ISSN 2078–5097. Вісн. Львів. ун-ту. Сер. прикл. матем. та інф. 2015. Вип. 23. С. 73–81
Visnyk of the Lviv University. Series Appl. Math. and Informatics. Issue 23. P. 73–81

УДК 519.6

ЗАСТОСУВАННЯ МЕТОДУ КАНТОРОВИЧА ДЛЯ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНОГО РІВНЯННЯ В ЧАСТИННИХ ПОХІДНИХ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКУ

М. Жук[1], Адріана Кіндибалюк[2]

[1]Львівський національний університет імені Івана Франка,
вул. Університетська, 1, Львів, 79000
[2]Київський національний університет будівництва та архітектури,
Повітрофлотський проспект, 31, Київ, 03037

Досліджено теоретичні аспекти застосовності методу Канторовича для розв'язування лінійної двовимірної крайової задачі з диференціальним рівнянням четвертого порядку зі змінними коефіцієнтами. Згідно з цим методом розв'язування вихідного диференціального рівняння зводиться до розв'язування відповідної цьому рівнянню лінійної системи звичайних диференціальних рівнянь четвертого порядку – системи методу Канторовича. Введено поняття узагальненого розв'язку системи методу Канторовича, обґрунтовано його існування та єдиність. Визначено збіжність методу Канторовича, отримано оцінку швидкості збіжності. Подано рекомендації щодо вибору систем координатних функцій.

Ключові слова: двовимірна крайова задача, диференціальне рівняння зі змінними коефіцієнтами, метод Канторовича, наближений розв'язок, оцінка швидкості збіжності.

1. ВСТУП

Метод Канторовича успішно застосовують до розв'язування задач математичної фізики. Цей метод займає проміжне становище між точним розв'язком задачі та методами Рітца і Бубнова – Гальоркіна. Метод Бубнова – Гальоркіна, як і метод Рітца, наближено зводить задачу інтегрування диференціального рівняння до розв'язування відповідної вихідному рівнянню системи алгебричних або трансцендентних рівнянь. Метод Канторовича застосовують для розв'язування диференціальних рівнянь у частинних похідних. Він наближено зводить розв'язування вихідного диференціального рівняння до розв'язування відповідної йому системи звичайних диференціальних рівнянь, у зв'язку з чим його ще називають методом зведення до системи звичайних диференціальних рівнянь. Перевага методу Канторовича полягає в тому, що частину виразу, який визначає розв'язок, вибираємо апріорно, а частину функцій визначаємо відповідно до особливостей задачі.

Метод зведення до системи звичайних диференціальних рівнянь застосував Л.В. Канторович (1933) для розв'язування задачі Діріхле для диференціального рівняння з частинними похідними еліптичного типу другого порядку на підставі варіаційного принципу розв'язування задач математичної фізики. У наступному для побудови системи звичайних диференціальних рівнянь Канторович використовує ідею методу Бубнова–Гальоркіна. Це дало підстави використовувати метод Канторовича для задач не пов'язаних із варіаційними принципами і значно полегшувало побудову відповідної до вихідного диференціального рівняння в частинних похідних системи звичайних диференціальних рівнянь, а також використовувати цей метод для розв'язування рівнянь гіперболічного та параболічного типу. Зауважимо, що ідеї методу трапляються і в більш ранніх дослідженнях [5].

Метод Канторовича отримав розвиток в інших працях [5]. Сьогодні його успішно застосовують для розв'язування практичних задач механіки [7, 8].

2. ФОРМУЛЮВАННЯ ЗАДАЧІ

Розглянемо лінійну двовимірну крайову задачу, яка полягає у відшуканні розв'язку диференціального рівняння четвертого порядку зі змінними коефіцієнтами вигляду

$$Lw \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(p(x,y)\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right) + 2\frac{\partial^2}{\partial x \partial y}\left(q(x,y)\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\right) + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(r(x,y)\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) + , \qquad (1)$$
$$+ s(x,y)w = f(x,y), \qquad (x,y) \in S$$

за крайових умов

$$w = 0, \ (x,y) \in \Gamma, \qquad (2)$$

$$\left.\frac{\partial w}{\partial x}\right|_{x=a} = 0, \ \left.\frac{\partial w}{\partial x}\right|_{x=b} = 0, \left.\frac{\partial w}{\partial y}\right|_{y=g(x)} = 0, \left.\frac{\partial w}{\partial y}\right|_{y=h(x)} = 0, \ (x,y) \in \Gamma, \qquad (3)$$

де $w(x,y)$ – шукана функція; Γ – межа прямокутної області $S = \{a \le x \le b, \ g(x) \le y \le h(x)\}$.

За область визначення $\Omega(L)$ оператора L приймаємо множину чотири рази неперервно диференційованих функцій $w(x,y)$ у замкненій області S, які задовольняють крайові умови (2–3).

Щодо заданих функцій у рівнянні (1) припускаємо, що $f(x,y)$ належить гільбертовому простору $H = L_2(S)$ з нормою $\|w\|^2 = \iint\limits_S w^2 dx\,dy$. Функції $p(x,y)$, $q(x,y)$, $r(x,y)$ – додатні обмежені, тобто $0 < \alpha_1 \le p(x,y) \le \beta_1$, $0 < \alpha_2 \le q(x,y) \le \beta_2$, $0 < \alpha_3 \le r(x,y) \le \beta_3$, а функція $s(x,y)$ – обмежена, $\alpha_4 \le s(x,y) \le \beta_4$.

Крім того, припускаємо, що константи α_1, α_2, α_3, α_4, γ такі, що постійні μ, η, які визначені такими співвідношеннями:

$$\mu = \begin{cases} \alpha, & \alpha_4 \ge 0, \\ \alpha + \alpha_4/\gamma^2, & \alpha_4 \le 0, \end{cases} \qquad \eta = \begin{cases} \beta + \beta_4/\gamma^2, & \beta_4 \ge 0, \\ \beta, & \beta_4 \le 0, \end{cases} \qquad (4)$$

де $\alpha = \min\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$, $\beta = \max\{\beta_1, \beta_2, \beta_3\}$, $\gamma = \mathrm{const} > 0$ (залежить від області S), забезпечують виконання умов $\mu > 0$, $\eta > 0$.

Для подальших досліджень властивостей математичної моделі (1–3) введемо допоміжний бігармонічний оператор

$$Bw \equiv \Delta^2 w = \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4},$$

для якого $\Omega(B) = \Omega(L)$, $\Delta = \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial y^2}$ – оператор Лапласа в декартовій системі координат.

Як відомо [6], на лінеалі $\Omega(B)$ оператор B додатно визначений, тобто для довільних $w, v \in \Omega(B)$ виконуються такі умови:

$$(Bw, v) = (w, Bv),\ (Bw, w) \geq \gamma^2 \|w\|^2, \tag{5}$$

де константа γ визначається нерівностями Фрідріхса, застосованими до функції та її перших похідних [6].

Позначимо через H_0 енергетичний простір оператора B, тобто замикання $\Omega(B)$ в метриці

$$[w, v]_0 = (Bw, v) = \iint_S \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right] dxdy .$$

Зазначимо, оскільки $\iint_S \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) dxdy = \iint_S \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} dxdy$, то за умов задачі

$$[w, v]_0 = \iint_S \Delta w \Delta v \, dxdy .$$

У цьому разі отримаємо

$$|w|_0^2 = [w, w]_0 = \iint_S (\Delta w)^2 dx\, dy .$$

Зауважимо, що функції з енергетичного простору оператора H_0 мають другі узагальнені похідні підсумовані з квадратом і задовольняють крайові умови (2), (3), тобто крайові умови (2), (3) головні. Крім того, зазначимо, що $H_0 = \overset{0}{W}{}_2^2$. На підставі (5) внаслідок граничного переходу для довільного $w \in H_0$ випливає нерівність

$$\|w\| \leq \frac{1}{\gamma} |w|_0 . \tag{6}$$

Для довільних $w, v \in H_0$ формально введемо таку білінійну форму:

$$L(w, v) \equiv \iint_S \left\{ p(x, y) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) + 2q(x, y) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \right) + \right.$$
$$\left. + r(x, y) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \left(\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) + s(x, y)\, wv \right\} dxdy .$$

Тоді для довільного $w \in H_0$, аналогічно як у [2], можна довести виконання нерівності

$$\mu |w|_0^2 \leq L(w, w) \leq \eta |w|_0^2 . \tag{7}$$

Узагальненим розв'язком задачі (1–3) називається функція $w(x, y)$ з простору H_0, для якої за довільної функції $v(x, y) \in H_0$ виконується така тотожність:

$$L(w, v) \equiv \iint_S \left\{ p(x, y) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + 2q(x, y) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + r(x, y) \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + s(x, y)\, wv \right\} dxdy =$$
$$= \iint_S f(x, y) v(x, y)\, dxdy . \tag{8}$$

Відомо [1], що виконання умов (7) забезпечують існування та єдиність узагальненого розв'язку задачі (1-3) [1].

Якщо $v(x,y)$ довільна двічі неперервно диференційована в замкнутій області S функція, яка задовольняє крайові умови (2–3), а $w(x,y)$ чотири рази неперевно диференційована в замкнутій області S, яка задовольняє крайові умови (2–3), а всі коефіцієнти і відповідно права частина у рівнянні (1) достатньо гладкі, то співвідношення (1–3) і (8) будуть еквівалентні: із (1–3) випливає (8), а із (8) випливає (1–3) [4].

3. ПОБУДОВА НАБЛИЖЕНОГО РОЗВ'ЯЗКУ МЕТОДОМ КАНТОРОВИЧА

До двовимірної крайової задачі (1–3) застосуємо метод Канторовича. Згідно з цим методом наближений розв'язок задачі, яку розглядаємо, шукаємо у вигляді

$$w_n(x,y)=\sum_{k=1}^{n} c_k(x)\varphi_k(x,y), \tag{9}$$

де попередньо вибрані лінійно незалежні в проміжку $[g(x),h(x)]$ функції $\varphi_k(x,y)$ задовольняють умови

$$\varphi_k(x,y)\big|_{y=g(x)}=0,\ \varphi_k(x,y)\big|_{y=h(x)}=0,\ k=1,2,3,\ldots \tag{10}$$

$$\left.\frac{\partial\varphi_k(x,y)}{\partial y}\right|_{y=g(x)}=0,\ \left.\frac{\partial\varphi_k(x,y)}{\partial y}\right|_{y=h(x)}=0,\ k=1,2,3,\ldots. \tag{11}$$

Функції $\varphi_k(x,y)$ вибираємо так, щоб система функцій $\{\chi_l(x)\varphi_k(x,y)\}\in H_0$ була повною системою лінійно незалежних функцій у просторі H_0, а система функцій $\{\chi_l(x)\}$ задовольняла такі умови:

$$\chi_l(x)=0 \text{ при } x=a;\ x=b,\ l=1,2,3,\ldots, \tag{12}$$

$$c_k'(x)=0 \text{ при } x=a;\ x=b,\ l=1,2,3,\ldots. \tag{13}$$

Попередньо з'ясовано, що за умов (7) задача (1–3) має єдиний узагальнений розв'язок, який у припущенні достатньої гладкості всіх функцій буде її класичним розв'язком.

Припустимо, що всі функції достатньо гладкі.

Шукані функції $c_k(x),\ k=1,2,\ldots,n$ у формулі (9) визначаємо з умови мінімуму функціонала енергії

$$I(w_n)=\iint_D\left\{p(x,y)\left(\frac{\partial^2 w_n}{\partial x^2}\right)^2+2q(x,y)\left(\frac{\partial^2 w_n}{\partial x\partial y}\right)^2+r(x,y)\left(\frac{\partial^2 w_n}{\partial y^2}\right)^2\right. \tag{14}$$

$$\left.+s(x,y)w_n^2-2f(x,y)w_n\right\}dxdy=$$

$$=\iint_D\left\{p\left[\sum_{k=1}^{n}\left(c_k''\varphi_k+2c_k'\frac{\partial\varphi_k}{\partial x}+c_k\frac{\partial^2\varphi_k}{\partial x^2}\right)\right]^2+2q\left[\sum_{k=1}^{n}\left(c_k'\frac{\partial\varphi_k}{\partial y}+c_k\frac{\partial^2\varphi_k}{\partial x\partial y}\right)\right]^2+\right.$$

$$\left.+r\left[\sum_{k=1}^{n}\left(c_k\frac{\partial^2\varphi_k}{\partial y^2}\right)\right]^2+s\left[\sum_{k=1}^{n}\left(c_k\varphi_k\right)\right]^2-2f\sum_{k=1}^{n}\left(c_k\varphi_k\right)\right\}dxdy=\int_a^b F\left(x,c_k,c_k',c_k''\right)dx,$$

де

$$F\left(x, c_k, c_k', c_k''\right)=\int\limits_{g(x)}^{h(x)}\left\{p\left[\sum_{k=1}^{n}\left(c_k''\varphi_k+2c_k'\frac{\partial\varphi_k}{\partial x}+c_k\frac{\partial^2\varphi_k}{\partial x^2}\right)\right]^2+2q\left[\sum_{k=1}^{n}\left(c_k'\frac{\partial\varphi_k}{\partial y}+c_k\frac{\partial^2\varphi_k}{\partial x\partial y}\right)\right]^2+\right.$$

$$\left.+r\left[\sum_{k=1}^{n}\left(c_k\frac{\partial^2\varphi_k}{\partial y^2}\right)\right]^2+s\left[\sum_{k=1}^{n}\left(c_k\varphi_k\right)\right]^2-2f\sum_{k=1}^{n}\left(c_k\varphi_k\right)\right\}dy.$$

Отже, задача звелася до мінімуму інтеграла (14), а відповідна система диференціальних рівнянь набула вигляду

$$F_{c_k}-\frac{d}{dx}F_{c_k'}+\frac{d^2}{dx^2}F_{c_k''}=0,\ k=1,2,\ldots,n. \tag{15}$$

Звідси, після скорочення на 2, отримуємо

$$\int\limits_{g(x)}^{h(x)}\left[p\frac{\partial^2 w_n}{\partial x^2}\frac{\partial^2\varphi_k}{\partial x^2}+2q\frac{\partial^2 w_n}{\partial x\partial y}\frac{\partial^2\varphi_k}{\partial x\partial y}+r\frac{\partial^2 w_n}{\partial y^2}\frac{\partial^2\varphi_k}{\partial y^2}+sw_n\varphi_k-f\varphi_k\right]dy-$$

$$-\frac{d}{dx}\left(\int\limits_{g(x)}^{h(x)}\left[2p\frac{\partial^2 w_n}{\partial x^2}\frac{\partial\varphi_k}{\partial x}+2q\frac{\partial^2 w_n}{\partial x\partial y}\frac{\partial\varphi_k}{\partial y}\right]dy\right)+ \tag{16}$$

$$+\frac{d^2}{dx^2}\left(\int\limits_{g(x)}^{h(x)}\left[2p\frac{\partial^2 w_n}{\partial x^2}\varphi_k\right]dy\right)=0.$$

Обчислимо другий доданок співвідношення (16)

$$\frac{d}{dx}\left(\int\limits_{g(x)}^{h(x)}\left[2p\frac{\partial^2 w_n}{\partial x^2}\frac{\partial\varphi_k}{\partial x}+2q\frac{\partial^2 w_n}{\partial x\partial y}\frac{\partial\varphi_k}{\partial y}\right]dy\right)=$$

$$=\int\limits_{g(x)}^{h(x)}\frac{d}{dx}\left[2p\frac{\partial^2 w_n}{\partial x^2}\frac{\partial\varphi_k}{\partial x}+2q\frac{\partial^2 w_n}{\partial x\partial y}\frac{\partial\varphi_k}{\partial y}\right]dy+$$

$$+\left[\left(2p\frac{\partial^2 w_n}{\partial x^2}\frac{\partial\varphi_k}{\partial x}+2q\frac{\partial^2 w_n}{\partial x\partial y}\frac{\partial\varphi_k}{\partial y}\right)h'(x)\right]\Bigg|_{y=h(x)}- \tag{17}$$

$$-\left[\left(2p\frac{\partial^2 w_n}{\partial x^2}\frac{\partial\varphi_k}{\partial x}+2q\frac{\partial^2 w_n}{\partial x\partial y}\frac{\partial\varphi_k}{\partial y}\right)g'(x)\right]\Bigg|_{y=g(x)}.$$

З умов (10-11) випливає $\left.\frac{\partial\varphi_k}{\partial x}\right|_{y=g(x)}=0$, $\left.\frac{\partial\varphi_k}{\partial x}\right|_{y=h(x)}=0$, тому

$$\frac{d}{dx}\left(\int\limits_{g(x)}^{h(x)}\left[2p\frac{\partial^2 w_n}{\partial x^2}\frac{\partial\varphi_k}{\partial x}+2q\frac{\partial^2 w_n}{\partial x\partial y}\frac{\partial\varphi_k}{\partial y}\right]dy\right)=$$

$$=\int\limits_{g(x)}^{h(x)}\left[\frac{d}{dx}\left(2p\frac{\partial^2 w_n}{\partial x^2}\frac{\partial\varphi_k}{\partial x}+2q\frac{\partial^2 w_n}{\partial x\partial y}\frac{\partial\varphi_k}{\partial y}\right)\right]dy=$$

$$= \int_{g(x)}^{h(x)} \left[2\frac{\partial p}{\partial x}\frac{\partial^2 w_n}{\partial x^2}\frac{\partial \varphi_k}{\partial x} + 2p\frac{\partial^3 w_n}{\partial x^3}\frac{\partial \varphi_k}{\partial x} + 2p\frac{\partial^2 w_n}{\partial x^2}\frac{\partial^2 \varphi_k}{\partial x^2} \right] dy +$$
$$+ \int_{g(x)}^{h(x)} \left[2\frac{\partial q}{\partial x}\frac{\partial^2 w_n}{\partial x \partial y}\frac{\partial \varphi_k}{\partial y} + 2q\frac{\partial^3 w_n}{\partial x^2 \partial y}\frac{\partial \varphi_k}{\partial y} + 2q\frac{\partial^2 w_n}{\partial x \partial y}\frac{\partial^2 \varphi_k}{\partial x \partial y} \right] dy. \qquad (18)$$

Для третього доданка співвідношення (18), врахувавши умови (11), (17)

$$\frac{d^2}{dx^2}\left(\int_{g(x)}^{h(x)} \left[p\frac{\partial^2 w_n}{\partial x^2}\varphi_k \right] dy \right) = \frac{d}{dx}\left\{ \left(\int_{g(x)}^{h(x)} \frac{d}{dx}\left[p\frac{\partial^2 w_n}{\partial x^2}\varphi_k \right] dy \right) + \right.$$
$$\left. + \left[\left(p\frac{\partial^2 w_n}{\partial x^2}\varphi_k \right) h'(x) \right]\Bigg|_{y=h(x)} - \left[\left(p\frac{\partial^2 w_n}{\partial x^2}\varphi_k \right) g'(x) \right]\Bigg|_{y=g(x)} \right\} =$$
$$= \int_{g(x)}^{h(x)} \frac{d^2}{dx^2}\left[2p\frac{\partial^2 w_n}{\partial x^2}\varphi_k \right] dy + \frac{d}{dx}\left[\left(p\frac{\partial^2 w_n}{\partial x^2}\varphi_k \right) h'(x) \right]\Bigg|_{y=h(x)} -$$
$$- \frac{d}{dx}\left[\left(p\frac{\partial^2 w_n}{\partial x^2}\varphi_k \right) g'(x) \right]\Bigg|_{y=g(x)} = \left(\int_{g(x)}^{h(x)} \frac{d^2}{dx^2}\left[p\frac{\partial^2 w_n}{\partial x^2}\varphi_k \right] dy \right) =$$
$$= \int_{g(x)}^{h(x)} \left[\frac{\partial^2 p}{\partial x^2}\frac{\partial^2 w_n}{\partial x^2}\varphi_k + 2\frac{\partial p}{\partial x}\frac{\partial^3 w_n}{\partial x^3}\varphi_k + 2\frac{\partial p}{\partial x}\frac{\partial^2 w_n}{\partial x^2}\frac{\partial \varphi_k}{\partial x} + \right.$$
$$\left. p\frac{\partial^4 w_n}{\partial x^4}\varphi_k + 2p\frac{\partial^3 w_n}{\partial x^3}\frac{\partial \varphi_k}{\partial x} + p\frac{\partial^2 w_n}{\partial x^2}\frac{\partial^2 \varphi_k}{\partial x^2} \right] dy.$$

Підставивши результати цих перетворень у співвідношення (16), отримуємо

$$\int_{g(x)}^{h(x)} \left[r\frac{\partial^2 w_n}{\partial y^2}\frac{\partial^2 \varphi_k}{\partial y^2} - 2\frac{\partial q}{\partial x}\frac{\partial^2 w_n}{\partial x \partial y}\frac{\partial \varphi_k}{\partial y} - 2q\frac{\partial^3 w_n}{\partial x^2 \partial y}\frac{\partial \varphi_k}{\partial y} + \frac{\partial^2 p}{\partial x^2}\frac{\partial^2 w_n}{\partial x^2}\varphi_k + \right.$$
$$\left. + 2\frac{\partial p}{\partial x}\frac{\partial^3 w_n}{\partial x^3}\varphi_k + p\frac{\partial^4 w_n}{\partial x^4}\varphi_k + s w_n \varphi_k - f\varphi_k \right] dy = 0.$$

Інтегруючи по частинах перші три доданки, враховуючи крайові умови (10-11), можемо записати

$$\int_{g(x)}^{h(x)} \left[\frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(r\frac{\partial^2 w_n}{\partial y^2} \right) + 2\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial q}{\partial x}\frac{\partial^2 w_n}{\partial x \partial y} \right) + 2\frac{\partial}{\partial y}\left(q\frac{\partial^3 w_n}{\partial x^2 \partial y} \right) + \frac{\partial^2 p}{\partial x^2}\frac{\partial^2 w_n}{\partial x^2} + \right.$$
$$\left. + 2\frac{\partial p}{\partial x}\frac{\partial^3 w_n}{\partial x^3} + p\frac{\partial^4 w_n}{\partial x^4} + s w_n - f \right] \varphi_k dy = 0,$$

або

$$\int_{g(x)}^{h(x)} \left[\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(p\frac{\partial^2 w_n}{\partial x^2} \right) + 2\frac{\partial^2}{\partial x \partial y}\left(q\frac{\partial^2 w_n}{\partial x \partial y} \right) + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(r\frac{\partial^2 w_n}{\partial y^2} \right) + s w_n - f \right] \varphi_k(x,y) dy = 0,$$
$$k = 1,2,\ldots,n.$$

тобто, отримуємо систему вигляду аналогічну за формою до рівняння методу Гальоркіна

$$\int\limits_{g(x)}^{h(x)} (Lw_n - f)\varphi_k(x,y)dy = 0, k = 1,2,\ldots,n. \tag{19}$$

Отриману систему звичайних диференціальних рівнянь четвертого порядку стосовно шуканих функцій $c_k(x)$, $k = 1,2,\ldots,n$ розв'язуємо за крайових умов

$$c_k(x)\big|_{x=a} = 0, c_k(x)\big|_{x=b} = 0, \ , k = 1,2,\ldots,n \tag{20}$$

$$c'_k(x)\big|_{x=a} = 0, c'_k(x)\big|_{x=b} = 0, \ , k = 1,2,\ldots,n. \tag{21}$$

Уведемо поняття узагальненого розв'язку системи методу Канторовича. Позначимо через $H_n \subset H$ простір функцій вигляду

$$v_n(x,y) = \sum_{k=1}^{n} a_k(x)\varphi_k(x,y).$$

Нехай для функції $w_n(x,y) \in H_n \cap H_0$ правильна тотожність

$$L(w_n, v_n) = \iint\limits_S f v_n dxdy,$$

де v_n – довільна функція з $H_n \cap H_0$. Тоді функцію $w_n(x,y)$ називають узагальненим розв'язком методу Канторовича.

Зауважимо, що за наших припущень це буде класичний розв'язок системи методу Канторовича. Аналогічно до праці [2] правильна теорема.

Теорема 1. За умов задачі (1–3), які забезпечують виконання нерівностей (7), для довільної функції $f \in H$ задача (1–3) має єдиний узагальнений розв'язок $w(x,y) \in H_0$; при довільному n система методу Канторовича (18–21) має єдиний узагальнений розв'язок $w_n(x,y) \in H_n \cap H_0$, метод Канторовича збігається і швидкість збіжності характеризує оцінка

$$|w - w_n|_0 \le c|w - v_n|_0,$$

де $c = \sqrt{\dfrac{\eta}{\mu}}$, елемент v_n – вибираємо таким, який реалізує мінімум функціонала $|w - v_n|_0$. З огляду на повноту системи функцій $\{\chi_l(x), \varphi_k(x,y)\}$ у просторі H_0 для елемента, який реалізує мінімум зазначеного функціонала, отримаємо

$$|u - v_n|_0 \to 0 \text{ при } n \to \infty.$$

Зазначимо можливі способи вибору координатних функцій $\varphi_k(x,y)$. Оскільки застосування методу Канторовича потребує від лінійно незалежної системи функцій $\{\chi_l(x), \varphi_k(x,y)\}$ повноти в просторі H_0, а також виконання крайових умов (10–13), то ці умови будуть, наприклад, задовольняти системи

$$\{\psi_{lk}(x,y)\} = \left\{\sin^2\left(\frac{l\pi(x-a)}{b-a}\right)\sin^2\left(\frac{k\pi(y-g(x))}{h(x)-g(x)}\right)\right\}.$$

Оскільки ця система належить області визначення $\Omega(B)$ додатно визначеного оператора B, причому система $\{B\psi_{lk}\}$ повна в H_0, то система $\{\psi_{lk}(x,y)\}$ повна в енергетичному просторі $H_A = H_B = H_0$ [6]. Аналогічні міркування правильні для системи

$$x^{l-1}y^{k-1}(x-a)^2(x-b)^2(y-g(x))^2(y-h(x))^2\,,\quad l,k=1,2,\ldots.$$

Тоді координатну систему функцій можемо вибрати відповідно в одному з виглядів

$$\varphi_k(x,y)=\sin^2\left(\frac{k\pi(y-g(x))}{h(x)-g(x)}\right),\ k=1,2,\ldots$$

$$\tilde{\varphi}_k(x,y)=y^{k-1}(y-g(x))^2(y-h(x)),\ k=1,2,\ldots.$$

4. ВИСНОВКИ

Досліджено та теоретично обґрунтувано застосовність методу Канторовича для розв'язування лінійної крайової задачі з диференціальним рівнянням у частинних похідних четвертого порядку зі змінними коефіцієнтами. Проведено теоретичний аналіз існування та єдиності розв'язку розглянутої крайової задачі, який отримали методом Канторовича. Він має суттєве значення для оцінювання його достовірності. У разі застосування методу Канторовича ефективна апроксимація розв'язку крайової задачі залежить від вдалого вибору координатних функцій. Для досліджуваного випадку наведено деякі рекомендації щодо вибору систем координатних функцій.

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. *Варга Р*. Функциональный анализ и теория аппроксимации в численном анализе / Р. Варга. – М.: Мир, 1974.
2. *Жук М.В*. Теоретичні аспекти застосовності методу Канторовича до однієї двовимірної крайової задачі / М.В. Жук, А.Ю. Кіндибалюк, Н.М. Щербина // Вісн. Львів ун.-ту. Сер. прикл. матем. та інфом. – 2012. – Вип. 18. – С. 96-105.
3. *Канторович Л.В.* Приближенные методы высшего анализа / Л.В. Канторович, В.И. Крылов. – М.; Л.: Физматгиз, 1962.
4. *Ладыженская О.А.* Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа. – М.: Наука, 1973.
5. *Лучка А.Ю*. Возникновение и развитие прямых методов математической физики / А.Ю. Лучка, Т.Ф. Лучка. – К.: Наук. думка, 1985.
6. *Михлин С.Г.* Вариационные методы в математической физике / С.Г. Михлин. – М.: Наука, 1970.
7. *Щербина Н.М.* Комбінований алгоритм розв'язування лінійної двовимірної крайової задачі / Н.М. Щербина, М.В. Жук // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2005. – Т. 48, № 4. – С. 133-139.
8. *Щербина Н.* Наближене розв'язування лінійної двовимірної крайової задачі про тримальну здатність ортотропних пластин / Н. Щербина, М. Жук, А. Кіндибалюк // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. прикл. матем. та інформ. – 2011. – Вип. 17. – С. 116-128.

Стаття: надійшла до редколегії 02.09.2015
доопрацьована 14.10.2015
прийнята до друку 28.10.2015

APPLICATION OF KANTOROVICH METHOD FOR SOLVING PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATION OF FOURTH ODRER

M. Zhuk[1], Adriana Kindybaliuk[2]

[1]Ivan Franko National University of Lviv,
Universytetska Str., 1, Lviv, 79000
[2]National University of Building and Architecture in Kyiv,
Povitroflotsky Prosp., 31, Kyiv, 03037

Theoretical aspects of applicability of Kantorovich method for solving two dimensional boundary value problem with partial differential equation of fourth order with variable coefficients have been investigated. According to this method, the initial problem is reduced to solution of corresponding system of ordinary differential equations of fourth order – the system of the Kantorovich method. The generalized solution term has been introduced; the existence and uniqueness of generalized solution have been proved. Convergence of Kantorovich method has been established and evaluation of speed of convergence has been determined.

Key words: two-dimensional boundary-value problem, differential equation with variable coefficients, Kantorovich method, approximate solution, rate of convergence.