ISSN 2078–5097. Вісн. Львів. ун-ту. Сер. прикл. матем. та інф. 2014. Вип. 22. С. 3–15
Visnyk of the Lviv University. Series Appl. Math. and Informatics. Issue 22. P. 3–15

О Б Ч И С Л Ю В А Л Ь Н А   М А Т Е М А Т И К А

УДК 519.21:519.61

МНОЖИНА ЕФЕКТИВНИХ ІТЕРАЦІЙНИХ ІНТЕРВАЛЬНИХ МЕТОДІВ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ СИСТЕМ ТРАНСЦЕНДЕТНИХ РІВНЯНЬ, ЩО НЕ ПОТРЕБУЮТЬ ОБЕРТАННЯ ІНТЕРВАЛЬНИХ МАТРИЦЬ

Н. Анісімова, П. Сеньо

*Львівський національний університет імені Івана Франка,
вул. Університетська, 1, Львів, 79000, e-mail: nataly.anisimova@gmail.com*

Запропоновано та досліджено параметризовану множину інтервальних методів без обертань інтервальних матриць для знаходження всіх дійсних розв'язків систем алгебричних і трансцендентних рівнянь у заданому початковому інтервалі. Отримано умови, при реалізації яких кожен метод з цієї множини методів збігається з високим порядком збіжності.

Проведені числові експерименти підтверджують отримані теоретичні висновки.

Ключові слова: система нелінійних рівнянь, ітераційні інтервальні методи, збіжність, локалізація.

1. ВСТУП

Нехай потрібно знайти всі дійсні розв'язки системи рівнянь

$$f(x) = 0 \tag{1}$$

у заданому інтервалі X_0, де $f:(D \subset R^l) \to (G \subset R^l)$.

В [2] було розглянуто параметризовану множину ітераційних інтервальних методів розв'язування систем алгебричних і трансцендентних рівнянь (1), при реалізації яких виконується обертання відповідних інтервальних матриць.

За аналогією з побудовою методу Кравчика Р. [6], на підставі методів з [2] побудовано таку параметризовану множину інтервальних ітераційних методів

$$U_n = \bar{x}_n - \overline{D_n} f(\bar{x}_n) + \left(I - \overline{D_n}\left(\alpha_1 f'(\bar{x}_n) + \alpha f'\left(\bar{x}_n + \beta\left(X_n - \bar{x}_n\right)\right)\right)\right)\left(X_n - \bar{x}_n\right), \tag{2}$$

$$X_{n+1} = U_n \bigcap X_n , \tag{3}$$

де $\bar{x}_n$ – вектор середніх точок інтервального вектора X_n,

$\overline{D_n} = \left(\overline{\alpha_1 f'(\bar{x}_n) + \alpha f'(\bar{x}_n + \beta(X_n - \bar{x}_n))}\right)^{-1}$ – приблизна інверсія центра матриці $\alpha_1 f'(\bar{x}_n) + \alpha f'(\bar{x}_n + \beta(X_n - \bar{x}_n)) \overset{df}{=} F'(X_n)$,

$\alpha \overset{df}{=} \alpha_2 + \alpha_3 + \ldots + \alpha_m$, β обирають так:

- якщо $m = 2$, то $\beta = \beta_2$;
- якщо $m = 3$, то $\beta = \beta_i$, де $\alpha_i \beta_i = \min\limits_j (\alpha_j \beta_j)$, $j = \overline{2,3}$;
- якщо $m = 4,5,\ldots$, то $\beta = \beta_{i_p}$, де

$$p = \begin{cases} (m+2)/2, \ m = 4,6,\ldots, \\ (m+1)/2, \ m = 5,7,\ldots, \end{cases}$$

а

$$\alpha_{i_2}\beta_{i_2} < \alpha_{i_3}\beta_{i_3} < \ldots < \alpha_{i_m}\beta_{i_m};$$

$\alpha_i, \beta_i, i = \overline{1,m}$ – обчислені за методикою з [5], $m = 2,3,\ldots$.

Зокрема, в [4] було запропоновано метод, який збігається з (2)-(3) при $i = 1$.

Мета праці – проаналізувати множини інтервальних ітераційних методів (2)-(3) на збіжність і порядок їхньої збіжності, розглянуто приклади.

2. ФОРМУЛЮВАННЯ ЗАДАЧІ

Нехай потрібно розробити та дослідити на збіжність інтервальний ітераційний метод без обертання інтервальних матриць для знаходження всіх дійсних розв'язків системи (1), що має вищий порядок збіжності, ніж метод Кравчика, і не потребує більшої кількості обчислень інтервального розширення похідної.

3. ОБҐРУНТУВАННЯ ЗБІЖНОСТІ

Для проведення досліджень методів (2)-(3) доведемо таку лему.

Лема 3.1. Нехай $f: D_1 \subset R^l \to G_1 \subset R$, існують всі другі частинні похідні кожної функції $f_i, i = \overline{1,l}$, точка $x^* = (x_1^*, x_2^*, \ldots, x_l^*)$ така, що $f(x^*) = 0$, $\bar{x} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_l)$, $X = (X_1, X_2, \ldots, X_l)$, $\bar{x}$ – вектор середніх точок вектора X. Якщо для кожних $\bar{x}_i$ таких, що $\bar{x}_i < x_i^*$ виконується $X_i \supseteq \left[\bar{x}_i, \bar{x}_i + \frac{1}{\beta}(x_i^* - \bar{x}_i)\right]$, а для кожних $\bar{x}_j$ таких, що $\bar{x}_j > x_j^*$ виконується $X_j \supseteq \left[\bar{x}_j + \frac{1}{\beta}(x_j^* - \bar{x}_j), \bar{x}_j\right]$, то $\forall i, j = \overline{1,l}$

$$\sum_{j=1}^{l}\sum_{i=1}^{l}\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}\left(\bar{x} + \theta_{i,j}(x^* - \bar{x})\right)(x_i^* - \bar{x}_i)(x_j^* - \bar{x}_j) \subset$$
$$\subset \sum_{j=1}^{l}\sum_{i=1}^{l}\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}\left(\bar{x} + \left[\theta_{i,j}\right]\beta_2(X - \bar{x})\right)(X - \bar{x}_i)(X - \bar{x}_j), \tag{4}$$

де $\bar{x} + \theta_{i,j}(x^* - \bar{x})$, $\bar{x} + \left[\theta_{i,j}\right]\beta_2(X - \bar{x})$ – вектори проміжних точок залишкових членів розвинення в ряд Тейлора до другої похідної включно в околі вектора x^* функцій $f(x)$ та $f'(x^* + \beta_2(X - x^*))$, відповідно, $\theta_{i,j} = (\theta_{i,j,1}, \theta_{i,j,2}, \ldots, \theta_{i,j,l})$, $\theta_{i,j,i} \in (0,1), i = \overline{1,l}$, $\left[\theta_{i,j}\right] = \left(\left[\theta_{i,j}\right]_1, \left[\theta_{i,j}\right]_2, \ldots, \left[\theta_{i,j}\right]_l\right)$, $\left[\theta_{i,j}\right]_i, i = \overline{1,l}$ – інтервал з проміжку $[0,1]$.

Доведення. Нехай $\xi \overset{df}{=} \bar{x} + \theta_{i,j}(x^* - \bar{x})$. Оскільки $f(x_1^*, x_2^*, \ldots, x_l^*) = 0$, то

$$0 = f(x_1^*, x_2^*, \ldots, x_l^*) = f(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_l) + \frac{\partial f}{\partial x_1}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_l)(x_1^* - \bar{x}_1) +$$
$$+ \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_l}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_l)(x_l^* - \bar{x}_l) + \sum_{i,j=1}^{l}\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}\left(\bar{x} + \theta_{i,j}(x^* - \bar{x})\right)(x_i^* - \bar{x}_i)(x_j^* - \bar{x}_j).$$

Позначимо $\Sigma = \sum_{i,j=1}^{l}\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}\left(\bar{x} + \theta_{i,j}(x^* - \bar{x})\right)(x_i^* - \bar{x}_i)(x_j^* - \bar{x}_j)$. Тоді послідовно отримаємо

$$f\left(x_1^*, x_2^*, ..., x_l^*\right) - f\left(\bar{x}_1, x_2^*, ..., x_l^*\right) + f\left(\bar{x}_1, \bar{x}_2, x_3^* ..., x_l^*\right) - ... - f\left(\bar{x}_1, \bar{x}_2, ..., \bar{x}_l\right) =$$
$$= \frac{\partial f}{\partial x_1}\left(\bar{x}_1, \bar{x}_2, ..., \bar{x}_l\right)\left(x_1^* - \bar{x}_1\right) + ... + \frac{\partial f}{\partial x_l}\left(\bar{x}_1, \bar{x}_2, ..., \bar{x}_l\right)\left(x_l^* - \bar{x}_l\right) + \Sigma.$$

$$\int_{\bar{x}_1}^{x_1^*} \frac{\partial f}{\partial x_1}\left(t_1, x_2^*, ..., x_l^*\right) dt_1 + \int_{\bar{x}_2}^{x_2^*} \frac{\partial f}{\partial x_2}\left(\bar{x}_1, t_2, x_3^*, ..., x_l^*\right) dt_2 + ... + \int_{\bar{x}_l}^{x_l^*} \frac{\partial f}{\partial x_l}\left(\bar{x}_1, \bar{x}_2, ..., t_l\right) dt_l =$$
$$= \frac{\partial f}{\partial x_1}\left(\bar{x}_1, \bar{x}_2, ..., \bar{x}_l\right)\left(x_1^* - \bar{x}_1\right) + ... + \frac{\partial f}{\partial x_l}\left(\bar{x}_1, \bar{x}_2, ..., \bar{x}_l\right)\left(x_l^* - \bar{x}_l\right) + \Sigma.$$

До лівої частини рівності додамо та віднімемо всі можливі часткові похідні вигляду

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}\left(\bar{x}_1, \bar{x}_2, ..., \bar{x}_k, x_{k+1}^* ..., x_l^*\right)\left(x_i^* - x_i^0\right),\ i = \overline{1, l-1}, k = \overline{i+1, l-1}.$$

Тоді

$$\int_{\bar{x}_1}^{x_1^*} \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\left(t_1, x_2^*, ..., x_l^*\right) - \frac{\partial f}{\partial x_1}\left(\bar{x}_1, x_2^*, ..., x_l^*\right) \right) dt_1 + ... + \int_{\bar{x}_l}^{x_l^*} \left(\frac{\partial f}{\partial x_l}\left(\bar{x}_1, ..., t_l\right) - \frac{\partial f}{\partial x_l}\left(\bar{x}_1, ..., \bar{x}_l\right) \right) dt_l +$$
$$+ \sum_{i=1}^{l-1} \sum_{k=i+1}^{l} \int_{\bar{x}_k}^{x_k^*} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_k}\left(\bar{x}_1, \bar{x}_2, ..., \bar{x}_{k-1}, z_{i.k}, x_{k+1}^*, ..., x_l^*\right)\left(x_i^* - \bar{x}_i\right) \right) dz_{i.k} = \Sigma.$$

Зробимо заміну змінних $t_i = \bar{x}_i + \beta_i\left(w_i - \bar{x}_i\right)$. Тоді

$$dt_i = \beta_i dw_i,\ \ w_i^2 = \bar{x}_i + \frac{1}{\beta i}\left(x_i^* - \bar{x}_i\right),\quad w_1 = \bar{x}_1.$$

Отже, (4) набуде вигляду

$$\sum_{i=1}^{l} \beta_i \int_{\bar{x}_i}^{\bar{x}_i + \frac{1}{\beta_i}\left(x_i^* - \bar{x}_i\right)} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\left(\bar{x}_1, ..., \bar{x}_i + \beta_i\left(w_i - \bar{x}_i\right), x_{i+1}^*, ..., x_l^*\right) - \frac{\partial f}{\partial x_i}\left(\bar{x}_1, ..., \bar{x}_i, x_{i+1}^*, ..., x_l^*\right) \right) dw_i +$$
$$+ \sum_{i=1}^{l-1} \left(x_i^* - \bar{x}_i\right) \int_{\bar{x}_k}^{x_k^*} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_k}\left(\bar{x}_1, \bar{x}_2, ..., \bar{x}_{k-1}, z_{i.k}, x_{k+1}^*, ..., x_l^*\right) \right) dz_{i.k} = \Sigma.$$

Згідно з теоремою про середнє значення

$$\sum_{i=1}^{l} \beta_i \int_{\bar{x}_i}^{\bar{x}_i + \frac{1}{\beta_i}\left(x_i^* - \bar{x}_i\right)} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\left(\bar{x}_1, ..., \bar{x}_i + \beta_i\left(w_i - \bar{x}_i\right), x_{i+1}^*, ..., x_l^*\right) - \right.$$
$$\left. - \frac{\partial f}{\partial x_i}\left(\bar{x}_1, ..., \bar{x}_i, x_{i+1}^*, ..., x_l^*\right) \right) dw + \sum_{i=1}^{l-1} \left(x_i^* - \bar{x}_i\right) \int_{\bar{x}_k}^{x_k^*} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_k}\left(\bar{x}_1, ..., \bar{x}_{k-1}, z_{i.k}, x_{k+1}^*, ..., x_l^*\right) \right) dz_{i.k} =$$
$$= \sum_{i=1}^{l} \beta_i \int_{\bar{x}_i}^{\bar{x}_i + \frac{1}{\beta_i}\left(x_i^* - \bar{x}_i\right)} \left(\beta_i \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}\left(\bar{x}_1, \bar{x}_2, ..., \bar{x}_{i-1}, \bar{x}_i + \beta_i\left[\bar{\theta}_i\right]\left(w_i - \bar{x}_i\right), x_{i+1}^*, ..., x_l^*\right)\left(w_i - \bar{x}_i\right) \right) +$$
$$+ \sum_{i=1}^{l-1} \left(x_i^* - \bar{x}_i\right) \int_{\bar{x}_k}^{x_k^*} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_k}\left(\bar{x}_1, \bar{x}_2, ..., \bar{x}_{k-1}, z_{i.k}, x_{k+1}^*, ..., x_l^*\right) \right) dz_{i.k},$$

де $\left[\bar{\theta}_i\right]$ – сукупність точок з проміжку $\left[0,1\right]$ для кожної точки інтервалу X_i,

$$w_i \in \left[\bar{x}_i,\ \bar{x}_i + \frac{1}{\beta_i}\left(x_i^* - \bar{x}_i\right) \right].$$

За теоремою про середнє для інтеграла

$$\sum_{i=1}^{l} \beta_i \int_{\bar{x}_i}^{\bar{x}_i+\frac{1}{\beta_i}\left(x_i^*-\bar{x}_i\right)} \left(\beta_i \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}\left(\bar{x}_1, \bar{x}_2, ..., \bar{x}_{i-1}, \bar{x}_i + \beta_i \left[\bar{\theta}_i\right]\left(w_i - \bar{x}_i\right), x_{i+1}^*, ..., x_l^*\right)\left(w_i - \bar{x}_i\right) \right) +$$

$$+\sum_{i=1}^{l-1} \left(x_i^* - \bar{x}_i\right) \int_{\bar{x}_k}^{x_k^*} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_k}\left(\bar{x}_1, \bar{x}_2, ..., \bar{x}_{k-1}, z_{i.k}, x_{k+1}^*, ..., x_l^*\right) \right) dz_{i.k} =$$

$$= \sum_{i=1}^{l} \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}\left(\bar{x}_1, \bar{x}_2, ..., \bar{x}_{i-1}, \bar{x}_i + \beta_i \left[\bar{\theta}_i\right]\left(\lambda_i - \bar{x}_i\right), x_{i+1}^*, ..., x_l^*\right)\left(x_i^* - \bar{x}_i\right)^2 +$$

$$+\sum_{i=1}^{l-1} \sum_{k=i+1}^{l} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_k}\left(\bar{x}_1, \bar{x}_2, ..., \bar{x}_{k-1}, \eta_{i,k}, x_{k+1}^*, ..., x_l^*\right)\left(x_i^* - \bar{x}_i\right)\left(x_k^* - \bar{x}_k\right),$$

де $\lambda_i \in X_i = \left[\bar{x}_i, \bar{x}_i + \frac{1}{\beta_i}\left(x_i^* - \bar{x}_i\right) \right]$, $i = \overline{1, l}$, $\eta_{i,k} \in \left[\bar{x}_k, x_k^*\right]$, $k = \overline{i+1, l-1}$. Отже,

$$\Sigma = \sum_{i=1}^{l} \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}\left(\bar{x}_1, ..., \bar{x}_{i-1}, \bar{x}_i + \beta_i \left[\bar{\theta}_i\right]\left(\lambda_i - \bar{x}_i\right), x_{i+1}^*, ..., x_l^*\right)\left(x_i^* - \bar{x}_i\right)^2 +$$

$$+\sum_{i=1}^{l-1} \sum_{k=i+1}^{l} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_k}\left(\bar{x}_1, \bar{x}_2, ..., \bar{x}_{k-1}, \eta_{i,k}, x_{k+1}^*, ..., x_l^*\right)\left(x_i^* - \bar{x}_i\right)\left(x_k^* - \bar{x}_k\right) \subset$$

$$\subset \sum_{i,j=1}^{l} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}\left(\bar{x}_1 + \left[\bar{\theta}_{i,j}\right]_1 \beta_2\left(X_1 - \bar{x}_1\right), ..., \bar{x}_l + \left[\bar{\theta}_{i,j}\right]_l \beta_2\left(X_l - \bar{x}_l\right)\right)\left(X_i - \bar{x}_i\right)\left(X_k - \bar{x}_j\right).$$

Отож, (4) доведено. Випадок $X_i \supseteq \left[\bar{x}_i + \frac{1}{\beta_i}\left(x_i^* - \bar{x}_i\right), \bar{x}_i \right]$ доводимо аналогічно. Лему доведено.

Достатні умови збіжності та оцінка порядку збіжності запропонованого методу (2)-(3) наведені в наступній теоремі.

Теорема 3.1. Нехай існують всі треті частинні похідні кожної функції $f_i(x)$, $i = \overline{1, l}$, $x = \left(x_1, x_2, ..., x_l\right) \in D$ лівої частини системи (1), $\left(x_1^*, x_2^*, ..., x_l^*\right) \in X_0$ – розв'язок системи рівнянь $f\left(x_1, x_2, ..., x_l\right) = 0$, існує інтервальна обернена матриця $\left(F'\left(X_0\right)\right)^{-1}$, умови леми виконуються. Тоді послідовність інтервалів $\left\{X_k\right\}_{k=0}^{\infty}$, обчислена за формулами (2)-(3), набуває таких властивостей:

1) $x^* \in X_k$, $k = 0, 1, 2, ...$;
2) якщо для функції $f(x)$ виконується умова $\left\| I - \overline{D_0} F'\left(X_0\right) \right\| < 1$, де $\overline{D_0} = \left(\overline{F'\left(X_0\right)}\right)^{-1}$, тоді $\lim\limits_{k \to \infty} X_k = \left[x^*, x^*\right]$;
3) якщо $f(x)$ задовольняє умову $\omega\left(f'(X)\right) \le \gamma\left(\omega\left(X_k\right)\right)$ для $\forall X \subset X_k$, де $|\gamma| < 1$, і крім того $\left|\overline{D_0}\right| < 1$, то порядок збіжності ітераційного методу (2)-(3) обумовлюють такі співвідношення:

- при $m = 2, 4, 5, \ldots$: $\omega(X_{k+1}) \le C(\omega(X_k))^2$, де $C = \frac{1}{2}\left|\overline{D_0}\right|$,
- при $m = 3$: $\omega(X_{k+1}) \le C(\omega(X_k))^3$, де $C = \frac{1}{2}\left|\overline{D_0}\right|\left|f'''(X_0)\right|$.

Доведення. 1. Доведення проведемо методом математичної індукції. Згідно з умовою теореми $x^* \in X_0$. Доведемо, що $x^* \in X_1$.

Справді, з розвинення в ряд Тейлора отримаємо

$$0 = f(x^*) = f(\bar{x}_0) + f'(\bar{x}_0)(x^* - \bar{x}_0) + \frac{1}{2!} f''(\xi_0)(x^* - \bar{x}_0)^2, \tag{5}$$

де $\xi_0 \in X_0$.

Відомо, що інтервальне розширення $f(X)$ кожної функції $f(x)$ та її об’єднане інтервальне розширення $\overline{f}(X)$ пов’язані таким співвідношенням:

$$f(X) = \overline{f}(X) + A(X),$$

де інтервал $A(X)$ містить 0, тобто $A(X) \supset 0$, і такий, що $\lim\limits_{\omega(X)\to 0} \omega(A(X)) = 0$. Тому

$$f'(\bar{x}_0 + \beta(X_0 - \bar{x}_0)) = \overline{f}'(\bar{x}_0 + \beta(X_0 - \bar{x}_0)) + A(\bar{x}_0 + \beta(X_0 - \bar{x}_0)).$$

Якщо $X_0 \to \bar{x}_0$, то $\bar{x}_0 + \beta(X_0 - \bar{x}_0) \to \bar{x}_0$. Тому

$$\lim_{\omega(X_0)\to 0} \omega(A(\bar{x}_0 + \beta(X_0 - \bar{x}_0))) = \omega(A(\bar{x}_0)) = 0.$$

Згідно з теоремою про середнє

$$(\alpha_1 f'(\bar{x}_0) + \alpha f'(\bar{x}_0 + \beta(X_0 - \bar{x}_0)))(x^* - \bar{x}_0) = \left(f'(\bar{x}_0) + \frac{1}{2} f''(\overline{\xi_0})(X_0 - \bar{x}_0) + A(X_0) \right)(x^* - \bar{x}_0),$$

де $\overline{\xi_0} = \bar{x}_0 + [\theta_0]\beta(X_0 - \bar{x}_0)$, $[\theta_0]$ – інтервал з $(0, 1)$. Згрупуємо доданки в (5) так:

$$\begin{aligned} 0 &= f(\bar{x}_0) + f'(\bar{x}_0)(x^* - \bar{x}_0) + \frac{1}{2!} f''(\xi_0)(x^* - \bar{x}_0)^2 = f(\bar{x}_0) + \\ &+ f'(\bar{x}_0)(x^* - \bar{x}_0) + \frac{1}{2!} f''(\xi_0)(x^* - \bar{x}_0)^2 + \overline{F'(X_0)}(x^* - \bar{x}_0) - \overline{F'(X_0)}(x^* - \bar{x}_0), \end{aligned} \tag{6}$$

де $\overline{F'(X_0)} = \overline{(\alpha_1 f'(\bar{x}_0) + \alpha f'(\bar{x}_0 + \beta(X_0 - \bar{x}_0)))}$. Тоді з (6) одержуємо

$$\overline{F'(X_0)}(x^* - \bar{x}_0) = -f(\bar{x}_0) - f'(\bar{x}_0)(x^* - \bar{x}_0) - \frac{1}{2!} f''(\xi_0)(x^* - \bar{x}_0)^2 + \overline{F'(X_0)}(x^* - \bar{x}_0).$$

Помножимо зліва обидві сторони цієї рівності на матрицю $\overline{D_0} = \left(\overline{F'(X_0)}\right)^{-1}$. Тоді

$$\begin{aligned} x^* &= \bar{x}_0 - \left(\overline{F'(X_k)}\right)^{-1} f(\bar{x}_0) - \left(\overline{F'(X_0)}\right)^{-1} \left(f'(\bar{x}_0)(x^* - \bar{x}_0) + \frac{1}{2!} f''(\xi_0)(x^* - \bar{x}_0)^2 \right) + (x^* - \bar{x}_0) = \\ &= \bar{x}_0 - \overline{D_0} f(\bar{x}_0) - \overline{D_0}\left(f'(\bar{x}_0)(x^* - \bar{x}_0) + \frac{1}{2!} f''(\xi_0)(x^* - \bar{x}_0)^2 \right) + (x^* - \bar{x}_0). \end{aligned}$$

Згідно з лемою

$$x^* = \bar{x}_0 - \overline{D_0} f(\bar{x}_0) - \overline{D_0}\left(f'(\bar{x}_0)(x^* - \bar{x}_0) + \frac{1}{2!} f''(\xi_0)(x^* - \bar{x}_0)^2 \right) + (x^* - \bar{x}_0) \subset$$

$$\subset \bar{x}_0 - \overline{D_0} f(\bar{x}_0) - \overline{D_0}\left(f'(\bar{x}_0)(x^* - \bar{x}_0) + \frac{1}{2!} f''(\overline{\xi_0})(x^* - \bar{x}_0)^2 + A(X_0) \right) + (x^* - \bar{x}_0).$$

Тому

$$x^* = \bar{x}_0 - \overline{D_0} f(\bar{x}_0) - \overline{D_0}\left(f'(\bar{x}_0)(x^* - \bar{x}_0) + \frac{1}{2!} f''(\overline{\xi_0})(x^* - \bar{x}_0)^2 + A(X_0) \right) + (x^* - \bar{x}_0) \subset$$

$$\subset \bar{x}_0 - \overline{D_0} f(\bar{x}_0) - \overline{D_0}\left((\alpha_1 f'(\bar{x}_0) + \alpha f'(\bar{x}_0 + \beta(X_0 - \bar{x}_0)))(x^* - \bar{x}_0)\right) + (X_0 - \bar{x}_0) =$$

$$= \bar{x}_0 - \overline{D_0} f(\bar{x}_0) - \left(I - \overline{D_0} F'(X_0)\right)(X_0 - \bar{x}_0) = U_1 .$$

Отже, $x^* \in X_{k+1}$.

Нехай $x^* \in X_k$, $k = 0,1,\ldots$. Доведемо, що $x^* \in X_{k+1}$. Згідно з розвиненням у ряд Тейлора

$$0 = f(x^*) = f(\bar{x}_k) + f'(\bar{x}_k)(x^* - \bar{x}_k) + \frac{1}{2!} f''(\xi_k)(x^* - \bar{x}_k)^2 , \tag{5*}$$

де $\xi_k \in X_k$. Крім того,

$$f'(\bar{x}_k + \beta_2(X_k - \bar{x}_k)) = \bar{f}'(\bar{x}_k + \beta_2(X_k - \bar{x}_k)) + A(\bar{x}_k + \beta_2(X_k - \bar{x}_k)) .$$

Якщо $X_k \to \bar{x}_k$, то $\bar{x}_k + \beta_2(X_k - \bar{x}_k) \to \bar{x}_k$. Тому

$$\lim_{\omega(X)\to 0} \omega(A(\bar{x}_k + \beta_2(X_k - \bar{x}_k))) = \omega(A(\bar{x}_k)) = 0 .$$

Згідно з теоремою про середнє

$$(\alpha_1 f'(\bar{x}_k) + \alpha f'(\bar{x}_k + \beta(X_k - \bar{x}_k)))(x^* - \bar{x}_k) = \left(f'(\bar{x}_k) + \frac{1}{2} f''(\overline{\xi_k})(X_k - \bar{x}_k) + A(X_k) \right)(x^* - \bar{x}_k),$$

де

$$\overline{\xi_k} = \bar{x}_k + [\theta_k]\beta_2(X_k - \bar{x}_k), \ [\theta_k]$$

– інтервал з $(0, 1)$. Згрупуємо доданки в (5*) так:

$$\begin{aligned} 0 = f(\bar{x}_k) + f'(\bar{x}_k)(x^* - \bar{x}_k) + \frac{1}{2!} f''(\xi_k)(x^* - \bar{x}_k)^2 = f(\bar{x}_k) + \\ + f'(\bar{x}_k)(x^* - \bar{x}_k) + \frac{1}{2!} f''(\xi_k)(x^* - \bar{x}_k)^2 + \overline{F'(X_k)}(x^* - \bar{x}_k) - \overline{F'(X_k)}(x^* - \bar{x}_k), \end{aligned} \tag{6*}$$

де

$$F'(X_k) = \left(\overline{\alpha_1 f'(\bar{x}_k) + \alpha_2 f'(\bar{x}_k + \beta_2(X_k - \bar{x}_k))}\right).$$

Тоді з (6*) матимемо

$$\overline{F'(X_k)}(x^* - \bar{x}_k) = -f(\bar{x}_k) - f'(\bar{x}_k)(x^* - \bar{x}_k) - \frac{1}{2!} f''(\xi_k)(x^* - \bar{x}_k)^2 + \overline{F'(X_k)}(x^* - \bar{x}_k) .$$

Помножимо зліва обидві сторони цієї рівності на матрицю $\overline{D_k} = \left(\overline{F'(X_k)}\right)^{-1}$. Тоді

$$x^* = \bar{x}_k - \overline{D_k} f(\bar{x}_k) - \overline{D_k}\left(f'(\bar{x}_k)(x^* - \bar{x}_k) + \frac{1}{2!} f''(\xi_k)(x^* - \bar{x}_k)^2 \right) + (x^* - \bar{x}_k).$$

Згідно з лемою

$$x^* = \bar{x}_k - \overline{D_k} f(\bar{x}_k) - \overline{D_k}\left(f'(\bar{x}_k)(x^* - \bar{x}_k) + \frac{1}{2!} f''(\xi_k)(x^* - \bar{x}_k)^2 \right) + (x^* - \bar{x}_k) \subset$$

$$\subset \bar{x}_k - \overline{D_k} f(\bar{x}_k) - \overline{D_k}\left(f'(\bar{x}_k)(x^* - \bar{x}_k) + \frac{1}{2!} f''(\overline{\xi_k})(x^* - \bar{x}_k)^2 + A(X_k) \right) + (x^* - \bar{x}_k).$$

Тому

$$x^* = \bar{x}_k - \overline{D_k} f(\bar{x}_k) - \overline{D_k}\left(f'(\bar{x}_k)(x^* - \bar{x}_k) + \frac{1}{2!} f''(\overline{\xi_k})(x^* - \bar{x}_k)^2 + A(X_k) \right) + (x^* - \bar{x}_k) \subset$$

$$= \bar{x}_k - \overline{D_k} f(\bar{x}_k) - \left(I - \overline{D_k} F'(X_k)\right)(X_k - \bar{x}_k) = U_{k+1}.$$

Отже, $x^* \in X_{k+1}$. Отож, перший пункт теореми доведено.

2. Доведемо далі, що локалізуюча послідовність $\{X_k\}_{k=0}^{\infty}$ монотонна за включенням, тобто що

$$X_0 \supseteq X_1 \supseteq X_2 \supseteq \ldots .$$

Використаємо метод математичної індукції. Згідно з доведеним п.1, $x^* \in X_1$, отже,

$$x^* \in X_1 = X_0 \cap \left(\bar{x}_0 - \overline{D_0} f(\bar{x}_0) + \left(I - \overline{D_0}(\alpha_1 f'(\bar{x}_0) + \alpha f'(\bar{x}_0 + \beta(X_0 - \bar{x}_0)))\right)(X_0 - \bar{x}_0)\right).$$

Звідси $X_0 \supseteq X_1$.

Припустимо, що $X_{k-1} \supseteq X_k$ і доведемо, що $X_k \supseteq X_{k+1}$.

$$x^* \in X_{k+1} = X_k \cap \left(\bar{x}_k - \overline{D_k} f(\bar{x}_k) + \left(I - \overline{D_k}(\alpha_1 f'(\bar{x}_k) + \alpha f'(\bar{x}_k + \beta(X_k - \bar{x}_k)))\right)(X_k - \bar{x}_k)\right).$$

Звідси $X_k \supseteq X_{k+1}$. Отже,

$$X_0 \supseteq X_1 \supseteq X_2 \supseteq \ldots \supseteq X_{k-1} \supseteq X_k \supseteq \ldots .$$

З побудови методу випливає, що

$$\omega(X_{k+1}) \le \omega\left(U_k \bigcap X_k\right) \le \omega(U_k). \tag{7}$$

Далі отримаємо

$$\omega(U_k) = \omega\left(\left(I - \overline{D_k} F'(\bar{x}_k)\right)(X_k - \bar{x}_k)\right). \tag{8}$$

Тут $\overline{D_k} = \left(\overline{F'(X_k)}\right)^{-1}$.

$$\omega\left(\left(I - \overline{D_k} F'(X_k)\right)(X_k - \bar{x}_k)\right) \le \left\| I - \overline{D_k} F'(X_k) \right\| \omega(X_k - \bar{x}_k) \le \left\| I - \overline{D_k} F'(X_0) \right\| \omega(X_k). \tag{9}$$

Враховуючи твердження теореми 3.1 з [5], одержуємо

$$\left\| I - \overline{D_k} F'(X_0) \right\| \le \left\| I - \overline{D_0} F'(X_0) \right\|,$$

оскільки $X_0 \supseteq X_1 \supseteq \ldots \supseteq X_{k-1} \supseteq X_k \supseteq \ldots$ та $D_0 \supseteq D_1 \supseteq \ldots \supseteq D_{k-1} \supseteq D_k \supseteq \ldots$.

Із співвідношень (7)-(9) та пункту 1 теореми отримаємо $\omega(X_{k+1}) \le \gamma\omega(X_k)$.

$$\omega(X_{k+1}) \le \gamma\omega(X_k), \text{ де } \gamma = \left\| I - \overline{D_0} F'(X_0) \right\| < 1.$$

Звідси випливає, що $\omega(X_k) \xrightarrow[k \to \infty]{} 0$. Згідно з пунктом 1 одержуємо

$$x^* \in X_{k+1} = U_k \bigcap X_k,$$

тому

$$\lim_{k \to \infty} X_k = x^*.$$

3. Доведемо, що при $m=2$ та при $m=4,5,...$ $\omega(X_{k+1})\le C\omega(X_k)^2$. З побудови методу випливає

$$U_k=\bar{x}_k-\overline{D_k}f(\bar{x}_k)+\left(I-\overline{D_k}\left(\alpha_1 f'(\bar{x}_k)+\alpha_2 f'(\bar{x}_k+\beta_2(X_k-\bar{x}_k))\right)\right)(X_k-\bar{x}_k).$$

Тоді для оцінки ширини інтервалу X_{k+1} отримаємо

$$\begin{aligned}
&\omega(X_{k+1})=\omega(X_k\cap U_k)\le\omega(U_k)\le\\
&\le\omega\left(\bar{x}_k-\overline{D_k}f(\bar{x}_k)+\left(I-\overline{D_k}\left(\alpha_1 f'(\bar{x}_k)+\alpha f'(\bar{x}_k+\beta(X_k-\bar{x}_k))\right)\right)(X_k-\bar{x}_k)\right)=\\
&=\omega\left(\left(I-\overline{D_k}\left(\alpha_1 f'(\bar{x}_k)+\alpha f'(\bar{x}_k+\beta(X_k-\bar{x}_k))\right)\right)(X_k-\bar{x}_k)\right)\le\\
&\le\left|\left(I-\overline{D_k}\left(\alpha_1 f'(\bar{x}_k)+\alpha f'(\bar{x}_k+\beta(X_k-\bar{x}_k))\right)\right)\right|\omega(X_k-\bar{x}_k)\le\\
&\le\left|\overline{D_k}\right|\left|\overline{D_k}^{-1}-\left(\alpha_1 f'(\bar{x}_k)+\alpha f'(\bar{x}_k+\beta(X_k-\bar{x}_k))\right)\right|\omega(X_k)\le\\
&\le\left|\overline{D_k}\right|\left|\left(\alpha_1 f'(\bar{x}_k)+\alpha f'(\bar{x}_k+\beta(X_k-\bar{x}_k))\right)-\left(\alpha_1 f'(\bar{x}_k)+\alpha f'(\bar{x}_k+\beta(X_k-\bar{x}_k))\right)\right|\omega(X_k)\le\\
&\le\left|\overline{D_0}\right|\omega\left(\alpha f'(\bar{x}_k+\beta(X_k-\bar{x}_k))\right)\omega(X_k)\le\\
&\le\left|\overline{D_0}\right|\alpha\omega(\bar{x}_k+\beta(X_k-\bar{x}_k))\omega(X_k)\le\left|\overline{D_0}\right|\alpha\beta\omega(X_k)\omega(X_k)\le\frac{1}{2}\left|\overline{D_0}\right|\omega(X_k)^2.
\end{aligned}$$

Отже, $\omega(X_{k+1})\le C(\omega(X_k))^2$, де $C=\frac{1}{2}\left|\overline{D_0}\right|$.

Доведемо тепер, що при $m=3$ $\omega(X_{k+1})\le C\omega(X_k)^3$. Згідно з теоремою про середнє

$$\overline{f'}(\bar{x}_k+\beta(X_k-\bar{x}_k))=f'(\bar{x}_k)+B(\bar{x}_k+\beta(X_k-\bar{x}_k),\bar{x}_k)(X_k-\bar{x}_k),$$

де $B(\bar{x}_k+\beta(X_k-\bar{x}_k),\bar{x}_k)=\left(\overline{f_1'}(\bar{x}_k+\beta[\theta_2]_1(X_k-\bar{x}_k)),\ ...,\overline{f_l'}(\bar{x}_k+\beta[\theta_2]_l(X_k-\bar{x}_k))\right)^T$.

Нехай $\overline{f''}(\bar{x}_k+\beta[\theta_2](X_k-\bar{x}_k))\overset{def}{=}\left(\overline{f_1'}(\bar{x}_k+\beta[\theta_2](X_k-\bar{x}_k)),...,\overline{f_l'}(\bar{x}_k+\beta[\theta_2](X_k-\bar{x}_k))\right)^T$,
де $[\theta_2]$ таке, що $B(\bar{x}_k+\beta(X_k-\bar{x}_k),\bar{x}_k)\subseteq\overline{f''}(\bar{x}_k+\beta[\theta_2](X_k-\bar{x}_k))$. Тоді

$$\overline{f'}(\bar{x}_k+\beta(X_k-\bar{x}_k))\subset f'(\bar{x}_k)+\overline{f''}(\bar{x}_k+\beta[\theta_2](X_k-\bar{x}_k))(X_k-\bar{x}_k).$$

З побудови методу одержуємо

$$\begin{aligned}
U_k=\bar{x}_k-C_kf(\bar{x}_k)+(I-C_k(\alpha_1 f'(\bar{x}_k)+\alpha_2 f'(\bar{x}_k+\beta_3(X_k-\bar{x}_k))+\\
+\alpha_3 f'(\bar{x}_k+\beta_3(X_k-\bar{x}_k))))(X_k-\bar{x}_k).
\end{aligned}$$

Тут

$$\begin{aligned}
\alpha_2 f'(\bar{x}_k+\beta_3(X_k-\bar{x}_k))=\alpha_2\overline{f'}(\bar{x}_k+\beta_3(X_k-\bar{x}_k))+A(X_k),\\
\alpha_3 f'(\bar{x}_k+\beta_3(X_k-\bar{x}_k))=\alpha_3\overline{f'}(\bar{x}_k+\beta_3(X_k-\bar{x}_k))+B(X_k).
\end{aligned}$$

Оскільки $\beta_3\subset\beta_2$, то $\overline{f'}(\bar{x}_k+\beta_3(X_k-\bar{x}_k))\subset\overline{f'}(\bar{x}_k+\beta_2(X_k-\bar{x}_k))$, а отже, можемо вважати, що

$$\alpha_2\overline{f'}(\bar{x}_k+\beta_2(X_k-\bar{x}_k))=\alpha_3\overline{f'}(\bar{x}_k+\beta_3(X_k-\bar{x}_k))+A(X_k)+B(X_k).$$

Звідси

$$\alpha f'(\bar{x}_k+\beta(X_k-\bar{x}_k))=\alpha\overline{f'}(\bar{x}_k+\beta(X_k-\bar{x}_k)).$$

Тому

$$U_k=\bar{x}_k-\overline{D_k}f(\bar{x}_k)+\left(I-\overline{D_k}\left(\alpha_1 f'(\bar{x}_k)+\alpha\overline{f'}(\bar{x}_k+\beta(X_k-\bar{x}_k))\right)\right)(X_k-\bar{x}_k)=$$
$$=\bar{x}_k-\overline{D_k}f(\bar{x}_k)+\left(I-\overline{D_k}\left(f'(\bar{x}_k)+\alpha\beta\overline{f''}(\bar{x}_k+\beta_2[\theta_2](X_k-\bar{x}_k))(X_k-\bar{x}_k)\right)\right)(X_k-\bar{x}_k).$$

Для оцінки ширини інтервалу отримаємо

$$\omega(X_k)=\omega\left(X_k\bigcap U_k\right)\le\omega(U_k)\le\omega\Big(\bar{x}_k-\overline{D_k}f(\bar{x}_k)+\Big(I-\overline{D_k}\big(f'(\bar{x}_k)+$$
$$+\alpha\beta\overline{f''}(\bar{x}_k+\beta_2[\theta_2](X_k-\bar{x}_k))(X_k-\bar{x}_k)\big)\Big)(X_k-\bar{x}_k)\Big)\le\omega\Big(\bar{x}_k-\overline{D_k}\left(f(x^*)-f(\bar{x}_k)\right)+$$
$$+\left(I-\overline{D_k}\left(f'(\bar{x}_k)+\alpha\beta\overline{f''}(\bar{x}_k+\beta_2[\theta_2](X_k-\bar{x}_k))(X_k-\bar{x}_k)\right)\right)(X_k-\bar{x}_k)\Big)=$$
$$=\omega\left(\bar{x}_k-\overline{D_k}\left(f'(\bar{x}_k)(x^*-\bar{x}_k)+\frac{1}{2!}f''(\bar{x}_k+\theta_2(x^*-\bar{x}_k))(x^*-\bar{x}_k)^2\right)+\right.$$
$$\left.+\left(I-\overline{D_k}\left(f'(\bar{x}_k)+\frac{1}{2}\overline{f''}(\bar{x}_k+\beta[\theta_2](X_k-\bar{x}_k))(X_k-\bar{x}_k)\right)\right)(X_k-\bar{x}_k)\right)=$$
$$=\omega\left(\left(-I+\overline{D_k}\left(f'(\bar{x}_k)+\frac{1}{2!}f''(\bar{x}_k+\theta_2(x^*-\bar{x}_k))(x^*-\bar{x}_k)\right)\right)(x^*-\bar{x}_k)+\right.$$
$$\left.+\left(I-\overline{D_k}\left(f'(\bar{x}_k)+\frac{1}{2}\overline{f''}(\bar{x}_k+\beta[\theta_2](X_k-\bar{x}_k))(X_k-\bar{x}_k)\right)\right)(X_k-\bar{x}_k)\right).$$

Оскільки матриця

$$\left(-I+\overline{D_k}\left(f'(\bar{x}_k)+\frac{1}{2!}f''(\bar{x}_k+\theta_2(x^*-\bar{x}_k))(x^*-\bar{x}_k)\right)\right)$$

є числовою, а матриця

$$\left(I-\overline{D_k}\left(f'(\bar{x}_k)+\frac{1}{2}\overline{f''}(\bar{x}_k+\beta[\theta_2](X_k-\bar{x}_k))(X_k-\bar{x}_k)\right)\right)$$

– симетрична, то, скориставшись властивістю дистрибутивності, запишемо

$$\omega\left(\left(-I+\overline{D_k}\left(f'(\bar{x}_k)+\frac{1}{2!}f''(\bar{x}_k+\theta_2(x^*-\bar{x}_k))(x^*-\bar{x}_k)\right)\right)(x^*-\bar{x}_k)+\right.$$
$$\left.+\left(I-\overline{D_k}\left(f'(\bar{x}_k)+\frac{1}{2}\overline{f''}(\bar{x}_k+\beta[\theta_2](X_k-\bar{x}_k))(X_k-\bar{x}_k)\right)\right)(X_k-\bar{x}_k)\right)\le$$
$$\le\omega\left(\frac{1}{2!}\overline{D_k}\left(f''(\bar{x}_k+\theta_2(x^*-\bar{x}_k))-\overline{f''}(\bar{x}_k+\beta[\theta_2](X_k-\bar{x}_k))\right)(X_k-\bar{x}_k)(X_k-\bar{x}_k)\right)=$$
$$=\frac{1}{2!}\omega\left|\overline{D_k}\right|\omega\left(\left(f''(\bar{x}_k+\theta_2(x^*-\bar{x}_k))-\overline{f''}(\bar{x}_k+\beta[\theta_2](X_k-\bar{x}_k))\right)(X_k-\bar{x}_k)^2\right)\le$$
$$\le\frac{1}{2!}\left|\overline{D_0}\right|\left|\theta_2-\beta[\theta_2]\right|\left|f'''(X_k)\right|\omega(X_k-\bar{x}_k)(\omega(X_k))^2\le$$
$$\le\frac{1}{2!}\left|\overline{D_0}\right|\left|f'''(X_k)\right|(\omega(X_k))^3\le\frac{1}{2!}\left|\overline{D_0}\right|\left\|f'''(X_0)\right\|(\omega(X_k))^3.$$

Отже,

$$\omega(X_{k+1})\le C(\omega(X_k))^3,$$

де $C = \frac{1}{2!}\left|\overline{D_0}\right|\left\|f'''(X_0)\right\|$. Теорему доведено.

Як бачимо, метод найефективніший при $m = 3$. На всьому інтервалі X_0 умови теореми, очевидно, можуть і не виконуватися. Однак метод (2)-(3) буде збіжним і на всьому інтервалі X_0 та знаходитиме всі корені системи (1), якщо забезпечити одночасну локалізацію всіх її дійсних коренів, які належать інтервалу X_0. Тоді не треба перевіряти виконання умов теореми, а при їхньому виконанні корені вже локалізовані і далі цей метод збігається в кожному локалізуючому інтервалі до відповідного кореня системи.

Локалізацію коренів виконуємо поділом відповідних інтервалів. Умовою неподілу кожного інтервалу є те, що ширина поточного інтервалу зменшилась більше, ніж вдвічі від початкового, та те, що всі обернені матриці методу невироджені. Якщо внаслідок виконання кроків (2)-(3) інтервал не звужується, то можливо на цьому інтервалі міститься більше одного кореня, тоді варто застосовувати метод дихотомії початкового інтервалу.

Зауважимо, що у випадку, коли X_0 не містить розв'язку системи (1), метод (2)-(3) за декілька кроків повертає порожній інтервал.

4. РЕЗУЛЬТАТИ ЧИСЛОВИХ ЕКСПЕРИМЕНТІВ

Апробацію методу проводили розв'язуванням багатьох алгебричних і трансцендентних систем рівнянь. Обчислення виконано з точністю $\varepsilon = 10^{-6}$.

Під час проведення числових експериментів тестові системи рівнянь розв'язували чотирма методами:

1. Метод Кравчика
$$U_n = \bar{x}_n - \left(\overline{F(X_n)}\right)^{-1} f(\bar{x}_n) + \left(I - \left(\overline{F(X_n)}\right)^{-1} F'(X_n)\right)(X_n - \bar{x}_n),$$
$$X_{n+1} = X_n \bigcap U_n,$$
2. Метод (2)-(3) при $m = 2$
$$U_n = \bar{x}_n - \overline{D}_n f(\bar{x}_n) + \left(I - \overline{D}_n(\alpha_1 f'(\bar{x}_n) + \alpha f'(\bar{x}_n + \beta(X_n - \bar{x}_n)))\right)(X_n - \bar{x}_n),$$
$$X_{n+1} = X_n \bigcap U_n.$$
$$\alpha_1 = 0.25,\ \alpha = 0.75,\ \beta = 2/3,$$
3. Метод (2)-(3) при $m = 3$
$$U_n = \bar{x}_n - \overline{D}_n f(\bar{x}_n) + \left(I - \overline{D}_n(\alpha_1 f'(\bar{x}_n) + \alpha f'(\bar{x}_n + \beta(X_n - \bar{x}_n)))\right)(X_n - \bar{x}_n),$$
$$X_{n+1} = X_n \bigcap U_n.$$
$$\alpha_1 = 0.25,\ \alpha = 0.75,\ \beta = 2/3,$$
4. Метод (2)-(3) при $m = 4$
$$U_n = \bar{x}_n - \overline{D}_n f(\bar{x}_n) + \left(I - \overline{D}_n(\alpha_1 f'(\bar{x}_n) + \alpha f'(\bar{x}_n + \beta(X_n - \bar{x}_n)))\right)(X_n - \bar{x}_n),$$
$$X_{n+1} = X_n \bigcap U_n.$$
$$\alpha_1 = 1/9,\ \alpha = 8/9,\ \beta_3 = (6 - \sqrt{6})/10.$$

Система 1

$$\begin{cases} 7x^2y - 9xy^2 + 48x^2 - 3y^2 + 7xy - 53x + 13y + 44 = 0\,, \\ 21x^3 - 8xy^2 + 72x^2y - 13y^3 + 10x^2 - 80y^2 + 17xy - 19y + 144 = 0\,. \end{cases}$$

При розв'язуванні цієї системи в квадраті $[-0.85, 0.0]\,\mathrm{x}\,[-5.625, -5.0]]$ було отримано такі результати:

Таблиця 1

Порівняння методів 1-4 при розв'язуванні системи 1

Метод	Кравчика	Метод (2)-(4), $m=2$	Метод (2)-(4), $m=3$	Метод (2)-(4), $m=4$
К-сть ітерацій	7	5	4	5
Ширина розв'язку	3.29E-7 x 4.23E-6	1.17E-8 x 1.49E-7	3.73E-7 x 4.63E-6	7.33E-8 x 9.31E-7

Система 2

$$\begin{cases} 5^{2x+y}\sin\pi\dfrac{7x-y-2}{x^2+y^2+2} + \log_2\left((x+y+1)^2+7\right) = 0\,, \\ 2^{x+y}\cos\pi(x-y+1) + \sqrt{7(2x+y)^2+9} + 12 = 0. \end{cases}$$

При розв'язуванні цієї системи в квадраті $[-3.3, -3.0]\,\mathrm{x}\,[7.025, 7.04]$ було отримано такі результати:

Таблиця 2

Порівняння методів 1-4 при розв'язуванні системи 2

Метод	Кравчика	Метод (2)-(4), $m=2$	Метод (2)-(4), $m=3$	Метод (2)-(4), $m=4$
К-сть ітерацій	9	6	5	6
Ширина розв'язку	6.87E-8 x 1.55E-7	7.10E-9 x 1.599E-8	1.299E-8 x 2.93E-8	1.61E-7 x 3.63E-7

5. ВИСНОВКИ

З проведеного дослідження випливає, що параметризована система інтервальних ітераційних методів (2)-(3) дає змогу знаходити всі дійсні корені системи трансцендентних рівнянь на будь-якому фіксованому вектор інтервалі, що задовольняє умови теореми. При виконанні умов наведеної теореми ці методи в кожному локалізуючому інтервалі кожного кореня системи збігаються до відповідного кореня з порядком збіжності $\omega(X_{k+1}) \le C(\omega(X_k))^3$ при $m = 3$, та $\omega(X_{k+1}) \le C(\omega(X_k))^2$ при $m = 2, 4, 5, 6, \ldots$. Метод (2)-(3) обчислює лише одне інтервальне розширення похідної на кожному кроці методу. Зауважимо, що при реалізації методів (2)-(3) у процесі локалізації не треба перевіряти виконання умов наведеної теореми.

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. *Алефельд Г.* Введение в интервальные вычисления: монографія / Г. Алефельд, Ю. Херцбергер. – М.: Мир, 1987. – 357 с.
2. *Анісімова Н.* Множина ефективних короткокрокових інтервальних ітераційних методів розв'язування систем трансцендетних рівнянь / Н. Анісімова, П. Сеньо // Вісн. Львів. уні-ту. Сер. прикладна математика та інформатика. – 2012. – Вип. 18. – С. 5-20.
3. *Калмыков С.А.* Методы интервального анализа: монографія / С. А. Калмыков, Ю. И. Шокин, З. Х. Юлдашев. – Новосибирск: Наука, Сибирское отделение, 1986. – 222 с.
4. *Сеньо П.* Інтервальний ітераційний метод розв'язування нелінійних систем рівнянь, який не містить інверсій інтервальних матриць / П. Сеньо, П. Венгерський // Вісн. Львів. уні-ту. Сер. механіко-математична. – 1991. – Вип. 35. – С. 18-24.
5. *Сеньо П.* Інтервальні методі розв'язування деяких класів детермінованих задач // Вісн. Львів. уні-ту. Сер. прикладна математика та інформатика. – 2003. – Вип. 7. – С. 86-96.
6. *Шарый С.П.* Конечномерный интервальный анализ: монографія / С. П. Шарый. – Новосибирск: XYZ, 2013. – 605 с.

Стаття: надійшла до редколегії 03.03.2014
доопрацьована 02.04.2014
прийнята до друку 09.04.2014

МНОЖЕСТВО ЭФФЕКТИВНЫХ ИТЕРАЦИОННЫХ ИНТЕРВАЛЬНЫХ МЕТОДОВ РЕШЕНИЯ СИСТЕМ ТРАНСЦЕНДЕНТНЫХ УРАВНЕНИЙ, КОТОРОЕ НЕ ТРЕБУЕТ ОБРАЩЕНИЯ ИНТЕРВАЛЬНЫХ МАТРИЦ

Н. Анисимова, П. Сеньо

Львовский национальный университет имени Ивана Франко,
ул. Университетская, 1, Львов, 79000, e-mail: nataly.anisimova@gmail.com

Предложено и исследовано множество интервальных эффективных методов без обращения интервальных матриц для нахождения всех действительных решений систем алгебраических и трансцендентных уравнений в заданном начальном интервале. Получено условия, при реализации которых каждый метод из данного множества сходится с высоким порядком сходимости.

Проведенные численные эксперименты подтверждают полученные теоретические выводы.

Ключевые слова: системы нелинейных уравнений, интервальные итерационные методы, сходимость, локализация.

PARAMETERIZED SET OF ITERATION INTERVAL METHODS FOR SOLVING SYSTEMS OF TRANSCENDENTAL EQUATIONS THAT DOES NOT REQUIRE MATRIX INVERSION

N. Anisimova, P. Senyo

Ivan Franko National University of Lviv,
Universytetska Str., 1, Lviv, 79000, e-mail: nataly.anisimova@gmail.com

A new parameterized set of effective interval methods that don't use matrix inversion for finding all real solutions of system of algebraic and transcendental equations, where initial interval is given, is presented and investigated in this paper. Conditions, providing the high rate of convergence of the method are shown.

The results of numerical experiments confirm the received theoretical conclusions.

Key words: systems of nonlinear equations, interval iteration methods, convergence, localization.