ISSN 2078–5097. Вісн. Львів. ун-ту. Сер. прикл. матем. та інф. 2014. Вип. 22. С. 54–59
Visnyk of the Lviv University. Series Appl. Math. and Informatics. Issue 22. P. 54–59

УДК 51.73

МОДЕЛІ РОЗСІЯННЯ ЕЛЕКТРОМАГНІТНИХ ХВИЛЬ НА ІМПЕДАНСНИХ СТРІЧКАХ, РОЗТАШОВАНИХ У ДІЕЛЕКТРИЧНОМУ ШАРІ ТА НА ЙОГО ПОВЕРХНІ

В. Душкін

*Академія внутрішніх військ МВС України,
пл. Повстання, 3, Харків, 61005, e-mail: Dushkin_V_and_V@mail.ru*

Побудовано математичну модель дифракції *E*-поляризованої хвилі на структурі, яку розглядають. Вихідна третя крайова задача для рівняння Гельмгольца зведена до системи граничних інтегральних рівнянь за допомогою методу параметричних уявлень інтегральних перетворень.

Ключові слова: математичні моделі, імпедансні структури, метод параметричних уявлень інтегральних перетворень.

1. ВСТУП

Запропоновано алгоритм побудови математичної моделі досліджуваної задачі. Спосіб побудови цього алгоритму є розвитком підходу, запропонованого в працях Ю. В. Ганделя [1-4], для багатошарових структур, розташованих у неоднорідному середовищі.

Розглядаємо дифракційну структуру, яка зображена на рис. 1. Шар $z_N \le z \le z_1$ заповнений діелектриком з діелектричною проникністю $\varepsilon = \varepsilon_1 + i \cdot \varepsilon_2$. У площинах $z = z_q$, $(q = 1,\ldots,N)$, розташоване кінцеве число імпедансних стрічок. Кількість стрічок та їхнє розташування у площинах довільні.

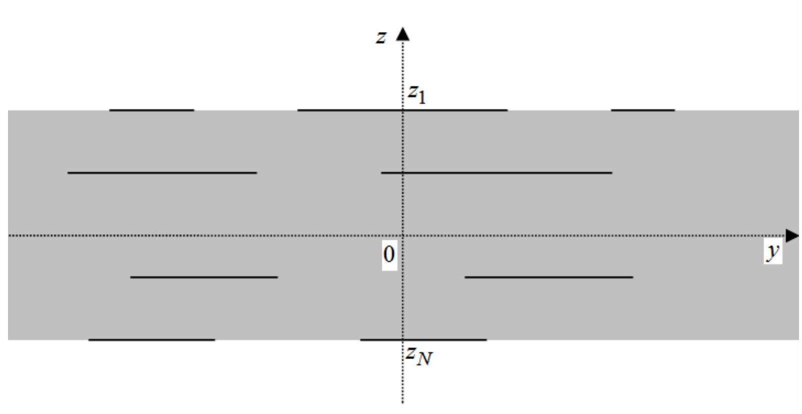

Рис. 1. Переріз дифракційної структури площиною *YOZ*

Введемо такі позначення. Нехай

$$\mathrm{L}_q = \bigcup_{i=1}^{M_q} (\alpha_{q,i}, \beta_{q,i}), \quad q = 1, \ldots, N, \tag{1}$$

де $\alpha_{q,i}$ та $\beta_{q,i}$ - координати проекцій на вісь OY ребер стрічок, які лежать у площині $z = z_q$.

З нескінченності зверху на дифракційну структуру похило падає E – поляризована плоска електромагнітна хвиля одиничної амплітуди, іксова компонента електричного поля якої набула вигляду

$$U(y, z) = \exp\left(ik\left(y \cdot \sin\phi - z \cdot \cos\phi\right)\right). \tag{2}$$

Залежність поля від часу визначається множником $e^{-i\omega t}$. У задачі треба знайти поле, яке виникло внаслідок розсіювання хвилі на решітці. Воно є розв'язком рівняння Гельмгольца

$$\Delta u + k^2 \varepsilon(z) \cdot u = 0; \tag{3}$$

$$\varepsilon(z) = \begin{cases} 1, & z \in (-\infty, z_N) \cup (z_1, +\infty); \\ \varepsilon, & z_N < z < z_1 \end{cases} \tag{4}$$

в області поза стрічками. Цей розв'язок задовольняє імпедансні граничні умови

$$\left(\frac{\partial}{\partial z} - h_{q-1}\right) u(y, z_q) = 0, \quad \left(\frac{\partial}{\partial z} + h_q\right) u(y, z_q) = 0, \quad y \in L_q, \tag{5}$$

які є наслідком граничних умов Щукіна-Леонтовича; умови обмеженості енергії в будь-якій обмеженій області площини й умови випромінювання.

2. ПОБУДОВА МАТЕМАТИЧНОЇ МОДЕЛІ ЗАДАЧІ

Нехай функція $u^{ini}(y, z)$ є описом поля, яке існувало в просторі за відсутності стрічок. Повне поле $u(y, z)$, яке виникло внаслідок дифракції хвилі на ґратках, будемо шукати у вигляді

$$u(y, z) = u^{ini}(y, z) + u_q(y, z); \quad z_{q+1} < z < z_q, \quad q = 0, \ldots, N, \tag{6}$$

де

$$u_q(y, z) = \int_{-\infty}^{\infty} C_q^-(\lambda) \cdot \exp\left(\gamma_q(\lambda)\left(z_{q+1} - z\right)\right) \cdot \exp(i\lambda y)\, d\lambda +$$

$$+ \int_{-\infty}^{\infty} C_q^+(\lambda) \cdot \exp\left(\gamma_q(\lambda)\left(z - z_q\right)\right) \cdot \exp(i\lambda y)\, d\lambda, \quad q = 0, \ldots, N; \tag{7}$$

$$\gamma_q(\lambda) = \begin{cases} \sqrt{\lambda^2 - k^2 \varepsilon}, & q = 1, \ldots, N-1; \\ \sqrt{\lambda^2 - k^2}, & q = 0, N; \end{cases} \quad \mathrm{Re}\left(\gamma_q\right) \ge 0, \quad \mathrm{Im}\left(\gamma_q\right) \le 0; \tag{8}$$

$$C_0^+(\lambda) = 0, \quad C_N^-(\lambda) = 0, \quad z_0 = +\infty, \quad z_{N+1} = -\infty. \tag{9}$$

Вибір знаків дійсної та уявної частин величин $\gamma_q(\lambda)$ проведений відповідно до умов випромінювання.

Введемо функції

$$F_q(y) = \left(\frac{\partial u_{q-1}}{\partial y} - \frac{\partial u_q}{\partial y}\right)(y, z_q), \quad G_q(y) = \left(\frac{\partial u_{q-1}}{\partial z} - \frac{\partial u_q}{\partial z}\right)(y, z_q), \quad y \in R, \quad q = 1, \ldots, N. \tag{10}$$

Відповідно до умов неперервності повного поля і його похідних поза стрічками функції $F_q(y)$ та $G_q(y)$ набувають властивості

$$F_q(y)=0,\quad G_q(y)=0,\quad y\notin L_q,\quad q=1,\ldots,N; \tag{11}$$

$$\int_{\alpha_{q,i}}^{\beta_{q,i}} F_q(t)\,dt=0,\quad \left(q=1,\ldots,N,\quad i=1,\ldots,M_q\right); \tag{12}$$

$$\int_{\alpha_{q,i}}^{y} F_q(t)dt=u_{q-1}(y,z_q)-u_q(y,z_q),\quad y\in R. \tag{13}$$

Наслідком властивостей параметричного подання перетворення Гільберта [4] є рівності

$$-\int_{-\infty}^{\infty}\Lambda_q(\lambda)\cdot|\lambda|\cdot\exp(i\lambda y)\,d\lambda=\frac{1}{\pi}\int_{L_q}\frac{F_q(t)\,dt}{t-y},\quad q=1,\ldots,N, \tag{14}$$

де

$$\Lambda_q(\lambda)=\frac{1}{2\pi i}\int_{L_q}F_q(t)\cdot\frac{\exp(-i\lambda t)-1}{\lambda}dt,\quad \lambda\in R,\quad q=1,\ldots,N. \tag{15}$$

Введемо функції

$$a_q^{\pm}(\lambda)=\frac{1}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left\{\omega_q^{\pm}(\lambda)\cdot\frac{F_q(\eta)}{i\lambda}\pm\frac{G_q(\eta)}{\gamma_q(\lambda)}\right\}\cdot e^{-i\lambda\eta}d\eta; \tag{16}$$

$$\omega_q^{+}(\lambda)=\gamma_{q-1}(\lambda)\cdot\gamma_q^{-1}(\lambda),\quad \omega_q^{-}(\lambda)=1,\qquad q=1,\ldots,N. \tag{17}$$

З визначень функцій $a_q^{\pm}(\lambda)$ і $C_q^{\pm}(\lambda)$ випливає правильність функціональних співвідношень

$$C_{q-1}^{-}=C_{N-1}^{-}\cdot \mathrm{e}^{-\gamma_q\cdot d_{N,q}}+\sum_{s=q}^{N-1}a_s^{-}\cdot \mathrm{e}^{-\gamma_q\cdot d_{s,q}}, \tag{18}$$

$$C_q^{+}=\mathrm{e}^{-\gamma_{q-1}\cdot d_{1,q}}\cdot C_1^{+}-\sum_{s=2}^{q}a_s^{+}\cdot e^{-\gamma_q\cdot d_{s,q}},\quad q=2,\ldots,N-1; \tag{19}$$

$$C_0^{-}=2\cdot\left(1+\omega_1^{+}\right)^{-1}\cdot\left(a_1^{-}+C_1^{-}\cdot e^{-\gamma_1\cdot d_{2,1}}\right); \tag{20}$$

$$C_N^{+}=2\cdot\left(1+\omega_N^{+}\right)^{-1}\cdot\left(-a_N^{+}+C_{N-1}^{-}\cdot\omega_N^{+}\cdot e^{-\gamma_{N-1}\cdot d_{N-1,N}}\right); \tag{21}$$

$$\mathrm{e}^{-\gamma_1\cdot d_{2,1}}\cdot\left(1-\omega_1^{+}\right)\cdot C_1^{-}-\left(1+\omega_1^{+}\right)\cdot C_1^{+}=2\cdot a_1^{+}; \tag{22}$$

$$\left(1+\omega_N^{+}\right)\cdot C_{N-1}^{-}+\left(1-\omega_N^{+}\right)\cdot \mathrm{e}^{-\gamma_{N-1}\cdot d_{N-1,N}}\cdot C_{N-1}^{+}=2\cdot a_N^{-};\; d_{s,q}=\left|z_q-z_s\right|,\quad s=1,\ldots,N. \tag{23}$$

З (18)-(23) випливає, що

$$C_q^{+}=-a_q^{+}+\sum_{s=1}^{N}\left(\sigma_{q,s}^{+}\cdot a_s^{+}+\sigma_{q,s}^{-}\cdot a_s^{-}\right), \tag{24}$$

$$C_{q-1}^{-}=a_q^{-}+\sum_{s=1}^{N}\left(\sigma_{q,s}^{-}\cdot a_s^{-}+\sigma_{q,s}^{-}\cdot a_s^{-}\right),\quad q=1,\ldots,N, \tag{25}$$

де $\sigma_{q,s}^{\pm}(\lambda)$ – відомі функції, які набувають властивості

$$\sigma_{q,s}^{\pm}(-\lambda)=\sigma_{q,s}^{\pm}(\lambda),\ \lambda\in R,\quad \lim_{\lambda\to\infty}\frac{\sigma_{q,s}^{\pm}(\lambda)}{\lambda^2}=0,\quad s=1,\ldots,N;\qquad q=1,\ldots,N. \tag{26}$$

Введемо інтегральні оператори

$$\left(\Gamma_q f\right)(y)=\frac{1}{\pi}\int_{L_q}\frac{f(t)\,dt}{t-y},\quad \left(P_q f\right)(y)=\int_{\alpha_{q,1}}^{y} f(t)\,dt, \tag{27}$$

$$\left(S_q f\right)(y)=\frac{1}{4}\int_{Lq} sign(y-t)\,f(t)dt,\quad \left(L_q f\right)(y)=\frac{1}{2\pi}\int_{Lq}\ln|y-t|\,f(t)dt, \tag{28}$$

$$\left(M_{q,i} f\right)(y)=\frac{1}{4}\int_{Lq} M_{q,i}(y-t)\,f(t)\,dt,\quad \left(K_{q,i,j} f\right)(y)=\frac{1}{2\pi}\int_{Lj} K_{q,i,j}(y-t)\,f(t)dt, \tag{29}$$

$$y\in L_q,\quad q=1,\ldots,N,\quad j=1,\ldots,N,\quad i=1,\ldots,4;$$

де $M_{q,i}(t)$ і $K_{q,i,j}(t)$ – відомі функції, що належать класу $C^{0,\alpha}$. Функції $a_q^{\pm}(\lambda)$ мають властивості:

$$\int_{-\infty}^{\infty} a_q^{\pm}(\lambda)\cdot\exp(i\lambda y)\,d\lambda=\left(S_qF_q+M_{q,1}F_q\right)(y)\mp\left(L_qG_q-M_{q,2}G_q\right)(y); \tag{30}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\sigma_{q,s}^{\pm}(\lambda)\cdot a_q^{\pm}(\lambda)\cdot\exp(i\lambda y)\,d\lambda=\left(M_{q,3}F_q\right)(y)\pm\left(M_{q,4}G_q\right)(y). \tag{31}$$

З граничних умов (5) і властивостей функцій $F_i(y)$ і $G_q(y)$ випливають співвідношення

$$G_q(y)-h_{q-1}\cdot\left(P_qF_q\right)(y)-\left(h_{q-1}+h_q\right)\cdot u_q(y,z_q)=B_{q,1}(y), \tag{32}$$

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(u_q+u_{q-1}\right)\Big|_{z=z_q}-h_{q-1}\cdot\left(P_qF_q\right)(y)-\left(h_{q-1}-h_q\right)\cdot u_q\Big|_{z=z_q}=B_{q,2}(y), \tag{33}$$

$$B_{q,1}(y)=\left(h_{q-1}+h_q\right)\cdot u^{ini}(y,z_q), \tag{34}$$

$$B_{q,2}(y)=-2\frac{\partial}{\partial z}u^{ini}(y,z_q)+\left(h_{q-1}-h_q\right)u^{ini}(y,z_q),\quad y\in L_q,\quad q=1,\ldots,N; \tag{35}$$

З функціональних співвідношень (25), (26), (30), (31) і властивостей функцій $\sigma_{q,s}^{\pm}(\lambda)$ і $a_q^{\pm}(\lambda)$ випливає, що функції $F_q(t)$ і $G_q(t)$ є розв'язком системи рівнянь

$$\begin{gathered}G_q-h_{q-1}P_qF_q+\left(h_{q-1}+h_q\right)S_qF_q-\left(h_{q-1}+h_q\right)L_qG_q+\\+\sum_{j=1}^{N}K_{q,1,j}F_j+\sum_{j=1}^{N}K_{q,2,j}G_j=B_{q,1},\end{gathered} \tag{36}$$

$$\begin{gathered}\Gamma_qF_q-h_{q-1}P_qF_q+\left(h_{q-1}-h_q\right)S_qF_q-\left(h_{q-1}-h_q\right)L_qG_q+\\+\sum_{j=1}^{N}K_{q,3,j}F_j+\sum_{j=1}^{N}K_{q,4,j}G_j=B_{q,2},\quad q=1,\ldots,N.\end{gathered} \tag{37}$$

3. ВИСНОВКИ

Отримана система рівнянь (36)-(37) еквівалентна системі граничних інтегральних рівнянь, що складається з рівнянь Фредгольма другого роду та системи сингулярних інтегральних рівнянь першого роду. Через розв'язок цієї системи виражаються основні параметри розсіяних електромагнітних хвиль. Для їхнього чисельного рішення можна використовувати обчислювальну схему методу дискретних особливостей [4-5].

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. *Gandel' Yu. V.* Boundary-Value Problems for the Helmholtz Equation and their Discrete Mathematical Models / Yu. V. Gandel' // Journal of Mathematical Sciences. – 2010. – Vol. 171, № 1. – Springer Science+Business Media, Inc. – P. 74-88.
2. *Gandel' Yu. V.* Scattering of Electromagnetic Waves by a Thin Superconducting Band / Yu. V. Gandel', V. F. Kravchenko, V. I. Pustovoit // Doklady Mathematics. – 1996. – Vol. 54, No. 3. – P. 959-961.
3. *Gandel' Yu. V.* The method of integral equations in the third boundary value problem of diffraction on the finite lattice above flat screen / Yu. V. Gandel', G. L. Sidelnikov // Differential equations. – 1999. – Vol. 35, № 9. – P. 1155-1161.
4. *Гандель Ю. В.* Математические модели двумерных задач дифракции: Сингулярные интегральные уравнения и численные методы дискретных особенностей: монография / Ю. В. Гандель, В. Д. Душкин. – Харьков: Акад. ВВ МВД Украины, 2012. – 544 с.
5. *Lifanov I.K.* Singular Integral Equations and Discrete Vortices / I. K. Lifanov. – Utrecht, the Netherlands; Tokyo, Japan: VSP, 1996. – 475 p.

Стаття: надійшла до редколегії 29.01.2014
доопрацьована 19.02.2014
прийнята до друку 05.03.2014

МОДЕЛИ РАССЕЯНИЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН НА ИМПЕДАНСНЫХ ЛЕНТАХ, РАСПОЛОЖЕННЫХ В ДИЭЛЕКТРИЧЕСКОМ СЛОЕ И НА ЕГО ПОВЕРХНОСТИ

В. Душкин

Академия внутренних войск МВД Украины,
пл. Восстания, 3, Харьков, 61005, e-mail: Dushkin_V_and_V@mail.ru

Построена математическая модель дифракции *E*-поляризованной волны на рассматриваемой структуре. Исходная третья краевая задача для уравнения Гельмгольца сведена к системе граничных интегральных уравнений с помощью метода параметрических представлений интегральных преобразований.

Ключевые слова: математические модели, импедансные структуры, метод параметрических представлений интегральных преобразований.

THE MODELS OF ELECTROMAGNETIC WAVES SCATTERING ON THE IMPEDANCE STRIPS LOCATED IN THE DIELECTRIC LAYER AND ON ITS SURFACE

V. Dushkin

Academy of IT of MIA of Ukraine,
Povstanya sq., 3, Kharkov, 61005, Ukraine, e-mail: Dushkin_V_and_V@mail.ru

A mathematical model of E - polarized wave diffraction on the investigated structure has been built. The original third boundary value problem for the Helmholtz equation was reduced to a system of boundary integral equations by using the method of parametric representations of integral transforms.

Key words: mathematical model, impedance structures, the method of parametric representations of integral transforms.