

РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧІ НА ВЛАСНІ ЗНАЧЕННЯ З БАГАТЬМА НЕВІДОМИМИ

А. Недашковська

Львівський національний університет імені Івана Франка,
вул. Університетська, 1, Львів, 79000, e-mail: nastia.nedashkovska@gmail.com

Запропоновано й обґрунтовано ітераційний метод знаходження одного з розв'язків системи задач на власні значення. Означено деякі терміни та узагальнено об'єкти, які розглядають. Проведено чисельні експерименти.

Ключові слова: ітераційний метод, система задач на власні значення.

1. ВСТУП

Необхідність відшукування власних значень і власних векторів матриць виникає в багатьох теоретичних і прикладних дисциплінах. До розв'язування подібних задач зводиться частина диференціальних рівнянь, деякі задачі механіки, радіофізики.

В [1] розглянули нові підходи до розв'язування систем поліноміальних матричних рівнянь. Запропонували метод матричної лінеаризації, з допомогою якого системи поліноміальних рівнянь, які розглядають над множиною матриць, зводяться до систем матричних рівнянь із відокремленими змінними з матрицями-коефіцієнтами з матрицями-коефіцієнтами більшої, ніж у початковій задачі розмірності. Також було запропоновано схему подання отриманих після застосування методу лінеаризації систем до задач на власні значення, які задані над множиною матриць. Отож, виникла необхідність у розв'язуванні нового класу задач – систем задач на власні значення. Для подальшої роботи з цими системами треба ввести деякі терміни та узагальнити властивості об'єктів, які розглядають.

Означення 1. Масив $X = (X_1, X_2, \dots, X_n)^T$ із коефіцієнтами $X_i \in R^{p \times p}$ ($i = \overline{1, n}$) називатимемо блочним вектором розмірності n .

Означення 2. Матрицю A із коефіцієнтами $A_{ij} \in R^{p \times p}$ ($i, j = \overline{1, n}$) будемо називати блочною матрицею розмірності $n \times n$.

Означення 3. [2] Тензорний добуток матриць $A = \{A_{ij}\}$ із m стрічок та n стовпців та $B = \{b_{kl}\}$ із p стрічок і q стовпців можна записати у формі блочної матриці вигляду

$$A \otimes B = \begin{pmatrix} A_{11}B & A_{12}B & \dots & A_{1n}B \\ A_{21}B & A_{22}B & \dots & A_{2n}B \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{m1}B & A_{m2}B & \dots & A_{mn}B \end{pmatrix}.$$

2. ФОРМУЛЮВАННЯ ЗАДАЧІ

Нехай $A = \{A_{ij}\}_{ij=1}^n$ – блочна $n \times n$ матриця, з коефіцієнтами $A_{ij} \in R^{p \times p}$ ($i, j = \overline{1, n}$), $X = \{X_i\}_{i=1}^n$ – блочний вектор розмірності n , причому $X_i \in R^{p \times p}$ ($i = \overline{1, n}$), E_n – одинична $n \times n$ матриця, а Λ – дійсна $p \times p$. Для блочно-діагональної матриці

$$E_n \otimes \Lambda \equiv \begin{pmatrix} \Lambda & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \Lambda & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \Lambda \end{pmatrix}$$

також використовуватимемо позначення $E_n \otimes \Lambda = \Lambda \otimes \Lambda \otimes \dots \otimes \Lambda$, або

$$E_n \otimes \Lambda = \bigoplus_{i=1}^n \Lambda.$$

Над множиною матриць розглянемо систему вигляду

$$AX = \left(\bigoplus_{i=1}^n \Lambda \right) X. \quad (1)$$

Далі систему (1) будемо називати системою задач на власні значення або ж задачею на власні значення, які розглядають над множиною матриць.

Ми подамо й обґрунтуємо ітераційний метод знаходження одного з розв'язків (1).

3. ОБЧИСЛЮВАЛЬНА СХЕМА МЕТОДУ

Припустимо, що матриця A в системі (1) – симетрична додатно визначена матриця. Відомо [3], що у матриць такої структури додатно визначений дійсний спектр $\Lambda_1, \Lambda_2, \dots, \Lambda_n$ і ортонормований базис із власних векторів

$$X_1 = \begin{pmatrix} X_{11} \\ X_{12} \\ \vdots \\ X_{1n} \end{pmatrix}, X_2 = \begin{pmatrix} X_{21} \\ X_{22} \\ \vdots \\ X_{2n} \end{pmatrix}, \dots, X_n = \begin{pmatrix} X_{n1} \\ X_{n2} \\ \vdots \\ X_{nn} \end{pmatrix}. \quad (2)$$

Тобто матриця A – матриця простої структури.

Нехай нумерація власних векторів (2) відповідає нумерації впорядкованих за зростанням норм власних $\Lambda_1, \Lambda_2, \dots, \Lambda_n$

$$\|\Lambda_1^{-1}\|_2 < \|\Lambda_2^{-1}\|_2 \leq \dots \leq \|\Lambda_n^{-1}\|_2. \quad (3)$$

Сформулюємо задачу наближеного знаходження власного значення Λ_1 , для якого справджується умова (3), а також відповідного йому власного вектора X_1 для деякої матриці A .

Нехай $Y^{(0)} = (Y_1^{(0)}, Y_2^{(0)}, \dots, Y_n^{(0)})^T$ – довільний ненульовий вектор. Тоді його можна розкласти за базисом із власних векторів X_1, X_2, \dots, X_n

$$Y^{(0)} = c_1 X_1 + c_2 X_2 + \dots + c_n X_n. \quad (4)$$

Припустимо, що $c_i \neq 0$ (інакше можемо взяти інший початковий вектор $Y^{(0)}$).
 Перемножимо рівність (4) зліва на матрицю A :

$$Y^{(1)} = AY^{(0)} = c_1 AX_1 + c_2 AX_2 + \dots + c_n AX_n. \quad (5)$$

Оскільки $\{\Lambda_i, X_i\} (i = \overline{1, n})$ – власні пари матриці A , то з рівностей (1) і (5) отримаємо

$$Y^{(1)} = c_1 \left(\bigoplus_{i=1}^n \Lambda_i \right) X_1 + c_2 \left(\bigoplus_{i=1}^n \Lambda_i \right) X_2 + \dots + c_n \left(\bigoplus_{i=1}^n \Lambda_i \right) X_n.$$

На другій ітерації за тим самим принципом отримуємо

$$Y^{(2)} = AY^{(1)} = c_1 \left(\bigoplus_{i=1}^n \Lambda_i \right) AX_1 + c_2 \left(\bigoplus_{i=1}^n \Lambda_i \right) AX_2 + \dots + c_n \left(\bigoplus_{i=1}^n \Lambda_i \right) AX_n = \\ c_1 \left(\bigoplus_{i=1}^n \Lambda_i^2 \right) X_1 + c_2 \left(\bigoplus_{i=1}^n \Lambda_i^2 \right) X_2 + \dots + c_n \left(\bigoplus_{i=1}^n \Lambda_i^2 \right) X_n.$$

Тоді k -та ітерація дасть вектор

$$Y^{(k)} = AY^{(k-1)} = A^k Y^{(0)} = \sum_{j=1}^n c_j \left(\bigoplus_{i=1}^n \Lambda_i^k \right) X_j, \quad (6)$$

або, з врахуванням зображення X_1, X_2, \dots, X_n у початковому вигляді,

$$Y^{(k)} = \begin{pmatrix} Y_1^{(k)} \\ Y_2^{(k)} \\ \vdots \\ Y_n^{(k)} \end{pmatrix} = \sum_{j=1}^n c_j \left(\bigoplus_{i=1}^n \Lambda_i^k \right) \begin{pmatrix} X_{j1} \\ X_{j2} \\ \vdots \\ X_{jn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^n c_j \Lambda_j^k X_{j1} \\ \sum_{j=1}^n c_j \Lambda_j^k X_{j2} \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^n c_j \Lambda_j^k X_{jn} \end{pmatrix}.$$

Легко бачити, що

$$Y^{(k-1)} = \begin{pmatrix} Y_1^{(k-1)} \\ Y_2^{(k-1)} \\ \vdots \\ Y_n^{(k-1)} \end{pmatrix} = \sum_{j=1}^n c_j \left(\bigoplus_{i=1}^n \Lambda_i^{k-1} \right) \begin{pmatrix} X_{j1} \\ X_{j2} \\ \vdots \\ X_{jn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n c_i \Lambda_i^{k-1} X_{i1} \\ \sum_{i=1}^n c_i \Lambda_i^{k-1} X_{i2} \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^n c_i \Lambda_i^{k-1} X_{in} \end{pmatrix}.$$

Означення 4. Нехай $X = (X_1, X_2, \dots, X_n)^T$, $Y = (Y_1, Y_2, \dots, Y_n)^T$

$(X_i, Y_i \in R^{p \times p}, i = \overline{1, n})$. Розглянемо оператор $\langle X, Y \rangle \stackrel{\text{def}}{=} X_1 Y_1 + X_2 Y_2 + \dots + X_n Y_n$.

Теорема 1. Нехай матриця A має n лінійно незалежних векторів X_1, X_2, \dots, X_n (2) таких, що нумерація цих векторів відповідає нумерації впорядкованих власних значень $\Lambda_1, \Lambda_2, \dots, \Lambda_n$ за зростанням норм

$\|\Lambda_1^{-1}\|_2 < \|\Lambda_2^{-1}\|_2 \leq \dots \leq \|\Lambda_n^{-1}\|_2$. $Y^{(0)} = (Y_1^{(0)}, Y_2^{(0)}, \dots, Y_n^{(0)})^T$ – довільний ненульовий вектор такий, що $Y^{(0)} = c_1 X_1 + c_2 X_2 + \dots + c_n X_n$ і $c_1 \neq 0$. Вектор

$$Y^{(k)} = AY^{(k-1)} = A^k Y^{(0)} = \sum_{j=1}^n c_j \left(\bigoplus_{i=1}^n \Lambda_j^k \right) X_j.$$

Тоді $\langle Y^{(k)}, Y^{(k)} \rangle \langle Y^{(k)}, Y^{(k-1)} \rangle^{-1} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \Lambda_1$.

Доведення. Розглянемо оператори $\langle Y^{(k)}, Y^{(k)} \rangle$ і $\langle Y^{(k)}, Y^{(k-1)} \rangle$. Враховуючи ортонормованість власних векторів, тобто умову

$$\langle X_i, X_j \rangle = \begin{cases} E_p, & i = j, \\ 0, & i \neq j, \quad i, j = \overline{1, n}, \end{cases}$$

отримаємо

$$\begin{aligned} \langle Y^{(k)}, Y^{(k)} \rangle &= c_1^2 \Lambda_1^{2k} + c_2^2 \Lambda_2^{2k} + \dots + c_n^2 \Lambda_n^{2k}; \\ \langle Y^{(k)}, Y^{(k-1)} \rangle &= c_1^2 \Lambda_1^{2k-1} + c_2^2 \Lambda_2^{2k-1} + \dots + c_n^2 \Lambda_n^{2k-1}. \end{aligned}$$

Добуток цих матриць

$$\begin{aligned} &\langle Y^{(k)}, Y^{(k)} \rangle \langle Y^{(k)}, Y^{(k-1)} \rangle^{-1} = \\ &= (c_1^2 \Lambda_1^{2k} + c_2^2 \Lambda_2^{2k} + \dots + c_n^2 \Lambda_n^{2k}) (c_1^2 \Lambda_1^{2k-1} + c_2^2 \Lambda_2^{2k-1} + \dots + c_n^2 \Lambda_n^{2k-1})^{-1} = \\ &= c_1^2 \Lambda_1^{2k} \left(E + (\Lambda_1^{2k})^{-1} \Lambda_2^{2k} + \dots + (\Lambda_1^{2k})^{-1} \Lambda_n^{2k} \right) \times \\ &\times \left(E + (\Lambda_1^{2k-1})^{-1} \Lambda_2^{2k-1} + \dots + (\Lambda_1^{2k-1})^{-1} \Lambda_n^{2k-1} \right)^{-1} \frac{1}{c_1^2} (\Lambda_1^{2k-1})^{-1}. \end{aligned}$$

Оскільки $\|\Lambda_1^{-1}\|_2 = \min_{1 \leq i \leq n} \|\Lambda_i^{-1}\|_2$, то суми $\left((\Lambda_1^{2k})^{-1} \Lambda_2^{2k} + \dots + (\Lambda_1^{2k})^{-1} \Lambda_n^{2k} \right)$ і $\left((\Lambda_1^{2k-1})^{-1} \Lambda_2^{2k-1} + \dots + (\Lambda_1^{2k-1})^{-1} \Lambda_n^{2k-1} \right)$ будуть прямувати до нуля при $k \rightarrow \infty$. Отже,

$$\left\| E + (\Lambda_1^{2k})^{-1} \Lambda_2^{2k} + \dots + (\Lambda_1^{2k})^{-1} \Lambda_n^{2k} \right\|_2 \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 1.$$

Аналогічно,

$$\left\| E + (\Lambda_1^{2k-1})^{-1} \Lambda_2^{2k-1} + \dots + (\Lambda_1^{2k-1})^{-1} \Lambda_n^{2k-1} \right\|_2 \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 1.$$

Відповідно при $k \rightarrow \infty$ добуток

$$\langle Y^{(k)}, Y^{(k)} \rangle \langle Y^{(k)}, Y^{(k-1)} \rangle^{-1} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \Lambda_1^{2k} (\Lambda_1^{2k-1})^{-1} = \Lambda_1.$$

Нехай матриця A – симетрична, додатно визначена матриця з додатно визначеним дійсним спектром $\Lambda_1, \Lambda_2, \dots, \Lambda_n$ і ортонормованим базисом із власних векторів (2) і Λ_1 задовольняє (3). Наслідком теореми 1 буде збіжність такого методу знаходження Λ_1 :

- 1)
 - задати симетричну $nr \times nr$ матрицю A

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{n1} & A_{n2} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}.$$

Тут A_{ij} ($i, j = \overline{1, n}$) – квадратні матриці розмірності $\deg A_{ij} = p \times p$;

- задати довільний ненульовий n -вимірний вектор

$$Y^{(0)} = (Y_1^{(0)}, Y_2^{(0)}, \dots, Y_n^{(0)})^T, \quad \deg Y_i^{(0)} = p \times p \quad (i = \overline{1, n});$$

- задати допустиму абсолютну похибку обчислення власного значення Λ_1 , число $\varepsilon > 0$;
- значення $\Lambda^{(0)}$ для початкового порівняння (наприклад, нульову матрицю відповідної розмірності);
- прийняти $k = 1$;

2)

- обчислити матрицю $S^{(0)} = \langle Y^{(0)}, Y^{(0)} \rangle$;

- обчислити норму $\|Y^{(0)}\| = \sqrt{\|S^{(0)}\|}$;

- обчислити вектор $X^{(0)} = \frac{1}{\|Y^{(0)}\|_2} Y^{(0)}$;

3) обчислити

$$Y^{(k)} = AX^{(k-1)} = \begin{pmatrix} A_{11}X_1^{(k-1)} + A_{12}X_2^{(k-1)} \dots + A_{1n}X_n^{(k-1)} \\ A_{21}X_1^{(k-1)} + A_{22}X_2^{(k-1)} \dots + A_{2n}X_n^{(k-1)} \\ \vdots \\ A_{n1}X_1^{(k-1)} + A_{n2}X_2^{(k-1)} \dots + A_{nn}X_n^{(k-1)} \end{pmatrix};$$

4)

- обчислити $S^{(k)} = \langle Y^{(k)}, Y^{(k)} \rangle$ і $T^{(k)} = \langle Y^{(k)}, X^{(k-1)} \rangle$;

- обчислити норму $\|Y^{(k)}\| = \sqrt{\|S^{(k)}\|}$;

- обчислити вектор $X^{(k)} = \frac{1}{\|Y^{(k)}\|_2} Y^{(k)}$ (наближення нормованого власного вектора);

- обчислити $\Lambda^{(k)} = S^{(k)} (T^{(k)})^{-1}$ (наближення власного значення Λ_1);

5) якщо $\|\Lambda^{(k)} - \Lambda^{(k-1)}\| > \varepsilon$, то прийняти $k = k + 1$ і повернутися в пункт 3,

інакше закінчити роботу алгоритму, прийнявши, $X_1 \approx X^{(k)}$.

Цей метод – узагальнення методу скалярних добутків “старшої” власної пари матриці [3].

3. ЧИСЕЛЬНІ ЕКСПЕРИМЕНТИ

Наведений вище алгоритм реалізували за допомогою пакету Matlab 7.4.0.

1. Розглянемо матричне рівняння вигляду

$$X^3 + CX^2 + DX + E = 0. \quad (7)$$

Тут $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $E = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, а X належить множині матриць із $R^{2 \times 2}$.

Застосувавши до рівняння (7) метод матричної лінеаризації [1], переходимо до розв'язування еквівалентного (7) лінійного матричного рівняння

$$(A \otimes X + B)(X^2 \ X \ E_2)^T = 0. \quad (8)$$

Тут матриця

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -4 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix},$$

а матриця

$$B = \begin{pmatrix} -2 & 0 & -5 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 5 & 0 & -6 \\ -2 & 0 & -2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Система власних значень (8) еквівалентна задачі вигляду

$$(\tilde{A} - X \oplus X)(X^2 \ X \ E_2)^T = 0. \quad (9)$$

Тут $\tilde{A} = -A^{-1}B$.

Оскільки вектор $(X^2 \ X \ E_2)^T$ не рівний нулю тотожно, то однорідне рівняння (9) матиме ненульові розв'язки тоді і тільки тоді, коли

$$\text{Det}(\tilde{A} - X \oplus X) = 0,$$

причому

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & -11 & 0 & 6 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Застосуємо описаний вище алгоритм до розв'язування задачі (9). Отримані при

$Y^{(0)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 9 & 0 & 10 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 1 & 0 & 8 \end{pmatrix}^T$ результати подамо у такій таблиці.

Таблиця 1

Результати обчислень для прикладу 1

ε	Кількість ітерацій	Розв'язок
0,1	7	$\begin{pmatrix} 4.0010 & 0 \\ 0 & 3.1336 \end{pmatrix}$
0,01	12	$\begin{pmatrix} 4.0000 & 0 \\ 0 & 3.0159 \end{pmatrix}$
0,001	18	$\begin{pmatrix} 4.0000 & 0 \\ 0 & 3.0014 \end{pmatrix}$
0,0001	23	$\begin{pmatrix} 4.0000 & 0 \\ 0 & 3.0002 \end{pmatrix}$
0,00001	29	$\begin{pmatrix} 4.0000 & 0 \\ 0 & 3.0000 \end{pmatrix}$

Наведені в табл. 1 результати демонструють збіжність ітераційного процесу до розв'язку рівняння (7), а відповідно й задачі (9), $X = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$, при зменшенні абсолютної похибки ε .

2. Застосовуючи метод матричної лінеаризації [1] до рівняння

$$X^2 + \begin{pmatrix} -5 & -1 & -1 \\ -1 & -4 & -1 \\ -1 & -1 & -3 \end{pmatrix} X + \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = 0, \quad (10)$$

де X належить множині матриць з $R^{3 \times 3}$, отримаємо еквівалентне (10) матричне рівняння

$$(A \otimes X + B)(X, E_3)^T = 0. \quad (11)$$

Тут

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ i } B = \begin{pmatrix} -5 & -1 & -1 & 4 & 1 & 1 \\ 0 & -4 & -1 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & 1 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Узагальнена задача на власні значення (11) еквівалентна такій задачі:

$$(\tilde{A} - E_3 \otimes X)(X, E_3)^T = 0. \quad (12)$$

Тут матриця

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 1 & -4 & -1 & -1 \\ 1 & 4 & 1 & -1 & -3 & -1 \\ 1 & 1 & 3 & -1 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Вектор $(X, E_3)^T$ не рівний нулю тотожно, тобто рівність (12) справджується тоді і тільки тоді, коли

$$\text{Det}(\tilde{A} - E_3 \otimes X) = 0. \quad (13)$$

Розв'язавши задачу (13) описаним вище методом при початковому наближенні

$$Y^{(0)} = \left(\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right)^T,$$

отримаємо такі результати:

Таблиця 2

Результати обчислень для прикладу 2

ε	Кількість ітерацій	Розв'язок
0,1	4	$\begin{pmatrix} 4.0290 & 0.9929 & 0.9667 \\ 0.9929 & 3.0622 & 0.9406 \\ 0.9667 & 0.9406 & 2.1478 \end{pmatrix}$
0,01	9	$\begin{pmatrix} 4.0012 & 1.0021 & 0.9951 \\ 1.0021 & 3.0061 & 0.9881 \\ 0.9951 & 0.9881 & 2.0250 \end{pmatrix}$
0,004	12	$\begin{pmatrix} 4.0005 & 1.0012 & 0.9976 \\ 1.0010 & 3.0024 & 0.9946 \\ 0.9980 & 0.9950 & 2.0103 \end{pmatrix}$
0,001	30	–

Одним із розв'язків рівняння (10) буде матриця $\tilde{\Lambda} = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. Згідно з

результатами обчислень, наведених у табл. 2, зі зменшенням ε чисельний розв'язок наближатиметься до матриці $\tilde{\Lambda}$. Однак при $\varepsilon = 0.001$ матриця T , обчислена на 4 кроці алгоритму, стає сингулярною уже на 14-й ітерації – розв'язок задачі не знайдено. Проаналізуємо цю ситуацію.

Матриця $T^{(k)}$, яку обчислюють на четвертому кроці алгоритму, залежить від векторів $X^{(k)}$ і $Y^{(k-1)}$. Оскільки норма $\|(\tilde{\Lambda})^{-1}\|_2 \approx 0.7548$, то норма коефіцієнтів

наближеного власного вектора $X^{(k)}$ на певній ітерації також стає меншою за одиницю – матриця $T^{(k)}$ із ростом k буде наближатися до сингулярної, знайти $(T^{(k)})^{-1}$ стає неможливо, обчислення за описаним вище алгоритмом буде призупинено. Це ще раз підтверджує правильність наведених вище міркувань.

4. ВИСНОВКИ

Отже, розглянуто новий клас задач – розв’язування задач на власні значення з багатьма невідомими. Запропоновано алгоритм знаходження одного з розв’язків. Цей метод – узагальнення класичного методу скалярних добутків визначення „старшої” пари матриці. Доведено збіжність методу, розглянуто приклади його застосування.

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Недашковська А. М. Методи лінеаризації для нелінійних матричних рівнянь: автореф. дис. на здобуття наук. ступеня канд. фіз.-мат. наук / А. Недашковська. – Львів, 2007. – 16 с.
2. Бурбаки Н. Алгебра. Алгебраические структуры. Линейная и полилинейная алгебра / Н. Бурбаки. – М.: Физматгиз, 1962. – 516 с.
3. Фаддеев Д. К. Вычислительные методы линейной алгебры / Д. К. Фаддеев, В. Н. Фаддеева. – М.: Физматгиз, 1963. – 734 с.

Стаття: надійшла до редколегії 5.02.2014

доопрацьована 12.03.2014

прийнята до друку 09.04.2014

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ С МНОГИМИ НЕИЗВЕСТНЫМИ

А. Недашковская

*Львовский национальный университет имени Ивана Франко,
ул. Университетская, 1, Львов, 79000, e-mail: nastia.nedashkovska@gmail.com*

Предложен и обусловлен итерационный метод решения обобщенной задачи собственных значений. Определены некоторые термины и обобщены рассматриваемые объекты. Численные эксперименты проведены.

Ключевые слова: итерационный метод, система задач на собственные значения.

SOLVING THE EIGENVALUE PROBLEM WITH MANY UNKNOWNNS

A. Nedashkovska

*Ivan Franko National University of Lviv,
Universytetska Str., 1, Lviv, 79000, e-mail: nastia.nedashkovska@gmail.com*

The iterative method for solving the generalized eigenvalue problem is proposed and justified. Some terms are identified and considered objects are generalized. Numerical experiments are conducted.

Key words: iterative method, system of the eigenvalue problems.