

## ДИНАМІКА СТАЦІОНАРНИХ СТРУКТУР В ПАРАБОЛІЧНОЇ ЗАДАЧІ З ВІДОБРАЖЕННЯМ ПРОСТОРОВОЇ ЗМІННОЇ

Ю. Хазова

*Таврійський національний університет імені В. І. Вернадського,  
вул. Вернадського, 1, Сімферополь, 95000, e-mail: [hazova.yuliya@hotmail.com](mailto:hazova.yuliya@hotmail.com)*

Досліджено динаміку стаціонарних структур у нелінійному оптичному резонаторі з перетворенням відображення. Математичною моделлю системи є параболічне рівняння з перетворенням відображення просторової змінної й умовами періодичності. Розглянуто еволюцію форм і стійкість структур при зменшенні коефіцієнта дифузії. Використано метод центральних різноманіть.

*Ключові слова:* параболічне рівняння, біфуркація, стійкість, центральне різноманіття.

### 1. ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА ПРОБЛЕМИ

Вивчення властивостей нелінійних середовищ, в яких формуються стійкі структури, і загальних закономірностей їхнього виникнення є фундаментальним у сучасному природознавстві. Вивчаючи ці проблеми, використовують параболічні системи. За допомогою параболічної системи, заданої в деякій обмеженій області і крайовими умовами Неймана, моделюється процес формування просторово неоднорідних структур в однорідних середовищах.

Багато важливих задач фізики, хімії, біології, екології призводять до дослідження систем з малою дифузиею. При дослідженні задач про біфуркації у зазначених системах характерні критичні випадки нескінченної розмірності. Для дослідження цих задач у 80-х роках Ю.С. Колесов [18], опираючись на ідеологію одночастотного методу Боголюбова-Мітропольського, запропонував спеціальний асимптотичний метод, який назвали методом квазінормальних форм. Дослідження біфуркаційних задач для параболічних рівнянь з малою дифузиею подано в працях А.Б. Васильєвої, С.А. Кашенко, Ю.С. Колесова, Н.Х. Розова [14].

Обґрунтування методу центральних різноманіть для параболічного функціонально-диференціального рівняння з перетвореним аргументом вперше подали в працях [6, 7, 10, 11]. Зазначений клас рівнянь запропонували С.А. Ахманов, М.А. Воронцов, В.Ю. Іванов [4] як математичну модель для вивчення динаміки структур в оптичних резонаторах з двовимірним зворотним зв'язком.

Розширення досліджень в нелінійній оптиці зумовлено інтенсивним використанням оптичних систем в інформаційних технологіях (див. [1, 4, 20] і бібліографію до них).

Серед нелінійних оптичних систем найпопулярнішою є система, яка складається з тонкого шару нелінійного середовища керовського типу і по-різному організованого контуру двовимірного зворотного зв'язку. Принципова особливість цих систем полягає в тому, що зовнішній контур зворотного зв'язку може бути використаний для безпосереднього впливу на нелінійну динаміку системи за допомогою керованого перетворення просторових змінних, які виконуються призмами, лінзами, динамічними голограмами та іншими пристроями.

Параболічні функціонально-диференціальні рівняння з перетворенням аргументів шуканої функції, які використовують для моделювання оптичних систем з

двовимірним зворотним зв'язком, становлять новий клас рівнянь для дослідження феномену структуроутворення.

Нелінійний інтерферометр з дзеркальним відображенням поля в контурі зворотного зв'язку – це найпростіша оптична система, в якій реалізується нелокальний характер взаємодії світлових полів. Експериментальні дослідження виявили різноманіття типів оптичних структур, які виникають у цьому випадку [15, 16, 21, 22, 23]. Ми розглянули параболічну задачу з перетворенням відображення та умовами періодичності на колі. Враховуючи [3], будемо ієрархію спрощених моделей. Їхній аналіз дає змогу пояснити виникнення, еволюцію стаціонарних структур і зазначити умови їхньої стійкості.

## 2. МЕТОД ЦЕНТРАЛЬНОГО РІЗНОМАНІТТЯ

Мета праці – вивчити математичну модель просторово неоднорідних оптичних структур нелінійного інтерферометра з перетворенням відображення у двовимірному зворотному зв'язку, їхній опис і дослідження стійкості

$$u_t + u = Du_{\varphi\varphi} + K(1 + \gamma \cos u(\pi - \varphi, t)), \quad t > 0, \quad (1)$$

$$u(\varphi + 2\pi, t) = u(\varphi, t). \quad (2)$$

Крайова задача (1), (2) моделює динаміку фазової модуляції  $u(\varphi, t)$ ,  $\varphi \in (0, 2\pi)$ ,  $t > 0$  світлової хвилі, яка пройшла тонкий шар нелінійного середовища керовського типу з перетворенням відображення координат в контурі зворотного зв'язку в одновимірному наближенні. Тут  $D$  – коефіцієнт дифузії нелінійного середовища, позитивний коефіцієнт  $K$  пропорційний до інтенсивності вхідного поля,  $\gamma$  – видність (контрастність) інтерференційної картини,  $0 < \gamma < 1$ .

Прийmemo  $H = L_2(0, 2\pi)$ . Враховуючи ([5], част. 1.1), позначимо  $H^s$ ,  $s \in \mathbb{R}_+$ , шкалу просторів, породжену оператором  $\Delta$  ( $\Delta$  – одновимірний оператор Лапласа) з граничними умовами (2). Зауважимо, що оператор  $-\Delta$  в просторі  $H$  має повну ортогональну систему власних функцій  $1, \sin \varphi, \cos \varphi, \sin 2\varphi, \cos 2\varphi, \dots$

Розглядатимемо питання існування, форми та стійкості просторових неоднорідних стаціонарних рішень, які біфуркують з просторово однорідних стаціонарних рішень, тобто рішень  $u(\varphi, t) = \omega$ , які визначаються з рівняння

$$\omega = K(1 + \gamma \cos \omega). \quad (3)$$

Зі збільшенням  $K$  кількість коренів цього рівняння необмежено збільшується, причому при  $K \rightarrow \infty$  їхній склад постійно змінюється: виникають нові стани рівноваги та зникають старі. Фіксуємо гладку гілку рішень

$$\omega = \omega(K, \gamma), \quad 1 + K\gamma \sin \omega(K, \gamma) \neq 0 \quad (4)$$

рівняння (3). Потім лінеаризуємо (1), (2) на  $\omega(K, \gamma)$ . У підсумку отримуємо рівняння

$$u_t + Lu = 0,$$

де  $Lu = u - Du_{\varphi\varphi} - \Lambda Qu$ ,  $\Lambda = \Lambda(K, \gamma) = -K\gamma \sin \omega$ , оператор  $Q$  визначається рівністю  $Qu(\varphi, t) = u(\pi - \varphi, t)$ .

**Лема 1.** Оператор  $L$  з умовою періодичності (2) має повну ортогональну систему власних функцій  $1, \cos \varphi, \sin \varphi, \cos 2\varphi, \sin 2\varphi, \dots$ , які відповідають власним значенням  $\lambda_0 = 1 - \Lambda$ ,  $\lambda_1 = 1 + D + \Lambda$ ,  $\lambda_2 = 1 + D - \Lambda$ ,  $\lambda_3 = 1 + 4D - \Lambda$ ,  $\lambda_4 = 1 + 4D + \Lambda, \dots$

Функціям  $\cos k\varphi$  відповідають  $\lambda_{2k-1} = 1 + k^2 D - (-1)^k \Lambda$ , а  $\sin k\varphi - \lambda_{2k} = 1 + k^2 D - (-1)^{k+1} \Lambda$ .

Фіксуємо тепер  $K$  таке, що виконується така умова.

**Умова 1.**  $\Lambda = \Lambda(K, \gamma) < -1$ .

Проблема реалізованості цієї умови досліджена в [2, 4, 20].

З леми 1 та умови 1 випливає, що при фіксованому  $K$  і  $D \gg 1$ ,  $\omega = \omega(K, \gamma)$  – асимптотично стійке рішення задачі (1), (2). Зі зменшенням  $D$  і його проходження через значення

$$D_1 = -(1 + \Lambda) \quad (5)$$

рішення  $u = \omega(K, \gamma)$  втрачає стійкість. Індекс нестійкості [5] рішення  $\omega$  при  $\frac{D_1}{4} < D < D_1$  дорівнює 1. Зі зменшенням  $D$  і його проходження через наступні значення  $D_1(k+1)^{-2}$ ,  $k = 1, 2, \dots$  кожен раз індекс нестійкості рішення  $\omega$  підвищується на одиницю.

Як біфуркаційний параметр приймемо  $D$ . Заміна  $u = v + \omega$  призводить рівняння (1) до вигляду

$$\begin{aligned} v_t + Lv &= R(Qv), \\ v(\varphi + 2\pi, t) &= v(\varphi, t), \end{aligned} \quad (6)$$

де  $L = 1 - D\Delta - \Lambda Q$ ,  $\Lambda = -K\gamma \sin \omega$ ,  $Qv = v(\pi - \varphi, t)$ ,

$$R(Qv) = \Lambda \frac{1}{2!} \operatorname{ctg} \omega \cdot Qv^2 - \Lambda \frac{1}{3!} \cdot Qv^3 + O(v^4).$$

Знайдемо рішення задачі (6) за допомогою методу центральних різноманіть. Опираючись на [19], центральне різноманіття в розглянутому випадку можна подати у вигляді

$$v = z \cos \varphi + \frac{1}{2!} \Omega_2(z, \varphi, D) + \frac{1}{3!} \Omega_3(z, \varphi, D) + \dots, \quad (7)$$

де  $\Omega_2(z, \varphi, D)$ ,  $\Omega_3(z, \varphi, D)$ , ... форми другого, третього... ступеня стосовно  $z = z(t)$ .

На центральному різноманітті рівняння (6) набуває вигляду

$$\dot{z} = -\lambda_1(D)z + c_1(D)z^3 + \dots \quad (8)$$

Знайдемо коефіцієнти розкладань (7), (8). Для цього підставимо (7), (8) в (6) і прирівнюємо коефіцієнти за однакових ступенів  $z$ . Вважаючи  $\Omega_2 = q_2 z^2$ , при  $z^2$  отримаємо рівняння  $(L - 2!\lambda_1)q_2 = \Lambda \operatorname{ctg} \omega \cos^2 \varphi$ . На підставі леми 1

$$q_2 = \frac{\Lambda}{2} \operatorname{ctg} \omega \left( (\lambda_0 - 2\lambda_1)^{-1} + (\lambda_3 - 2\lambda_1)^{-1} \cos 2\varphi \right). \quad (9)$$

Нехай  $\Omega_3 = q_3 z^3$ , тоді  $q_3$  задовольняє рівняння

$$\frac{1}{3!} (L - 3\lambda_1)q_3 + c_1(D) \cos \varphi = -\frac{1}{2} \Lambda \operatorname{ctg} \omega \cos \varphi Qq_2 + \frac{1}{3!} \Lambda \cos^3 \varphi, \quad (10)$$

де  $q_2$  визначена раніше.

Умова можливості розв'язання цього рівняння призводить до однозначного визначення

$$c_1(D) = \frac{\Lambda}{8} - \frac{1}{4}(\Lambda \operatorname{ctg} \omega)^2 \left( (\lambda_0 - 2\lambda_1)^{-1} + \frac{1}{2}(\lambda_3 - 2\lambda_1)^{-1} \right) < 0. \quad (11)$$

Рівняння (10) при згаданому виборі  $c_1(D)$  одержує рішення того ж вигляду, що і його неоднорідність

$$q_3 = (\lambda_5 - 3\lambda_1)^{-1} \left( \frac{\Lambda}{4} - \frac{3}{4} \Lambda^2 \operatorname{ctg}^2 \omega (\lambda_3 - 2\lambda_1)^{-1} \right) \cos 3\varphi. \quad (12)$$

Аналогічно, коефіцієнт  $q_4$  форми  $\Omega_4$  однозначно визначається з відповідного рівняння. Умова розв’язання рівняння щодо коефіцієнта  $q_5$  форми  $\Omega_5$  призводить до однозначного визначення  $c_3(D)$ . Зазначений процес можна необмежено продовжити.

За умовою  $c_1(D_1) < 0$ . Оскільки похідна  $\lambda_1(D_1) = 0$ , то справджується суперкритична біфуркація типу “вилка” і з тривіальної особливої точки рівняння (8) відгалужуються дві експоненціально стійкі точки

$$z^\pm = \pm \left( \frac{D - D_1}{c_1(D_1)} \right)^{\frac{1}{2}} + O(D - D_1). \quad (13)$$

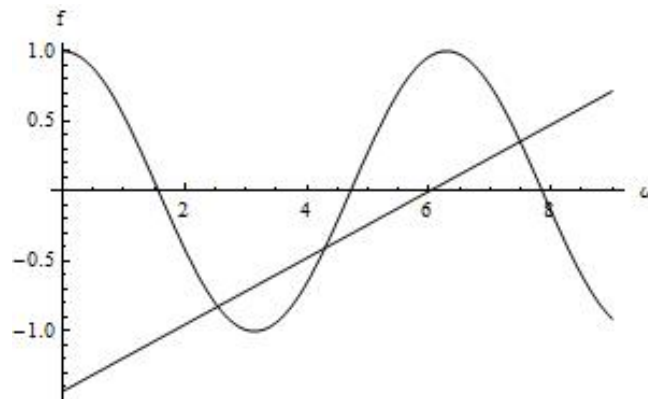


Рис. 1. Графік рішення рівняння  $\omega = 4(1 + 0,7 \cos \omega)$

Отже, в сім’ї рівнянь (6) відбувається суперкритична біфуркація народження експоненціально стійких стаціонарних рішень. На підставі (9), (12), (13) отримуємо

$$\begin{aligned} v^\pm(\varphi, D) \approx & \pm \left( \frac{D - D_1}{c_1(D_1)} \right)^{\frac{1}{2}} \cos \varphi + \\ & + \frac{1}{2!} \left( \frac{D - D_1}{c_1(D_1)} \right) \frac{\Lambda}{2} \operatorname{ctg} \omega \left( (\lambda_0 - 2\lambda_1)^{-1} + (\lambda_3 - 2\lambda_1)^{-1} \cos 2\varphi \right) \pm \\ & \pm \frac{1}{3!} \left( \frac{D - D_1}{c_1(D_1)} \right)^{\frac{3}{2}} (\lambda_5 - 3\lambda_1)^{-1} \left( \frac{\Lambda}{4} - \frac{3}{4} \Lambda^2 \operatorname{ctg}^2 \omega (\lambda_3 - 2\lambda_1)^{-1} \right) \cos 3\varphi. \end{aligned} \quad (14)$$

Справджується така теорема.

**Теорема 1.** Нехай виконана умова 1. Існує  $\delta_0 > 0$  таке, що якщо,  $0 < D_1 - D < \delta_0$ , то задача (1), (2) має два рішення:  $u^\pm(\varphi, D) = \omega + v^\pm(\varphi, D)$ . Тут  $v^\pm(\varphi, D)$  задовольняє (14). Рішення  $u^\pm$  експоненціально стійкі.

**Приклад 1.** Розглянемо випадок, коли параметри  $K = 4$ ,  $\gamma = 0,7$ . Тоді рівняння для визначення стаціонарних рішень набуде вигляду:  $\omega = 4(1 + 0,7 \cos \omega)$ .

Розв'язуючи це рівняння, одержуємо три значення  $\omega$ :  $\omega_1 = 2.24721$ ,  $\omega_2 = 5.1264$ ,  $\omega_3 = 6.63168$ . Умова існування стаціонарного рішення виконується тільки при  $\omega = \omega_1 = 2.24721$ . Критичне значення  $D$ :  $D_1 = 1.18351$ , тоді  $c_1(D_1) = -0.562709 < 0$ . Залежно від значення  $D$  матимемо різні значення  $u(\varphi, D) = v(\varphi, D) + \omega$ ,  $v(\varphi, D) = v^+(\varphi, D)$ .

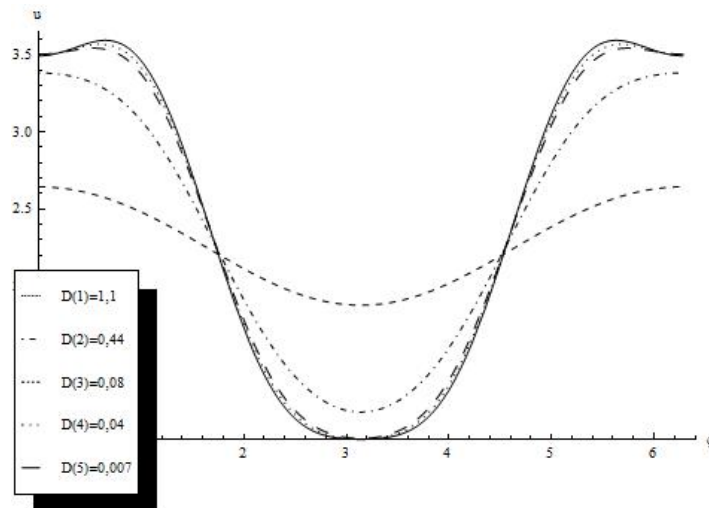


Рис. 2. Графік рішення  $u$  при різних  $D$

### 3. МОДИФІКОВАНИЙ МЕТОД ЦЕНТРАЛЬНОГО РІЗНОМАНІТТЯ

Область застосування рівняння (14) для опису динаміки рівняння (6) при подальшому зменшенні  $D$  і відході від біфуркаційного значення є вузькою. У зв'язку з цим побудуємо двомодову апроксимацію рівняння (6). Скористаємося формалізмом побудови центральних різноманіть в поєднанні з методом Гальоркіна. Побудуємо наближені рішення рівняння (6) у вигляді

$$v = z_1 \cos \varphi + z_2 \sin 2\varphi + \frac{1}{2!} \Omega_2(z, \varphi, D) + \frac{1}{3!} \Omega_3(z, \varphi, D), \quad (15)$$

де  $\Omega_2$ ,  $\Omega_3$  – форми другого, третього ступеня відповідно щодо  $z$ ,  $z = (z_1, z_2)$  – рішення системи

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = -\lambda_1 z_1 + g_1(z, D), \\ \dot{z}_2 = -\lambda_4 z_2 + g_2(z, D). \end{cases} \quad (16)$$

Тут  $g_1, g_2$  – форми третього ступеня  $z$ . Підставимо (15), (16) в (6) і прирівняємо форми другого та третього ступеня щодо  $z$ . Використовуючи розглянутий вище алгоритм, визначають вирази для  $\Omega_2, \Omega_3, g_1, g_2$ . У зв'язку з громіздкістю вирази для  $g_1, g_2$  не наводимо.

Форма другого ступеня  $\Omega_2$  задовольняє рівняння

$$L\Omega_2 - \lambda_1 z_1 \frac{\Omega_2}{\partial z_1} - \lambda_4 z_2 \frac{\Omega_2}{\partial z_2} = \Lambda \operatorname{ctg} \omega (z_1 \cos \varphi + z_2 \sin 2\varphi)^2.$$

Для  $\Omega_2$  отримуємо

$$\Omega_2 = \frac{\Lambda}{2} \operatorname{ctg} \omega \left( \begin{aligned} & \left( (\lambda_0 - 2\lambda_1)^{-1} + (\lambda_3 - 2\lambda_1)^{-1} \cos 2\varphi \right) z_1^2 + \\ & + \left( (\lambda_0 - 2\lambda_4)^{-1} - (\lambda_7 - 2\lambda_4)^{-1} \cos 4\varphi \right) z_2^2 + \\ & + 2 \left( (\lambda_2 - \lambda_1 - \lambda_4)^{-1} \sin \varphi + (\lambda_6 - \lambda_1 - \lambda_4)^{-1} \sin 3\varphi \right) z_1 z_2 \end{aligned} \right).$$

Форма третього ступеня  $\Omega_3$  задовольняє рівняння

$$\begin{aligned} & \frac{1}{3!} \left( L\Omega_3 - \lambda_1 z_1 \frac{\Omega_3}{\partial z_1} - \lambda_4 z_2 \frac{\Omega_3}{\partial z_2} \right) + g_1 \cos \varphi + g_2 \sin 2\varphi = \\ & = -\frac{1}{2} \Lambda \operatorname{ctg} \omega (z_1 \cos \varphi + z_2 \sin 2\varphi) Q\Omega_2 + \frac{\Lambda}{6} (z_1 \cos \varphi + z_2 \sin 2\varphi)^3. \end{aligned}$$

$\Omega_3$  набуває вигляду

$$\begin{aligned} \Omega_3 = & \left( (\lambda_5 - 3\lambda_1)^{-1} \left( \frac{\Lambda}{4} - \frac{3}{4} (\lambda_3 - 2\lambda_1)^{-1} \Lambda^2 \operatorname{ctg}^2 \omega \right) \cos 3\varphi \right) z_1^3 + \\ & + \left( (\lambda_8 - 2\lambda_1 - \lambda_4)^{-1} \left( \frac{\Lambda}{4} - \left( \frac{\Lambda}{2} \operatorname{ctg} \omega \right)^2 \left( (\lambda_3 - 2\lambda_1)^{-1} + \right. \right. \right. \\ & \left. \left. \left. + 2(\lambda_6 - \lambda_1 - \lambda_4)^{-1} \right) \right) \sin 4\varphi \right) 3z_1^2 z_2 + \\ & + \left( (\lambda_5 - \lambda_1 - 2\lambda_4)^{-1} \left( -\frac{\Lambda}{4} + \left( \frac{\Lambda}{2} \operatorname{ctg} \omega \right)^2 \left( (\lambda_7 - 2\lambda_4)^{-1} + \right. \right. \right. \\ & \left. \left. \left. + 2(\lambda_2 - \lambda_1 - \lambda_4)^{-1} \right) \right) \cos 3\varphi + \right. \\ & \left. + (\lambda_9 - \lambda_1 - 2\lambda_4)^{-1} \left( -\frac{\Lambda}{4} + \left( \frac{\Lambda}{2} \operatorname{ctg} \omega \right)^2 \left( (\lambda_7 - 2\lambda_4)^{-1} + \right. \right. \right. \\ & \left. \left. \left. + 2(\lambda_6 - \lambda_1 - \lambda_4)^{-1} \right) \right) \cos 5\varphi \right) 3z_1 z_2^2 + \\ & + \left( (\lambda_{12} - 3\lambda_4)^{-1} \left( -\frac{\Lambda}{4} + \frac{3}{4} (\lambda_7 - 2\lambda_4)^{-1} \Lambda^2 \operatorname{ctg}^2 \omega \right) \sin 6\varphi \right) z_2^3 \end{aligned}$$

Підставивши  $g_1, g_2$  в (12), одержуємо систему

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = z_1 (-\lambda_1 + C_{20}^1 z_1^2 + C_{11}^1 z_1 z_2 + C_{02}^1 z_2^2), \\ \dot{z}_2 = z_2 (-\lambda_4 + C_{20}^2 z_1^2 + C_{11}^2 z_1 z_2 + C_{02}^2 z_2^2), \end{cases}$$

де

$$C_{20}^1 = -\left( \frac{\Lambda}{2} \operatorname{ctg} \omega \right)^2 \left( (\lambda_0 - 2\lambda_1)^{-1} + \frac{1}{2} (\lambda_3 - 2\lambda_1)^{-1} \right) + \frac{\Lambda}{8},$$

$$C_{02}^1 = -\left(\frac{\Lambda}{2} \operatorname{ctg} \omega\right)^2 \left( (\lambda_0 - 2\lambda_4)^{-1} + (\lambda_2 - \lambda_1 - \lambda_4)^{-1} + (\lambda_6 - \lambda_1 - \lambda_4)^{-1} \right) + \frac{\Lambda}{4},$$

$$C_{11}^1 = 0,$$

$$C_{11}^2 = 0,$$

$$C_{20}^2 = -\left(\frac{\Lambda}{2} \operatorname{ctg} \omega\right)^2 \left( (\lambda_0 - 2\lambda_1)^{-1} + (\lambda_2 - \lambda_1 - \lambda_4)^{-1} + (\lambda_6 - \lambda_1 - \lambda_4)^{-1} \right) + \frac{\Lambda}{4},$$

$$C_{02}^2 = -\left(\frac{\Lambda}{2} \operatorname{ctg} \omega\right)^2 \left( (\lambda_0 - 2\lambda_4)^{-1} + \frac{1}{2}(\lambda_7 - 2\lambda_4)^{-1} \right) + \frac{\Lambda}{8}.$$

Нехай  $(x_1(D), x_2(D))$  – безперервна гілка стаціонарних рішень системи (17), яка відгалужується з нульового рішення і така, що  $x_1(D) > 0$  при малих  $D_1 - D > 0$ . Тоді на підставі (15), (17) наближеними стаціонарними рішеннями рівняння (6) є такі функції:

$$\begin{aligned} v^\pm = & \pm(x_1(D)\cos\varphi + x_2(D)\sin 2\varphi) + \\ & + \frac{\Lambda}{4} \operatorname{ctg} \omega \left( \begin{aligned} & \left[ (\lambda_0 - 2\lambda_1)^{-1} + (\lambda_3 - 2\lambda_1)^{-1} \cos 2\varphi \right] x_1^2(D) + \\ & \left[ (\lambda_0 - 2\lambda_4)^{-1} - (\lambda_7 - 2\lambda_4)^{-1} \cos 4\varphi \right] x_2^2(D) + \\ & \left[ + 2(\lambda_2 - \lambda_1 - \lambda_4)^{-1} \sin \varphi + (\lambda_6 - \lambda_1 - \lambda_4)^{-1} \sin 3\varphi \right] x_1(D)x_2(D) \end{aligned} \right) \pm \\ & \pm \frac{1}{6} \left( \begin{aligned} & \left( (\lambda_5 - 3\lambda_1)^{-1} \left( \frac{\Lambda}{4} - \frac{3}{4}(\lambda_3 - 2\lambda_1)^{-1} \Lambda^2 \operatorname{ctg}^2 \omega \right) \cos 3\varphi \right) x_1^3(D) + \\ & \left( (\lambda_8 - 2\lambda_1 - \lambda_4)^{-1} \left( \frac{\Lambda}{4} - \left( \frac{\Lambda}{2} \operatorname{ctg} \omega \right)^2 \left( (\lambda_3 - 2\lambda_1)^{-1} + \right. \right. \right. \\ & \left. \left. \left. + 2(\lambda_6 - \lambda_1 - \lambda_4)^{-1} \right) \right) \sin 4\varphi \right) 3x_1^2(D)x_2(D) + \\ & \left( (\lambda_5 - \lambda_1 - 2\lambda_4)^{-1} \left( -\frac{\Lambda}{4} + \left( \frac{\Lambda}{2} \operatorname{ctg} \omega \right)^2 \left( (\lambda_7 - 2\lambda_4)^{-1} + \right. \right. \right. \\ & \left. \left. \left. + 2(\lambda_2 - \lambda_1 - \lambda_4)^{-1} \right) \right) \cos 3\varphi + \right) 3x_1(D)x_2^2(D) + \\ & \left( (\lambda_9 - \lambda_1 - 2\lambda_4)^{-1} \left( -\frac{\Lambda}{4} + \left( \frac{\Lambda}{2} \operatorname{ctg} \omega \right)^2 \left( (\lambda_7 - 2\lambda_4)^{-1} + \right. \right. \right. \\ & \left. \left. \left. + 2(\lambda_6 - \lambda_1 - \lambda_4)^{-1} \right) \right) \cos 5\varphi \right) \\ & \left. + \left( (\lambda_{12} - 3\lambda_4)^{-1} \left( -\frac{\Lambda}{4} + \frac{3}{4}(\lambda_7 - 2\lambda_4)^{-1} \Lambda^2 \operatorname{ctg}^2 \omega \right) \sin 6\varphi \right) x_2^3(D) \end{aligned} \right). \end{aligned}$$

Зауважимо, що знаменники в (17) є позитивними на проміжку  $(D, D_1^1)$  зміни параметра  $D$ . Тут  $D_1^1 = \frac{-1-3\Lambda}{8}$  – корінь рівняння  $\lambda_0 - 2\lambda_4 = 0$ . Коефіцієнти системи (17)  $C_{20}^1, C_{02}^1, C_{20}^2, C_{02}^2$  необмежено зростають при  $D \rightarrow D_1^1 + 0$ . Отже, коефіцієнти тригонометричних поліномів у (17) безперервні при відповідному до визначенні в точці  $D = D_1^1$ . Аналогічне явище правильне також і для інших точок  $D$ , в яких один зі знаменників у (17) набуває нульового значення.

**Приклад 2.** При  $D = D_1 = 1.18351$  з нульового рішення системи (17) відгалужуються дві гілки стаціонарних рішень  $(\pm x_1(D), 0)$ , а нульове рішення втрачає стійкість.

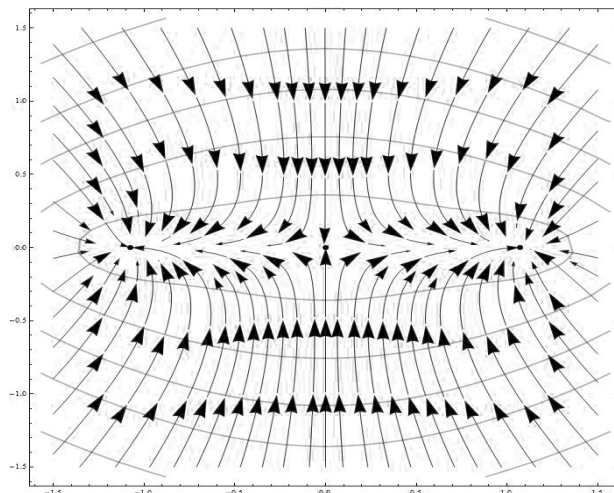


Рис. 3. Стаціонарні рішення системи (17)

На рис. 4 показано графіки рішення  $u$  при зменшенні  $D$  на безперервній гілці стаціонарних рішень системи (17)  $(x_1(D) > 0, 0)$ .

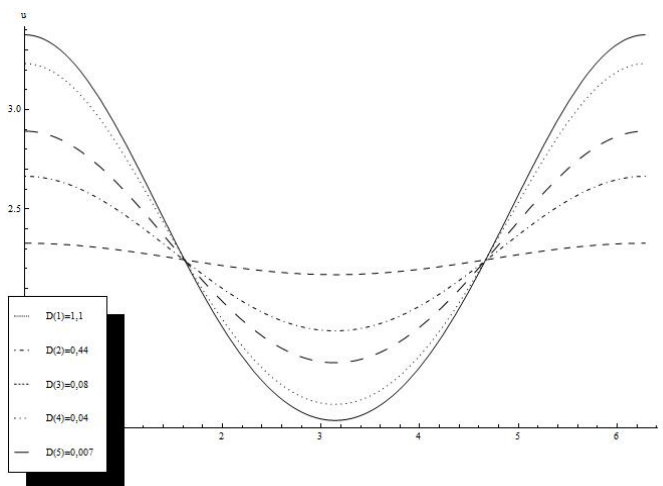


Рис. 4. Графік рішення  $u$  при різних  $D$

Побудуємо чотиримодову апроксимацію рівняння (6) і порівняємо з результатами двомодової. Будуватимемо наближені рішення рівняння (6) у вигляді



$$v = z_1 \cos \varphi + z_2 \sin 2\varphi + z_3 \cos 3\varphi + z_4 \sin 4\varphi + \frac{1}{2!} \Omega_2(z, \varphi, D) + \frac{1}{3!} \Omega_3(z, \varphi, D), \quad (18)$$

де  $\Omega_2, \Omega_3$  – форми другого, третього ступеня відповідно  $z$ ,  $z = (z_1, z_2, z_3, z_4)$  – рішення системи

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = -\lambda_1 z_1 + g_1(z, D), \\ \dot{z}_2 = -\lambda_4 z_2 + g_2(z, D), \\ \dot{z}_3 = -\lambda_5 z_3 + g_3(z, D), \\ \dot{z}_4 = -\lambda_8 z_4 + g_4(z, D). \end{cases} \quad (19)$$

Тут  $g_1, g_2, g_3, g_4$  – форми третього ступеня  $z$ . Враховуючи розглянуту вище схему, отримуємо вирази для  $\Omega_2, \Omega_3, g_1, g_2, g_3, g_4$ . У зв'язку з громіздкістю цих виразів їх не подаємо.

При  $D = D_1 = 1.18351$  з нульового рішення системи (20) відгалужуються дві гілки стаціонарних рішень  $(\pm x_1(D), 0, \pm x_3(D), 0)$ , які стають стійкими, а нульове рішення стає нестійким. Аналіз чотиримодової апроксимації підтвердив результати двомодової.

#### 4. ВИСНОВКИ

Розглянута задача для параболічного рівняння з перетворенням відображення просторової змінної принципово відрізняється від задач, розглянутих у [2, 8, 9, 17, 22] тим, що коефіцієнт дифузії не припускається тільки малим. Досліджено питання про еволюцію форм стаціонарних структур при зменшенні коефіцієнта дифузії від середніх значень (порядку 1) до досить малих. Аналіз побудованих спрощених моделей вихідної задачі дає підстави стверджувати, що їхнє використання призводить до висновків, які якісно узгоджуються з результатами чисельного аналізу стаціонарних структур, поданих в [15, 16, 23].

#### СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. *Ахманов С. А.* Новые физические принципы оптической обработки информации: Сб. статей / Под ред. С. А. Ахманова, М. А. Воронцова. – М.: Наука, 1990, – 398 с.
2. *Мищенко Е. Ф.* Автоволновые процессы в нелинейных средах с диффузией / Е. Ф. Мищенко, В. А. Садовничий, А. Ю. Колесов, Н. Х. Розов. – М.: Физматлит, 2005. – 430 с.
3. *Ахромеева Т. С.* Структуры и хаос в нелинейных средах / Т. С. Ахромеева, С. П. Курдюмов, Г. Г. Малинецкий, А. А. Самарский. – М.: Физматлит, 2005. – 486 с.
4. *Ахманов С. А.* Генерация структур в оптических системах с двумерной обратной связью: на пути к созданию нелинейно-оптических аналогов нейронных сетей / С. А. Ахманов, М. А. Воронцов, В. Ю. Иванов // Новые принципы оптической обработки информации. – М.: Наука, 1990. – С. 263-325.
5. *Бабин А. В.* Аттракторы эволюционных уравнений / А. В. Бабин, М. И. Вишик. – М.: Наука, 1989. – 294 с.
6. *Белан Е. П.* Бифуркация периодических решений в параболической задаче с преобразованным аргументом / Е. П. Белан // Ученые записки ТНУ. Сер. матем., мех., информатика и кибернетика. – 2001. – Т. 14, № 1. – С. 24-33.

7. Белан Е. П. О бифуркации периодических решений в параболическом функционально-дифференциальном уравнении / Е. П. Белан // Ученые записки ТНУ. Сер. матем., мех., информатика и кибернетика. – 2002. – № 2. – С. 11-23.
8. Белан Е. П. О динамике бегущих волн в параболическом уравнении с преобразованием сдвига пространственной переменной / Е. П. Белан // Журнал математической физики, анализа, геометрии. – 2005. – Т. 1, № 1. – С. 3-34.
9. Белан Е. П. Оптическая буферность стационарных структур / Е. П. Белан // Кибернетика и системный анализ. – 2008. – Т. 44, № 5. – С. 61-75.
10. Белан Е. П. О взаимодействии бегущих волн в параболическом функционально-дифференциальном уравнении / Е. П. Белан // Дифференциальные уравнения. – 2004. – Т. 40, № 5. – С. 645-654.
11. Белан Е. П. Вращающиеся структуры в параболическом функционально-дифференциальном уравнении / Е. П. Белан, О. Б. Лыкова // Дифференциальные уравнения. – 2004. – Т. 40, № 10. – С. 1348-1357.
12. Белан Е. П. Бифуркации вращающихся структур в параболическом функционально-дифференциальном уравнении / Е. П. Белан, О. Б. Лыкова // Нелинейные колебания. – 2006. – Т. 9, № 2. – С. 155-169.
13. Белан Е. П. Бифуркации вращающихся структур в параболическом уравнении с преобразованием поворота пространственной переменной / Е. П. Белан, О. Б. Лыкова // Динам. системы. – 2008. – Т. 25. – С. 3-16.
14. Васильева А. Б. Бифуркация автоколебаний нелинейных параболических уравнений с малой диффузией / А. Б. Васильева, С. А. Кашенко, Ю. С. Колесов, Н. Х. Розов // Мат. сборник. – 1989. – Т. 130 (172), № 4 (8). – С. 488-499.
15. Воронцов М. А. Поперечная бистабильность и мультистабильность в нелинейных оптических системах с обратной связью / М. А. Воронцов, Н. И. Железных // Мат. моделирование. – 1990. – Т. 2, № 2. – С. 31-38.
16. Железных Н. И. Исследование нелинейных управляемых оптических систем с обратной связью: дис. канд. физ.-мат. наук / Н. И. Железных. – М., 1991. – 115 с.
17. Кашенко С. А. Асимптотика пространственно-неоднородных структур в когерентных нелинейно-оптических системах / С. А. Кашенко // Журнал вычисл. матем. и матем. физики. – 1991. – Т. 31, № 3. – С. 467-473.
18. Колесов А. Ю. Метод квазинормальных форм в задаче об установившихся режимах параболических систем с малой диффузией / А. Ю. Колесов // Укр. мат. журнал. – 1987. – Т. 39, № 1. – С. 27-34.
19. Марсден Дж. Бифуркация рождения цикла и ее приложения / Дж. Марсден, М. Мак-Кракен. – М.: Мир, 1980. – 368 с.
20. Разгулин А. В. Нелинейные модели оптической синергетики / А. В. Разгулин. – М.: Изд. о ф-та ВМиК МГУ, МАКС Пресс, 2008. – 203 с.
21. Akhmanov S. A. Controlling transverse-wave interactions in nonlinear optics generations of spatiotemporal structures / S. A. Akhmanov, M. A. Vorontsov, V. Yu. Ivanov, et al // J. Optical Soc. Amer. Ser. B. – 1992. – Vol. 9, № 1. – P. 78-90
22. Grigorieva E. V. Travelling wave dynamics in a nonlinear interferometer with spatial field transformer in feedback / E. V. Grigorieva, H. Haken, S. A. Kashchenko, A. Pelster // Phvsika D. – 1999. – Vol. 125. – P. 123-141.

23. Vorontsov M. A. Transverse interaction in 2-D feedback non-linear optical systems / M. A. Vorontsov, N. I. Zheleznykh, V. Yu. Ivanov // Opt. and Quant. Electron. – 1988. – Vol. 22. – P. 501-515.

*Стаття: надійшла до редколегії 20.01.2014*

*доопрацьована 19.03.2014*

*прийнята до друку 09.04.2014*

## **ДИНАМИКА СТАЦИОНАРНЫХ СТРУКТУР В ПАРАБОЛИЧЕСКОЙ ЗАДАЧЕ С ОТРАЖЕНИЕМ ПРОСТРАНСТВЕННОЙ ПЕРЕМЕННОЙ**

**Ю. Хазова**

*Таврический национальный университет имени В. И. Вернадского,  
ул. Вернадского, 1, Симферополь, 95000, e-mail: [hazova.yuliya@hotmail.com](mailto:hazova.yuliya@hotmail.com)*

Исследуется динамика стационарных структур в нелинейном оптическом резонаторе с преобразованием отражения в двумерной обратной связи. Математической моделью системы является параболическое уравнение с преобразованием отражения пространственной переменной и условиями периодичности. Исследуется эволюция форм и устойчивость структур при уменьшении коэффициента диффузии. Используется метод центральных многообразий.

*Ключевые слова:* параболическое уравнение, бифуркация, устойчивость, центральное многообразие.

## **DYNAMICS OF STATIONARY STRUCTURES IN A PARABOLIC PROBLEM WITH REFLECTED SPATIAL VARIABLES**

**Yu. Khazova**

*Tauride National University,  
Vernadsky Str., 1, Simferopol, 95000, e-mail: [hazova.yuliya@hotmail.com](mailto:hazova.yuliya@hotmail.com)*

The dynamics of stationary structures in a nonlinear optical resonator with the transformation of the reflection in a two-dimensional feedback. Mathematical model of the system is a parabolic equation with variable spatial reflection transformation and periodicity conditions. The evolution of forms and stability of structures with decreasing diffusion coefficient. In this paper, the method of central manifolds.

*Key words:* parabolic equation, bifurcation, stability, the central manifold.