ISSN 2078–5097. Вісн. Львів. ун-ту. Сер. прикл. матем. та інф. 2014. Вип. 22. С. 16–20
Visnyk of the Lviv University. Series Appl. Math. and Informatics. Issue 22. P. 16–20

УДК 519.6

ТРИКРОКОВИЙ АЛГОРИТМ З ПАМ'ЯТТЮ МІНІМІЗАЦІЇ ФУНКЦІЙ

В. Бартіш

*Львівський національний університет імені Івана Франка,
вул. Університетська, 1, Львів, 79000, e-mail:* bartishv@gmail.com

Використовуючи ідею трикрокових ітераційних методів, запропоновано нову модифікацію з пам'яттю розв'язування задач мінімізації. Теоретично обґрунтовано збіжність методу, виконано практичну реалізацію і проведено порівняння з трикроковим методом Ньютона. [1]

Ключові слова: ітераційний метод, трикроковий метод, безумовна мінімізація.

1. ВСТУП

Задачі мінімізації функцій на практиці трапляються досить часто. Для розв'язування таких задач існує низка методів. На жаль, універсального методу немає, що потребує побудови нових методів, які в тому або іншому сенсі ефективніші для розв'язування відповідного класу задач. Ми пропонуємо нову модифікацію трикрокового методу Ньютона, коли замість градієнтного методу пропонується використовувати іншу формулу обчислення проміжного наближення. Для теоретичного обґрунтування методу доведено його ефективність в сенсі кількості обчислень порівняно з методом Ньютона. Практична реалізація підтвердила теоретичне викладення.

2. ФОРМУЛЮВАННЯ ЗАДАЧІ

Розглянемо задачу безумовної мінімізації

$$f(x) \to \min \quad x \in R^n . \tag{1}$$

При використанні методу Ньютона ми на кожному кроці обчислюємо першу похідну, обернену матрицю других похідних (фактично розв'язуємо систему алгебричних рівнянь) функції $f(x)$. У трикроковому методі ми повніше використовуємо отриману інформацію для знаходження другого проміжного наближення (за градієнтним методом). На третьому кроці знаходимо мінімальне значення функції $f(x)$ на прямій, яка проходить через два проміжні наближення. Отриманий розв'язок буде новим наближенням до розв'язку задачі (1). Ми пропонуємо модифікацію такого алгоритму, а саме

$$u_k = x_k - \left[H_k\right]^{-1} f'(x_k) , \tag{2}$$

$$v_k = x_k - \left[H_{k-1}\right]^{-1} f'(x_k) , \tag{3}$$

$$x_{k+1} = \arg\min_\gamma (f(u_k + \gamma(v_k - u_K)) , \; k = 0, 1, \ldots , \tag{4}$$

де

$$H_k = \begin{cases} f''(x_k) & \textit{при} \quad k \geq 0, \\ \alpha_0 I & \textit{при} \quad k = -1. \end{cases}$$

В алгоритмі (2)-(4) матимемо зміну лише у формулі (3), що дає підстави не використовувати одновимірну мінімізацію, яку виконуємо при градієнтному методі.

3. ОБҐРУНТУВАННЯ ЗБІЖНОСТІ

Теорема. Нехай:

1) $f(x) \in C^2(R^n)$ і для $x \in D = \{x : f(x) \le f(x_0)\}$

$$m\|h\|^2 \le (f''(x)h, h) \le M\|h\|^2,$$

де $0 < m \le M < \infty, \quad h \in R^n, \quad h \ne 0$;

2) для $x, y \in D$ $\quad f''(x)$ задовольняє умову Ліпшиця

$$\|f''(x) - f''(y)\| \le L\|x - y\|, \qquad 0 < L < \infty;$$

3) початкове наближення вибрано так, що виконується умова

$$q = C(f(x_0) - f(x_*)) < 1 \quad де \quad C = \frac{\mathrm{ML}^2}{2m^4}.$$

Тоді послідовність $\{x_k\}$визначена за (2)-(4) збігається до x_*- розв'язку задачі (1) і виконуються умови

$$f(x_k) - f(x_*) \le (\prod_{i=0}^{k-1} \mu_i^{2^{k-1-i}}) q^{2^k - 1}(f(x_0) - f(x_*)). \tag{5}$$

Доведення. Існування та єдиність розв'язку задачі (1) випливає з умови 1). До того ж

$$\|f''(x)^{-1}\| \le \frac{1}{m}.$$

Використовуючи розвинення $f(x)$ у ряд Тейлора в околі точки x_*, отримаємо

$$f(u_0) - f(x_*) = (f'(x_*), u_0 - x_*) + \frac{1}{2}(f''(x_* + \tau(u_0 - x_*))(u_0 - x_*), u_0 - x_*) \le$$

$$\le \frac{M}{2}\|u_0 - x_*\|^2.$$

З іншого боку,

$$u_0 - x_* = x_0 - x_* - f''(x_0)^{-1} f'(x_0) =$$

$$= f''(x_0)^{-1}(f''(x_0) - \int_0^1 f''(x_* + \tau(x_0 - x_*))d\tau)(x_0 - x_*).$$

Отже,

$$\|u_0 - x_*\| \le \frac{L}{2m}\|x_0 - x_*\|^2.$$

Отож,

$$f(u_0) - f(x_*) \le \frac{ML^2}{8m^2}\|x_0 - x_*\|^4.$$

Використавши умову 1), одержимо

$$f(u_0) - f(x_*) \le \frac{ML^2}{2m^4}(f(x_0) - f(x_*))^2 =$$

$$= C(f(x_0) - f(x_*)^2 = q(f(x_0) - f(x_*)).$$

ν_0 на першій ітерації обчислюємо за градієнтним методом, отже,

$$f(\nu_0) < f(x_0).$$

Використовуючи умову (4), можемо записати

$$f(x_1)-f(x_*)\le \mu_0(f(u_0)-f(x_*)),$$

де $\mu_0\in(0,1]$. Отже,

$$f(x_1)-f(x_*)\le \mu_0 q(f(x_0)-f(x_*)).$$

Аналогічно проводимо дослідження для к=1, тоді

$$f(u_1)-f(x_*)=(f'(x_*),u_1-x_*)+$$

$$+\frac{1}{2}(f''(x_*+\tau(u_1-x_*))(u_1-x_*),u_1-x_*)\le \frac{M}{2}\|u_1-x_*\|^2,$$

$$\|u_1-x_*\|\le \frac{L}{2m}\|x_1-x_*\|^2.$$

Отож,

$$f(u_1)-f(x_*)\le \frac{ML^2}{2m^4}(f(x_1)-f(x_*))^2=$$

$$=C\mu_0^2q^2(f(x_0)-f(x_*))^2=\mu_0^2q^3(f(x_0)-f(x_*)).$$

Якщо прийняти до уваги умову

$$(f''(x_0)^{-1}f'(x_1),f'(x_1))>0,$$

то провівши відповідні обчислення отримаємо $f(\nu_1)<f(x_1)$, тоді

$$f(x_2)-f(x_*)\le \mu_1(f(u_1)-f(x_*))\le \mu_1\mu_0^2q^3(f(x_0)-f(x_*))=$$

$$=(\prod_{i=0}^{1}\mu_i^{2^{1-i}})q^{2^2-1}(f(x_0)-f(x_*)).$$

Отже, оцінка (5) для $\kappa=2$ виконується.

Використаємо метод математичної індукції. Нехай оцінка (5) виконується для деякого $\kappa>2$, тоді для $\kappa+1$ матимемо

$$f(u_k)-f(x_*)\le \frac{ML^2}{2m^4}(f(x_k)-f(x_*))^2\le C(\prod_{i=0}^{k-1}\mu_i^{2^{k-i-1}})^2q^{2^{k+1}-2}(f(x_0)-f(x_*)^2=$$

$$=(\prod_{i=0}^{k-1}\mu_i^{2^{k-i}})q^{2^{k+1}-1}(f(x_0)-f(x_*)).$$

Остаточно отримаємо

$$f(x_{k+1})-f(x_*)\le \mu_k(\prod_{i=0}^{k-1}\mu_i^{2^{k-i}})q^{2^{k+1}-1}(f(x_0)-f(x_*))=$$

$$=(\prod_{i=0}^{k}\mu_i^{2^{k-i}})q^{2^{k+1}-1}(f(x_0)-f(x_*)).$$

Теорема доведена.

Зауважимо, що вибір початкового наближення, яке задовольняє умову 3) є доволі складною проблемою, на практиці доцільно використовувати алгоритм вигляду

$$u_k=x_k-\alpha_k[H_k]^{-1}f'(x_k)\quad \alpha_k\in(0,1],\tag{2'}$$

$$v_k=x_k-\beta_k[H_{k-1}]^{-1}f'(x_k)\quad \beta_k\in(0,\alpha_k],\tag{3'}$$

$$x_{k+1}=\arg\min_{\gamma}(f(u_k+\gamma(v_k-u_k))),\ k=0,1,\dots,\tag{4'}$$

де

$$H_k = \begin{cases} f''(x_k) & при\ k \geq 0, \\ \alpha_0 I & при\ k = -1. \end{cases}$$

4. АПРОБАЦІЯ МЕТОДУ

Ми розглянули низку прикладів і провели порівняння алгоритму (2')-(4') на ефективність у сенсі кількості обчислень з трикроковим методом Ньютона

$$u_k = x_k - \alpha_k \left[H_k\right]^{-1} f'(x_k), \quad \alpha_k \in (0,1\}, \tag{6}$$

$$v_k = x_k - \beta_k f'(x_k), \quad \beta_k > 0, \tag{7}$$

$$x_{k+1} = \arg\min_{\gamma}(f(u_k + \gamma(v_k - u_K)), \ k = 0, 1, \dots . \tag{8}$$

Обчислення проводили до виконання умови

$$\|x_{k+1} - x_k\| < 10^{-8}.$$

Наведемо результати тестування для деяких прикладів.

Приклад 1. Розширена функція Бейля

$$f(x) = \sum\nolimits_1^{n/2} [(1.5 - x_{2i-1}(1 - x_{2i}^{\ 3}))^2 + (2.25 - x_{2i-1}(1 - x_{2i}^2)^2 +$$
$$+ (2{,}625 - x_{2i-1}(1 - x_{2i}^3))^2];$$

$$1.\ x^0 = (0{,}5,,,,,,,,,0.5);\ 2.\ x^0 = (3.5{,}0.5{,}....{,}3.5{,}0.5);$$

$$x_* = (2.125,\ 0,...,2.125,\ 0), \qquad f(x_*) = 0.65625n/2\ .$$

Приклад 2. Розширена функція Розенброка

$$f(x) = \sum\nolimits_1^{n/2} [100(x_{2i} - x_{2i-1}^2)^2 + (1 - x_{2i-1})^2];$$

$$1.\ x^0 = (2.5,–0.5,...,2.5,–0.5);\ 2.\ (3{,}3,...,3{,}3);$$

$$x_* = (1{,}1,....,1{,}1); \qquad f(x_*) = 0\ .$$

Приклад 3. Функція Захарова

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 + (\sum_{i=1}^{n} \frac{i}{2} x_i^2)^2 + (\sum_{i=1}^{n} \frac{i}{2} x_i)^4;$$

$$1.\ x^0 = (-5{,}10,...,-5{,}10);\ 2.\ (-5{,}5,....,-5{,}5);$$

$$x_* = (0{,}0,...,0), \qquad f(x_*) = 0\ .$$

У таблиці подано кількість ітерацій (*к*) та кількість обчислень функції (*м*), які затрачено для отримання наближеного розв'язку наведених задач.

Затрати при побудові наближеного розв'язку

Ф-ції	Номер набли-ження	Метод (2')-(4')				Метод (6)-(8)			
		$n = 20$		$n = 50$		$n = 20$		$n = 50$	
		к	*м*	*к*	*м*	*к*	*м*	*к*	*м*
Бейля	1	7	1899	7	9573	7	1878	7	9486
	2	9	2662	9	12500	7	1895	7	9539
Розен-брока	1	18	5810	18	25478	16	5112	16	22644
	2	22	6845	22	31006	18	5832	18	25444
Заха-рова	1	5	1412	4	5446	2	815	3	4435
	2	6	1674	6	8374	2	796	2	4052

5. ВИСНОВКИ

Запропоновано нову модифікацію трикрокового методу Ньютона, проведено теоретичне дослідження. На підставі проведених обчислень виявлено переваги запропонованого методу не лише порівняно з методом Ньютона, а також з трикроковим методом Ньютона.

Список використаної літератури

1. *Бартіш М.* Трикрокові методи мінімізації функцій / М. Я. Бартіш, Н. П. Огородник // Математичні студії. – 2008. – Т. 28, № 1. – С. 108-112.
2. *Бейко І. В.* Задачі, методи та алгоритми оптимізації / І. В. Бейко, П. М. Зінько, О. Г. Наконечний. – К.: ВПЦ Київський університет. – 2012. – 800 с.
3. *Васильев Ф. П.* Методы оптимизации / Ф. П. Васильев. – М.: Факториал Пресс, 2002. – 824 с.
4. *Пшеничный Б. Н.* Численные методы в экстремальных задачах / Б. Н. Пшеничный, Ю. М. Данилин. – М.: Наука, 1975. – 320 с.
5. *Andrei N.* An unconstrained optimization test functions collection / Neculai Andrei // Advanced modelling and optimization. – 2008. – Vol. 10, No 1. – P. 147-161.

Стаття: надійшла до редколегії 19.02.2014
доопрацьована 19.03.2014
прийнята до друку 09.03.2014

ТРЕХШАГОВЫЙ АЛГОРИТМ С ПАМЯТЬЮ МИНИМИЗАЦИИ ФУНКЦИЙ

В. Бартиш

Львовский национальный университет имени Ивана Франко,
ул. Университетская, 1, Львов, 79000, e-mail: bartishv@gmail.com

Построен трехшаговый метод решения задач минимизации функций многих переменных, базирующийся на методе Ньютона. Исследована скорость сходимости данного метода. Проведены вычислительные эксперименты на различных типах функций. Сделано заключение о возможностях применения предложенного метода.

Ключевые слова: итерационный метод, трехшаговый метод, безусловная минимизация.

THREE-STEP ALGORITHM FOR FUNCTION MINIMIZATION

V. Bartish

van Franko National University of Lviv,
Universytetska Str., 1, Lviv, 79000, e-mail:bartishv@gmail.com

A new approach for constructing a three-step algorithms for minimization problems solving is proposed. This new algorithm is based on the Newton's method. We proved a theorem where convergence of the proposed method is justified and rate of convergence is established. Numerical results are presented.

Key words: iterative method, three-step method, unconstrained optimization.