x_{i+1})$  довжини  $h_{i+1/2} = x_{i+1} - x_i > 0, i = 0, \dots, N-1$ .

Дробовим індексом позначаємо номер інтервалу і певні його характеристики. Наприклад,  $x_{i+1/2} = 1/2(x_{i+1} + x_i)$  – центр ваги інтервалу  $K_{i+1/2} := (x_i, x_{i+1})$ ,  $\{u(x)\}_{i+1/2} = u_{i+1/2}$  – значення функції  $u(x)$  у точці  $x = x_{i+1/2}$ .

Нехай задано достатньо регулярну функцію  $u = u(x)$ . Для довільного  $\alpha > 0$  на кожному з інтервалів виберемо апроксимаційний поліном у вигляді лінійної комбінації

$$\begin{aligned} u(x) \approx u_{I, i+1/2}(x, \alpha_{i+1/2}) &= u(x_i)\phi_i(x, \alpha_{i+1/2}) + \\ &+ u(x_{i+1})\phi_{i+1}(x, \alpha_{i+1/2}), \quad \forall x \in \overline{K_{i+1/2}}, \quad i = 0, \dots, N-1 \end{aligned} \quad (3.1)$$

степеневих функцій

$$\begin{cases} \phi_i(x, \alpha_{i+1/2}) = 1 - (\omega_i(x))^{\alpha_{i+1/2}}, \\ \phi_{i+1}(x, \alpha_{i+1/2}) = 1 - \phi_i(\alpha_{i+1/2}, x), \end{cases} \quad (3.2)$$

де  $\omega_i = (x - x_{i-1})/h_{i+1/2}$ , а стала  $\alpha_{i+1/2} > 0$  відіграє роль параметра апроксимації та стабілізації [2] для задачі (2.2).

Якщо задано функцію  $u \in C([0, 1])$ , то кусково-визначена функція у (3.1)  $u_I(x, \alpha)$  буде також кусково-визначеною на відрізку  $[0, 1]$  і її можна подати у вигляді:

$$u_I(x, \alpha) = \sum_{i=0}^N u_i \phi_i(x, \alpha_{i+1/2}), \quad \forall x \in [0, 1]. \quad (3.3)$$

Тут базис інтерполяції набув вигляду

$$\begin{aligned} \text{supp } \phi_0 &= \overline{K_{1/2}}, \quad \phi_0(x) = 1 - (\omega_1(x))^{\alpha_{1/2}}, \\ \text{supp } \phi_i &= \overline{K_{i-1/2}} \cup \overline{K_{i+1/2}}, \quad \phi_i(x) = \begin{cases} (\omega_i(x))^{\alpha_{i-1/2}}, & x \in \overline{K_{i-1/2}}, \\ 1 - (\omega_{i+1}(x))^{\alpha_{i+1/2}}, & x \in \overline{K_{i+1/2}}, \end{cases} \quad i = \overline{1, N-1}, \\ \text{supp } \phi_N &= \overline{K_{N-1/2}}, \quad \phi_N(x) = (\omega_N(x))^{\alpha_{N-1/2}}. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Вважатимемо, що саме ця система функцій формує простір апроксимацій простору  $V_h$ .

#### 4. АНАЛІЗ ЧИСЛОВИХ РЕЗУЛЬТАТІВ: РІВНЯННЯ АДВЕКЦІЇ-ДИФУЗІЇ

**Приклад 1.** В [2] наведені похибки апроксимацій у просторі  $L_2(\Omega)$  для крайової задачі (2.1) при значеннях параметрів  $Pe=10^3$ ,  $f=10^3$ , тобто крайову задачу вигляду [3]

$$\begin{cases} \text{знайти функцію } u = u(x) \text{ таку, що} \\ -u'' + 10^3 u' = 10^3 \text{ на } \Omega := (0, 1), \\ u(0) = u(1) = 0. \end{cases} \quad (4.1)$$

Щоб мати уявлення про характер розв'язку задачі (4.1), ми подаємо її точний розв'язок  $u(x) = (x - ((\exp(10^3 x) - 1) / (\exp(10^3) - 1)))$ .

Особливість розв'язку полягає у тому, що експоненціальна складова породжує так званий примежовий шар, який відображається у тому, що похідні такого розв'язку в околі  $x=1$  можуть набувати дуже великих значень.

Далі наводимо норми похибок апроксимацій різного типу стосовно точного розв'язку задачі (2.1) в просторі  $V = H_0^1(\Omega)$ . Нехай  $u_{h,1}$  – апроксимація розв'язку, отримана з використанням лінійних базисних функцій на кроці  $h$ ,  $u_{h,E}$  – апроксимація розв'язку, отримана з використанням експоненціальних базисних функцій на кроці  $h$ ,  $u_{h,\tilde{\alpha}}$  – апроксимація розв'язку, отримана з використанням степеневих базисних функцій на кроці  $h$ . Крім того, норму в просторі  $H_0^1(\Omega)$  обчислюватимемо за формулою  $\|u\|_V = \int_0^1 (u')^2 dx$ .

$$\text{Порядок збіжності [5] обчислюємо згідно з формулою } p_h = \log_2 \left( \frac{\|u - v_h\|_V}{\|u - v_{h/2}\|_V} \right).$$

Обчислення проводили у пакеті символьного обчислення Mathematica 7.0, та значення похибок у нормах простору  $L^2(\Omega)$  наведено у табл. 1, значення похибок у нормах простору  $V$  у табл. 2, а порядки збіжності у нормі простору  $L^2(\Omega)$  та простору  $V$  наведено, відповідно, у табл. 3 і 4. Параметр стабілізації вибрали таким:  $\tilde{\alpha} = 1 + Pe h$ .

Таблиця 1

Норми похибок апроксимацій у нормі простору  $L^2(\Omega)$  для лінійних,  
експоненціальних і степеневих апроксимацій

Крок $h$	$\ u - u_{h,1}\ _{L^2(\Omega)}$	$\ u - u_{h,E}\ _{L^2(\Omega)}$	$\ u - u_{h,\tilde{\alpha}}\ _{L^2(\Omega)}$
1/10	2.49812	0.0564427	0.0564388
1/20	0.468522	0.0275747	0.0275746
1/40	0.158986	0.0131466	0.0131504
1/80	0.0760676	0.00594422	0.00597802
1/160	0.0333322	0.00238438	0.00267332

1/320	0.0120817	0.000778643	0.00153299
1/640	0.0035535	0.000214696	0.000693529
1/1280	0.0009344	0.000055185	0.000230716
1/2560	0.0002368	0.0000138957	0.0000662386

Таблиця 2

Норми похибок апроксимацій у нормі простору  $V$

Крок $h$	$\ u - u_{h,1}\ _V$	$\ u - u_{h,E}\ _V$	$\ u - u_{h,\tilde{\alpha}}\ _V$
1/10	53.8986	7.06974	7.06977
1/20	34.0224	4.93193	4.93459
1/40	29.2209	3.43484	3.44995
1/80	26.9204	2.35614	2.45148
1/160	22.7296	1.56039	2.1256
1/320	16.1631	1.00089	2.75319
1/640	9.45454	0.700474	2.86488
1/1280	4.98537	0.587478	2.06338
1/2560	2.56853	0.554325	1.27347

Таблиця 3

Порядки збіжності у нормі простору  $L^2(\Omega)$

$p_h$ при $h$	$\ u - u_{h,1}\ _{L^2(\Omega)}$	$\ u - u_{h,E}\ _{L^2(\Omega)}$	$\ u - u_{h,\tilde{\alpha}}\ _{L^2(\Omega)}$
1/10	2.41465	1.03337	1.03335
1/20	1.55922	1.06863	1.06824
1/40	1.06355	1.14513	1.13736
1/80	1.19036	1.31787	1.16104
1/160	1.46409	1.61458	0.802286
1/320	1.76552	1.85867	1.14432
1/640	1.92698	1.95995	1.58784
1/1280	1.98052	1.98964	1.80037

Таблиця 4

Порядки збіжності у нормі простору  $H_0^1(\Omega)$

$p_h$ при $h$	$\ u - u_{h,1}\ _V$	$\ u - u_{h,E}\ _V$	$\ u - u_{h,\tilde{\alpha}}\ _V$
1/10	0.663764	0.510287	0.509641
1/20	0.219481	0.520924	0.515343
1/40	0.118303	0.543926	0.492894
1/80	0.244128	0.594485	0.204953
1/160	0.491865	0.640917	-0.372185
1/320	0.773626	0.514496	-0.0575749
1/640	0.923306	0.254051	0.473563
1/1280	0.956761	0.0836768	0.696249

Отже, якщо великі кроки дискретизації, то степеневі апроксимації відтворюють поведінку експоненціальних апроксимацій. При малих кроках степеневі апроксимації відтворюють поведінку лінійних апроксимацій. У редукції степеневих базисних функцій до лінійних базисних функцій простежується збільшення похибки, оскільки параметр стабілізації вибирають з умови коректності обчислювальної схеми.

**Приклад 2.** Розглянемо крайову задачу подібну до крайової задачі (4.1), але при значеннях параметрів  $Pe = 10^5$ ,  $f = 10^5$ , тобто крайову задачу вигляду:

$$\begin{cases} \text{знайти функцію } u = u(x) \text{ таку, що} \\ -u'' + 10^5 u' = 10^5 \text{ на } \Omega := (0, 1), \\ u(0) = u(1) = 0. \end{cases} \quad (4.2)$$

Щоб мати уявлення про характер розв'язку задачі (4.2), ми наводимо її точний розв'язок:

$$u(x) = \left( x - \frac{\exp(10^5 x) - 1}{\exp(10^5) - 1} \right).$$

Особливість розв'язку полягає у тому, що експоненціальна складова породжує так званий примежовий шар, який відображається у тому, що похідні такого розв'язку в околі  $x = 1$  можуть набувати дуже великих значень. Наша мета – простежити за характером зміни похибок на рідких сітках за великого числа Пекле. Крім того, для коректного розв'язання задачі (4.2) необхідно щонайменше  $5 \cdot 10^4$  вузлів. Оскільки в попередньому прикладі досліджено поведінку схем в умовах такої кількості вузлів, що забезпечує коректність схеми з використанням лінійних апроксимацій, то у цьому прикладі дослідимо поведінку схем на таких кроках, де коректність для лінійних апроксимацій не забезпечується.

Таблиця 5

Норми похибок апроксимацій у нормі  $L^2(\Omega)$  для лінійних, експоненціальних і степеневих апроксимацій

Крок $h$	$\ u - u_{h,1}\ _{L^2(\Omega)}$	$\ u - u_{h,E}\ _{L^2(\Omega)}$	$\ u - u_{h,\alpha}\ _{L^2(\Omega)}$
1/10	288.243	0.057735	0.057735
1/20	71.7375	0.0288675	0.0288675
1/40	17.6163	0.0144338	0.0144338
1/80	4.10635	0.00720256	0.00720256
1/160	0.811954	0.00359514	0.00359514
1/320	0.205775	0.00179127	0.00179128
1/640	0.100811	0.000889138	0.000889152
1/1280	0.0503352	0.0004381	0.000438217
1/2560	0.0250351	0.000212611	0.00021357
1/5120	0.0122802	0.0000999298	0.000107914
1/10240	0.00575637	0.0000437544	0.0000929624
1/20480	0.00238399	0.0000164153	0.000167091
1/40960	0.000797049	4.9887 10 <sup>-6</sup>	0.00034935

1/81920	0.000222523	1.3291 10-6	0.000222523
1/163840	0.0000574359	3.3807 10-7	0.0000574359

Таблиця 6

Норми похибок апроксимацій у нормі простору  $V$

Крок $h$	$\ u - u_{h,1}\ _V$	$\ u - u_{h,E}\ _V$	$\ u - u_{h,\alpha}\ _V$
1/10	5000.	0.084465	0.084465
1/20	2500.02	0.0821168	0.0821168
1/40	1250.21	10.5941	10.5941
1/80	647.347	18.5993	18.5994
1/160	391.546	17.369	17.3693
1/320	317.573	12.5563	12.5575
1/640	312.224	8.83943	8.85256
1/1280	308.235	6.24956	6.33278
1/2560	300.433	4.41871	4.87963
1/5120	285.348	3.12393	5.26707
1/10240	256.918	2.20827	9.19325
1/20480	206.175	1.57216	20.1389
1/40960	135.954	1.20269	57.2944
1/81920	75.5953	1.05556	75.5953
1/163840	38.9899	1.01186	38.9899

Таблиця 7

Порядки збіжності у нормі  $L^2(\Omega)$

$p_h$ при $h$	$\ u - u_{h,1}\ _{L^2(\Omega)}$	$\ u - u_{h,E}\ _{L^2(\Omega)}$	$\ u - u_{h,\alpha}\ _{L^2(\Omega)}$
1/10	2.00648	1.	1.
1/20	2.02582	1.	1.
1/40	2.10098	1.00287	1.00287
1/80	2.33839	1.00246	1.00246
1/160	1.98033	1.00506	1.00506
1/320	1.02942	1.01051	1.01048
1/640	1.00201	1.02115	1.02078
1/1280	1.00761	1.04305	1.03689
1/2560	1.02762	1.08923	0.984872
1/5120	1.0931	1.19149	0.215168
1/10240	1.27178	1.41438	-0.845911
1/20480	1.58064	1.71831	-1.06404
1/40960	1.84071	1.90812	0.650717
1/81920	1.95393	1.97512	1.95393

Таблиця 8

Порядки збіжності у нормі  $H_0^1(\Omega)$ 

$p_h$ при $h$	$\ u - u_{h,1}\ _V$	$\ u - u_{h,E}\ _V$	$\ u - u_{h,\alpha}\ _V$
1/10	0.999987	0.0406757	0.0406757
1/20	0.999774	-7.01137	-7.01137
1/40	0.949555	-0.81198	-0.81198
1/80	0.725356	0.0987293	0.0987293
1/160	0.302093	0.468102	0.468102
1/320	0.0245089	0.506389	0.506389
1/640	0.0185494	0.500199	0.500199
1/1280	0.0369888	0.500131	0.500131
1/2560	0.0743192	0.500262	0.500262
1/5120	0.151417	0.500443	0.500443
1/10240	0.317439	0.49017	0.49017
1/20480	0.600753	0.386485	0.386485
1/40960	0.846747	0.188259	0.188259
1/81920	0.955197	0.0609992	0.0609992

**Приклад 3.** Розглянемо крайову задачу подібну до крайової задачі (4.1), але при такому наборі вхідних даних:

$$Pe = 10^3, f(x) = 1024(-1+x)^2 x^2 (2000x^3 - 3014x^2 + 1014x - 3).$$

Особливістю цієї задачі є той факт, що розв'язком є поліном вигляду

$$u(x) = 256x^4(1-x)^4.$$

Таблиця 9

Норми похибок апроксимацій у нормі простору  $L^2(\Omega)$  для лінійних, експоненціальних і степеневих апроксимацій

Крок $h$	$\ u - u_{h,1}\ _{L^2(\Omega)}$	$\ u - u_{h,E}\ _{L^2(\Omega)}$	$\ u - u_{h,\alpha}\ _{L^2(\Omega)}$
1/10	0.0200819	0.0685625	0.0685823
1/20	0.00421008	0.0328795	0.032918
1/40	0.00101887	0.0153852	0.015456
1/80	0.000253264	0.00672733	0.00684222
1/160	0.0000632369	0.0025513	0.00266967
1/320	0.0000158045	0.00079171	0.000783989
1/640	3.95083 10 <sup>-6</sup>	0.000213404	3.95083 10 <sup>-6</sup>
1/1280	9.87689 10 <sup>-7</sup>	0.0000544808	9.87689 10 <sup>-7</sup>

Таблиця 10

Норми похибок апроксимацій у нормі простору  $V$

Крок $h$	$\ u - u_{h,1}\ _V$	$\ u - u_{h,E}\ _V$	$\ u - u_{h,\alpha}\ _V$
1/10	0.593486	16.8862	16.8862
1/20	0.264628	11.8186	11.8186
1/40	0.128988	8.18104	8.18103
1/80	0.0640983	5.52767	5.52764
1/160	0.0320003	3.52674	3.51675
1/320	0.015994	2.02721	1.80938
1/640	0.00799626	1.06702	0.00799626
1/1280	0.00399803	0.54134	0.00399803

Таблиця 11

Порядки збіжності у нормі простору  $L^2(\Omega)$

$p_h$ при $h$	$\ u - u_{h,1}\ _{L^2(\Omega)}$	$\ u - u_{h,E}\ _{L^2(\Omega)}$	$\ u - u_{h,\alpha}\ _{L^2(\Omega)}$
1/10	2.25398	1.06023	1.05896
1/20	2.04688	1.09565	1.09071
1/40	2.00825	1.19344	1.17563
1/80	2.0018	1.3988	1.3578
1/160	2.00043	1.68819	1.76776
1/320	2.00011	1.89138	7.63253
1/640	2.00003	1.96977	2.00003

Таблиця 12

Порядки збіжності у нормах простору  $H_0^1(\Omega)$

$p_h$ при $h$	$\ u - u_{h,1}\ _V$	$\ u - u_{h,E}\ _V$	$\ u - u_{h,\alpha}\ _V$
1/10	1.16525	0.514789	0.514788
1/20	1.03672	0.530698	0.530698
1/40	1.00888	0.565612	0.565619
1/80	1.0022	0.648335	0.652421
1/160	1.00055	0.798841	0.958749
1/320	1.00014	0.925908	7.82195
1/640	1.00003	0.978981	1.00003

#### 5. АНАЛІЗ ЧИСЛОВИХ РЕЗУЛЬТАТІВ: РІВНЯННЯ АДВЕКЦІЇ – ДИФУЗІЇ – РЕАКЦІЇ

**Приклад 4.** Розглянемо крайову задачу адвекції – дифузії – реакції такого вигляду [4]:



$$\begin{cases} \text{знайти функцію } u = u(x) \text{ таку, що} \\ -0,01u'' + (1 + 2x)u' + 2u = 6x^2 + 2x - 0,02 + 2e^{-200}/(1 - e^{-200}) \text{ на } \Omega := (0, 1), \\ u(0) = u(1) = 0. \end{cases} \quad (5.1)$$

Точний розв'язок задачі (5.1) набуває вигляду

$$u(x) = (1 - \exp(100x(1+x)) - x^2 + x^2 \exp(200)) / (-1 + \exp(200)).$$

Для розв'язування такої задачі застосуємо схему МСЕ з лінійними, експоненціальними та степеневими базисними функціями. Результати обчислень подано у табл. 13-16.

Таблиця 13

Норми похибок апроксимацій у нормі простору  $L^2(\Omega)$  для лінійних,  
експоненціальних і степеневих апроксимацій

Крок $h$	$\ u - u_{h,1}\ _{L^2(\Omega)}$	$\ u - u_{h,E}\ _{L^2(\Omega)}$	$\ u - u_{h,\alpha}\ _{L^2(\Omega)}$
1/10	0.367502	0.151112	0.0403306
1/20	0.167489	0.112198	0.0169498
1/40	0.0764126	0.0920989	0.00563069
1/80	0.0294262	0.0857084	0.0111359
1/160	0.00909184	0.0881485	0.0189061
1/320	0.00244032	0.0921669	0.0162281
1/640	0.00062209	0.0949716	0.0159362
1/1280	0.000156302	0.0965655	0.0158961
1/5120	0.0000391246	0.0974078	0.0158882

Таблиця 14

Норми похибок апроксимацій у нормі простору  $V$

Крок $h$	$\ u - u_{h,1}\ _V$	$\ u - u_{h,E}\ _V$	$\ u - u_{h,\alpha}\ _V$
1/10	16.2049	5.37537	3.90577
1/20	15.0224	3.95959	2.66523
1/40	13.1372	3.06547	1.8255
1/80	9.86499	2.62215	1.89404
1/160	6.03946	2.56638	6.17233
1/320	3.23355	2.65175	3.32756
1/640	1.64748	2.72997	1.74193
1/1280	0.827724	2.77767	0.963162
1/5120	0.414365	2.80352	0.628194

Таблиця 15

Порядки збіжності у нормі простору  $L^2(\Omega)$

$p_h$ при $h$	$\ u - u_{h,1}\ _{L^2(\Omega)}$	$\ u - u_{h,E}\ _{L^2(\Omega)}$	$\ u - u_{h,\alpha}\ _{L^2(\Omega)}$
1/10	1.13369	0.429575	1.25061
1/20	1.13219	0.284787	1.58988
1/40	1.37671	0.103748	-0.98383
1/80	1.69446	-0.0404992	-0.763641
1/160	1.8975	-0.064312	0.220363
1/320	1.97188	-0.0432478	0.0261835
1/640	1.99279	-0.0240116	0.00363939
1/1280	1.99819	-0.0125305	0.000711744

Таблиця 16

Порядки збіжності у нормі простору  $H_0^1(\Omega)$

$p_h$ при $h$	$\ u - u_{h,1}\ _V$	$\ u - u_{h,E}\ _V$	$\ u - u_{h,\alpha}\ _V$
1/10	0.109318	0.441012	0.551345
1/20	0.193452	0.369244	0.545972
1/40	0.413269	0.225354	-0.0531798
1/80	0.707899	0.0310162	-1.70435
1/160	0.901302	-0.0472093	0.891349
1/320	0.972858	-0.0419386	0.933776
1/640	0.993038	-0.024989	0.85484
1/1280	0.998248	-0.0133649	0.616567

## 6. АНАЛІЗ ЧИСЛОВИХ РЕЗУЛЬТАТІВ: РІВНЯННЯ АДВЕКЦІЇ-ДИФУЗІЇ ЗІ ЗМІННИМИ КОЕФІЦІЄНТАМИ

**Приклад 1.** Розглянемо таку крайову задачу:

$$\begin{cases} \text{знайти функцію } u = u(x) \text{ таку, що} \\ -u'' + 8000(x - 1/2)^2 u' = 400 \text{ на } \Omega := (0, 1), \\ u(0) = u(1) = 0. \end{cases} \quad (6.1)$$

Особливістю задачі (6.1) є те, що в околі  $x = 1/2$  є внутрішній шар, в околі  $x = 1$  – примежовий шар, а також точний розв’язок для задачі (6.1) невідомий. З огляду на таку обставину розглядатимемо апостеріорні оцінки похибок.

На рис. 1 подаємо графіки наближеного розв’язку при двадцяти скінченних елементах. На рис. 1, а. зображено графік, отриманий з використанням лінійних базисних функцій МСЕ, а на рис. 1, б. зображено графік, отриманий з використанням степеневих базисних функцій МСЕ.

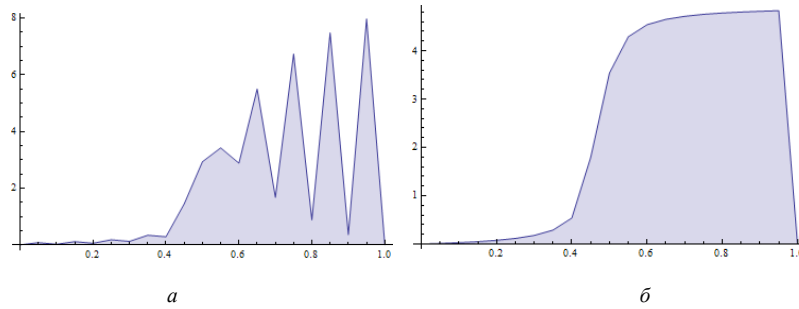


Рис. 1. *a)* наближений розв'язок, отриманий з використанням лінійних базисних функцій МСЕ при кількості скінченних елементів  $N = 20$ ; *б)* розв'язок, отриманий з використанням степеневих та експоненціальних базисних функцій МСЕ при кількості скінченних елементів  $N = 20$

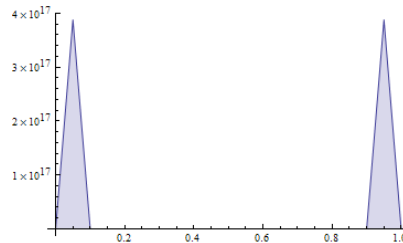


Рис. 2. Значення параметра стабілізації для експоненціальних базисних функцій МСЕ при кількості скінченних елементів  $N = 20$

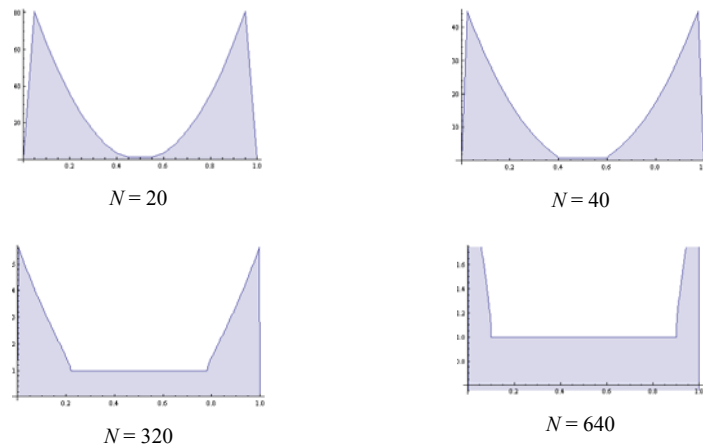


Рис. 3. Значення параметра стабілізації для степеневих базисних функцій МСЕ при кількості скінченних елементів  $N = 20, 40, 320, 640$

Як видно з рис. 1 *a, б*, степеневі базисні функції, як і експоненціальні базисні функції, можуть досить точно відтворити структуру розв'язку навіть на сітці з

двадцять скінченних елементів, тоді як розв’язок з використанням лінійних базисних функцій демонструє неприродні осциляції майже у всій досліджуваній області.

Значення параметра стабілізації на кожному скінченному елементі вибирали з умов коректності обчислювальної схеми та з урахуванням даних задачі. У підсумку розподіл значень параметра стабілізації відповідає функції адвективного переносу.

З рис. 3 видно, що в околі внутрішнього шару степеневі базисні функції відтворюють лінійні базисні функції без граничних переходів, як це відбувається у випадку застосування експоненціальних базисних функцій.

Далі подаємо норми похибок апроксимацій різного типу стосовно точного розв’язку задачі (2.1) в просторі  $V = H_0^1(\Omega)$ . Нехай  $u_{h,1}$  – апроксимація розв’язку, яку отримали з використанням лінійних базисних функцій на кроці  $h$ ,  $u_{h,E}$  – апроксимація розв’язку, отримана з використанням експоненціальних базисних функцій на кроці  $h$ ,  $u_{h,\alpha}$  – апроксимація розв’язку, яку одержали з використанням степеневих базисних функцій на кроці  $h$ . Крім того, норму в просторі  $H_0^1(\Omega)$  обчислюватимемо згідно з формулою (2.3).

Порядок збіжності [4] обчислюємо згідно з формулою

$$p_h = \log_2 \left( \frac{\|u - v_h\|_V}{\|u - v_{h/2}\|_V} \right).$$

Значення похибок у нормі простору  $L^2(\Omega)$  наведено у табл. 17, значення похибок у нормі простору  $V$  у табл. 18, а порядки збіжності у нормі простору  $L^2(\Omega)$  та простору  $V$  наведено, відповідно, у табл. 19 і 20.

Таблиця 17

Норми похибок апроксимацій у нормі  $L^2(\Omega)$  для лінійних, експоненціальних і степеневих апроксимацій

Крок $h$	$\ u_{h,1} - u_{h/2,1}\ _{L^2(\Omega)}$	$\ u_{h,E} - u_{h/2,E}\ _{L^2(\Omega)}$	$\ u_{h,\alpha} - u_{h/2,\alpha}\ _{L^2(\Omega)}$
1/40	1.00497	9965.49	0.281952
1/80	0.558169	1755.96	0.178945
1/160	0.271885	1101.91	0.101899
1/320	0.11191	1112.76	0.0423447
1/640	0.036648	1352.83	0.00817964
1/1280	0.01011	1781.23	0.01011
1/2560	0.00259931	2433.05	0.00259931
1/5120	0.000654563	3382.45	0.000654563
1/10240	0.000163941	4743.04	0.000163941
1/20480	0.000041004	6679.34	0.000041004

Таблиця 18

Норми похибок апроксимацій у нормі простору  $V$ 

Крок $h$	$\ u_{h,1} - u_{h/2,1}\ _V$	$\ u_{h,E} - u_{h/2,E}\ _V$	$\ u_{h,\alpha} - u_{h/2,\alpha}\ _V$
1/40	184.092	$2.52566 \cdot 10^6$	137.13
1/80	198.525	479691	134.315
1/160	191.306	410824	122.189
1/320	156.995	699611	92.2826
1/640	102.742	$1.5863 \cdot 10^6$	47.9941
1/1280	56.6743	$4.05416 \cdot 10^6$	56.6743
1/2560	29.1408	$1.09259 \cdot 10^7$	29.1408
1/5120	14.6764	$3.01831 \cdot 10^7$	14.6764
1/10240	7.35164	$8.43831 \cdot 10^7$	7.35164
1/20480	3.67751	$2.37296 \cdot 10^8$	3.67751

Таблиця 19

Порядки збіжності у нормі  $L^2(\Omega)$ 

$p_h$ при $h$	$\ u_{h,1} - u_{h/2,1}\ _{L^2(\Omega)}$	$\ u_{h,E} - u_{h/2,E}\ _{L^2(\Omega)}$	$\ u_{h,\alpha} - u_{h/2,\alpha}\ _{L^2(\Omega)}$
1/40	0.848378	2.50468	0.655935
1/80	1.03771	0.672262	0.81238
1/160	1.28066	-0.0141398	1.26688
1/320	1.61053	-0.281844	2.37207
1/640	1.85796	-0.396885	-0.30567
1/1280	1.95958	-0.449894	1.95958
1/2560	1.98952	-0.475305	1.98952
1/5120	1.99736	-0.487743	1.99736
1/10240	1.99934	-0.493893	1.99934

Таблиця 20

Порядки збіжності у нормі  $H_0^1(\Omega)$ 

$p_h$ при $h$	$\ u_{h,1} - u_{h/2,1}\ _V$	$\ u_{h,E} - u_{h/2,E}\ _V$	$\ u_{h,\alpha} - u_{h/2,\alpha}\ _V$
1/40	-0.108894	2.39649	0.0299187
1/80	0.0534392	0.223583	0.136513
1/160	0.285167	-0.768031	0.40498
1/320	0.611697	-1.18104	0.943202
1/640	0.858252	-1.35373	-0.239839
1/1280	0.959653	-1.43027	0.959653
1/2560	0.989542	-1.46599	0.989542
1/5120	0.997361	-1.48321	0.997361
1/10240	0.999339	-1.49166	0.999339

З наведених результатів випливає, що зі згущенням сітки порядки збіжності степеневих апроксимацій постійно зростають, прямуючи до величин передбачених теоретичним аналізом похибки.

#### 7. ВИСНОВКИ

Аналіз числових результатів свідчить про ефективність застосування степеневих базисних функцій для розв'язування сингулярно-збурених крайових задач адвекції-дифузії, адвекції-дифузії-реакції.

Крім того, степеневі апроксимації для випадку задачі зі змінними коефіцієнтами дають ліпший результат, потребують значно менше пам'яті, ніж експоненціальні апроксимації, а також час обчислень для степеневих апроксимацій менший, ніж для експоненціальних. Ефективність степеневих апроксимацій у випадку зі змінними коефіцієнтами необхідна для розв'язування прикладних задач, адже вітрове поле в центрі баричної системи близьке до нуля тоді як на периферії вітрове поле зростає. Внаслідок того, що степеневі апроксимації мають здатність переходити у лінійні шляхом уникнення граничного переходу, то такі апроксимації здатні відтворити характер розв'язку при рідких сітках і значення похибок суттєво менші, ніж похибки експоненціальних апроксимацій, в яких виродження у лінійні апроксимації відбувається завдяки граничному переходу.

#### СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Кіндибалує А. А. Степеневі базисні функції МСЕ для сингулярно збуреної крайової задачі конвекції – дифузії / А. А. Кіндибалує, М. М. Притула // Чотирнадцята міжнародна наукова конференція імені академіка М. Кравчука, 19-21 квітня 2012 р. – Київ: Матеріали конференції. – 2012. – Т. 1. – С. 222.
2. Кіндибалує А. А. Застосування степеневих базисних функцій МСЕ до розв'язування сингулярно збуреної задачі адвекції-дифузії-реакції / А. А. Кіндибалує, М. М. Притула // Матем. Вісник НТШ. – 2012. – Т. 9. – С. 140-157.
3. Кіндибалує А. А. Степеневі базисні функції МСЕ для сингулярно збуреної крайової задачі дифузії-реакції / А. А. Кіндибалує // Міжнародна наукова конференція Сучасні проблеми механіки та математики, 21-25 травня 2013 р. – Львів. – Т. 3. – С. 25-27.
4. Савула Я. Г. Чисельний аналіз задач математичної фізики варіаційними методами / Я. Г. Савула. – Львів, 2004. – 221 с.
5. Сінчук Ю. Експоненціальні апроксимації МСЕ для сингулярно збурених задач конвекції-дифузії реакції / Ю. Сінчук, Г. Шинкаренко // Вісн. Львів. ун-ту, Сер. прикл. матем. та інформ. – 2007. – Вип. 12. – С. 157-169.
6. De Groen P. P. N. Error bounds for exponentially fitted Galerkin methods applied to stiff two-point boundary value problems / P. P. N. De Groen, P. W. Hemker // Numerical Analysis of Singular Perturbations Problems, Hemker P. W., J. J. II. Miller eds. – New York: Academic Press, 1979. – P. 217-249.
7. Hemker P. W. A numerical study of stiff two-point boundary value problems / P. W. Hemker. – Amsterdam: Mathematical Center, 1977. – 178 p.
8. Hughes T. J. R. A simple scheme for developing 'upwind' finite elements / T. J. R. Hughes // Int. J. Numer. Meth. Eng. – 1978. – Vol. 12. – P. 1359-1365.

9. Ross Hans Görg Robust numerical methods for singularly perturbed differential equations. Convection – Diffusion – Reaction and flow problems / Hans Görg Ross, Martin Stynes, Lutz Tobiska. – Springer–Verlag, Berlin Heidelberg, 2008. – 598 p.

Стаття: надійшла до редколегії 22.01.2014

доопрацьована 19.02.2014

прийнята до друку 05.03.2014

### ПРИМЕНЕНИЕ СТЕПЕННЫХ БАЗИСНЫХ ФУНКЦИЙ МЕТОДА КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ ДЛЯ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННЫХ ЗАДАЧ АДВЕКЦИИ – ДИФФУЗИИ – РЕАКЦИИ

Аркадій Кіндибалуєк<sup>1</sup>, Г. Шинкаренко<sup>1,2</sup>

<sup>1</sup>Львівський національний університет імені Івана Франка,  
ул. Университетская, 1, Львов, 79000, e-mail: [a.kindybaluk@mail.ru](mailto:a.kindybaluk@mail.ru)

<sup>2</sup>Опольський політехнічний університет,  
ул. Пружковская, 76, Ополе, 45-758, e-mail: [h.shynkarenko@gmail.com](mailto:h.shynkarenko@gmail.com)

На приємере сингулярно-возмущенных задач адвекции – диффузии и адвекции – диффузии – реакции показана ефективність применения степенных базисных функций. Проанализировано результаты вычислительных схем при разных способах выбора параметра степенных базисных функций. Рассмотрено модельные задачи с постоянными и переменными коэффициентами.

*Ключевые слова:* метод конечных элементов, стабилизированные схемы, степенные базисные функции, сингулярно возмущенная задача, уравнение адвекции – диффузии, уравнение адвекции – диффузии – реакции.

### APPLICATION OF THE POWER BASIS FUNCTIONS OF THE FINITE ELEMENT METHOD FOR SINGULAR PERTURBED PROBLEMS OF ADVECTION – DIFFUSION – REACTION

Arkadii Kindyaliuk<sup>1</sup>, H. Shynkarenko<sup>1,2</sup>

<sup>1</sup>Ivan Franko National University of Lviv  
Universytetska Str, 1, Lviv, 79000, e-mail: [a.kindybaluk@mail.ru](mailto:a.kindybaluk@mail.ru)

<sup>2</sup>Opole University of Technology,  
Prószkowska Str., 76, Opole, 45-758, e-mail: [h.shynkarenko@gmail.com](mailto:h.shynkarenko@gmail.com)

Effectiveness of power basis function has been shown for solving singular-perturbed advection-diffusion-reaction problem. The results of computational scheme by means of power basis functions with different stabilization parameter values have been analyzed. Model problems are considered with constant and variable coefficients.

*Key words:* Finite Element Method, stabilized schemes, power basis functions, singular perturbed problem, advection – diffusion – reaction equation.