

МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ

УДК 517:519.642

МОДЕЛЮВАННЯ ВПЛИВУ АНІЗОТРОПІЇ ПЕРІОДОНТАЛЬНОЇ ЗВ'ЯЗКИ НА ПОВЕДІНКУ СИСТЕМИ ЗУБ-ЩЕЛЕПА

В. Вовк¹, С. Лещук², Т. Мандзюк¹

¹Львівський національний університет імені Івана Франка,
вул. Університетська, 1, Львів, 79000, e-mail: kis@franko.lviv.ua

²Львівський державний медичний університет імені Данила Галицького,
вул. Пекарська, 69, Львів, 79010

Багатогранність функціональної ролі періодонтальної зв'язки людського зуба зумовлює не тільки складність її будови, а й нерегулярну поведінку фізико-механічних параметрів матеріалу [1]. Ця праця містить продовження поданих в [2] досліджень оцінки впливу шару періодонту на загальну картину напружено-деформованого стану тканин зубо-щелепної системи. Розглянуто анізотропні властивості пародонту.

З використанням тривимірних скінчено-елементних моделей теорії пружності в межах ортотропної моделі анізотропії оцінено співвідношення впливу нормальної та зсувної жорсткостей фіброволоконної структури періодонту на розподіл напружень у системі зуб-щелепа в умовах функціонального навантаження.

З'ясовано, що ізотропна та анізотропна моделі періодонтальної зв'язки дають принципово різну поведінку зубо-щелепного апарату в цілому, що ставить під сумнів окремі вже доволі визнані сьогодні висновки, щодо його напружено-деформованого стану.

Ключові слова: біомеханіка у стоматології, 3D метод скінчених елементів, багатшарові структури.

1. ВСТУП

Сьогодні загально визнаним став той факт, що вплив періодонтальної зв'язки як демпфуючої прокладки між твердим дентином кореня та кісткою щелепи є одним з головних параметрів, які визначають поведінку системи зуб-щелепа під функціональним навантаженням. Особливістю демпфуючого ефекту є доволі широкий діапазон прикладання зусиль з м'якою реакцією періодонту, яка, втім, доволі швидко змінюється на значну жорсткість за надмірного зближення працюючих поверхонь.

Маючи намір залишатися в межах використання лінійної моделі теорії пружності, розглядатимемо реакцію періодонтальної зв'язки на невеликі навантаження. У такий спосіб абстрагуємося від ефектів фізичної та геометричної нелінійності завдяки фізико-механічним параметрам матеріалу та конструктивних особливостей фіброволоконної будови пародонтальних тканин. Мета нашої праці – дослідити вплив анізотропії періодонту на якісну картину напружено-деформованого стану системи зуб-щелепа в цілому.

Попри те, що проблеми анізотропії стоматологічних матеріалів у літературі обговорюються досить жваво, питання анізотропії періодонту вище простої констатації самого факту здебільшого не розглядають. Серед причин зазначимо суто технічні труднощі з визначенням пружних характеристик періодонту, найбільше з огляду на їхню значну варіативність, зокрема в плані суттєвої різниці між їхніми

величинами в живих і мертвих тканинах зуба. В умовах незначної кількості публікацій на цю тематику цілком виправдано виглядає моделювання анізотропії найпростішим випадком – трансверсальною ізотропією.

З п'яти незалежних технічних констант трансверсально-ізотропної моделі періодонту найліпші шанси на фізичні вимірювання мають значення модулів Юнга та коефіцієнтів Пуассона (у площині ізотропії та перпендикулярному до неї напрямі). Практично проблематичним залишається завдання визначення модуля зсуву в неізотропному напрямі.

У багатьох прикладних дослідженнях (наприклад, у гірничій справі) замість експериментального визначення модуля зсуву матеріалу додатково вводять гіпотези, які відображають характерну для цього матеріалу поведінку, щоб визначити емпіричну функціональну залежність модуля від решти пружних констант. Такий підхід у механіці періодонту виглядає доволі перспективним, хоча потребує додаткових теоретичних та експериментальних досліджень. Втім, погляд, навіть здалека, на обсяги потрібної у цьому випадку роботи непоборно вибирає з пам'яті характерні для практичних застосувань теорії пружності міркування про досить незначний вплив точності визначення коефіцієнта Пуассона (порівняно з модулем Юнга) на картину напружено-деформованого стану досліджуваного тіла. Хочеться вірити, що подібно до коефіцієнта Пуассона й модуль зсуву (можливо завдяки специфіці задач стоматології, або, хоча б, для якісного аналізу) також не є настільки впливовим, щоб потратити на його визначення надмірні зусилля.

Зрозуміло, що завдання підтвердження такої думки є аж ніяк не простішим, аніж вихідна задача, але ж для її заперечення достатньо єдиного контрприкладу! Отож, є сенс у дослідженні чутливості напружено-деформованого стану системи зуб-щелепа щодо зміни значення модуля зсуву періодонту. Саме ця проблема і стала лейтмотивом подальшого дослідження.

2. МАТЕРІАЛ І МЕТОДИ ДОСЛІДЖЕНЬ

Наша праця є розширенням досліджень [2] у напрямі врахування анізотропних властивостей періодонту, що дає змогу в цілому зберегти запропоновану там геометрію

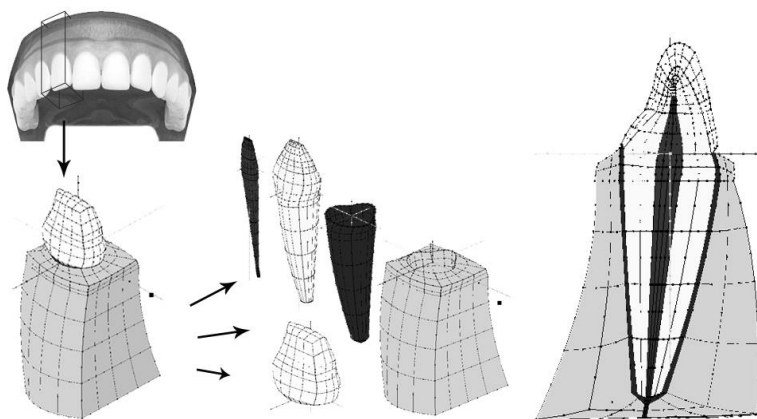


Рис. 1. Конструктивна схема фізичної моделі різця

Незмінними залишимо також умови виокремлення моделі з повної системи зуб-щелепа: нульові переміщення обох бокових граней фрагмента кістки щелепи у нормальному до площини січення напрямі та жорстке закріплення площини нижнього зрізу. Аналізуватимемо реакцію системи на функціональне навантаження у вертикальному напрямі.

Як і раніше в [2], за математичну модель задачі вибрано тривимірні співвідношення лінійної теорії пружності

$$\begin{cases} \sigma_{ij,j} = 0 & \text{в } \Omega \in \mathbb{R}^3 \\ \sigma_{ij} \nu_j = F_i & \text{на } \Gamma_\sigma \end{cases} \quad (1)$$

Ми вже згадували, що для дослідження чутливості реакції системи на величину модуля зсуву будемо очікувати достатності моделі трансверсальної ізотропії з віссю анізотропії у нормальному до шару періодонту напрямі. Втім, з огляду на непринципові ускладнення в реалізації обчислювальних схем МСЕ та з прицілом на подальше розширення тематики досліджень за базову вибрано ортотропну модель анізотропії, в якій рівняння узагальненого закону Гука з використанням технічних констант E, ν, G (модуль Юнга, коефіцієнт Пуассона, модуль зсуву) набувають такого вигляду:

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_x} & -\frac{\nu_{yx}}{E_y} & -\frac{\nu_{zx}}{E_z} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{xy}}{E_x} & \frac{1}{E_y} & -\frac{\nu_{zy}}{E_z} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{xz}}{E_x} & -\frac{\nu_{yz}}{E_y} & \frac{1}{E_z} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2G_{yz}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2G_{zx}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2G_{xy}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \sigma_{yz} \\ \sigma_{xz} \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix} \quad (2)$$

Для врахування анізотропії у використаній в [2] схемі МСЕ з застосуванням біквадратичних серендипових апроксимацій на криволінійних шестигранниках відповідно до закону Гука (2) треба змінити вигляд матриці жорсткості скінченного елемента. Специфіка будови періодонтальної зв'язки дає змогу подавати її геометрію у вигляді об'єднання скінчених елементів, локальна системи координат (α, β, γ) яких збігається з осями ортотропії матеріалу. Через це коефіцієнти матриці жорсткості елемента достатньо лише узгоджувати з його орієнтацією стосовно глобальної системи координат (x, y, z) за допомогою такого простого перетворення:

$$a_{ij}^* = \sum_{m=1}^6 \sum_{n=1}^6 a_{mn} q_{im} q_{jn} \quad i, j = 1, \dots, 6 \quad , \quad (3)$$

де

q_{ij}	1	2	3	4	5	6
1	l_{11}^2	l_{12}^2	l_{13}^2	$l_{12} l_{13}$	$l_{13} l_{11}$	$l_{12} l_{11}$
2	l_{21}^2	l_{22}^2	l_{23}^2	$l_{23} l_{22}$	$l_{23} l_{21}$	$l_{22} l_{21}$
3	l_{31}^2	l_{32}^2	l_{33}^2	$l_{33} l_{32}$	$l_{33} l_{31}$	$l_{32} l_{31}$
4	$2l_{31} l_{21}$	$2l_{32} l_{22}$	$2l_{33} l_{23}$	$l_{33} l_{22} + l_{33} l_{22}$	$l_{33} l_{21} + l_{33} l_{23}$	$l_{31} l_{22} + l_{32} l_{21}$
5	$2l_{31} l_{11}$	$2l_{32} l_{12}$	$2l_{33} l_{13}$	$l_{33} l_{12} + l_{32} l_{13}$	$l_{33} l_{11} + l_{31} l_{13}$	$l_{31} l_{12} + l_{32} l_{11}$
6	$2l_{21} l_{11}$	$2l_{12} l_{22}$	$2l_{13} l_{23}$	$l_{13} l_{22} + l_{12} l_{23}$	$l_{13} l_{21} + l_{11} l_{23}$	$l_{11} l_{22} + l_{12} l_{21}$

а l_{ij} – є елементами матриці косинусів кутів повороту його локальної системи координат стосовно глобальної:

	x	y	z
α	l_{11}	l_{12}	l_{13}
β	l_{21}	l_{22}	l_{23}
γ	l_{31}	l_{32}	l_{33}

Згадані вище зміни були внесені в програмний код розробленого авторами спеціалізованого програмного забезпечення DENTA-FEM.3D [2]. З його допомогою ми провели числове експериментування з анізотропними властивостями періодонту. Далі подаємо дослідження, які виконані для такої моделі трансверсальної ізотропії пародонту: серед технічних констант у (2) незалежними залишено E_v, E_r – модулі Юнга у нормальному та дотичному до площини ізотропії напрямках, а ν – коефіцієнт Пуассона; G – модулі зсуву приймемо однаковими у всіх напрямках ортотропії.

3. РЕЗУЛЬТАТИ ДОСЛІДЖЕННЯ ТА ОБГОВОРЕННЯ

Головні висновки з виконаних числових розрахунків проілюструємо представницьким, на наш погляд, експериментом. Модуль Юнга періодонту у нормальному до площини ізотропії напрямку (вдовж фіброволокон), як і у [2], приймемо таким, що дорівнює 5 МПа, а у площині ізотропії зменшимо його до 1 МПа. Коефіцієнт Пуассона залишимо на рівні 0,45. За цих умов розглянемо вплив модуля зсуву на поведінку системи шляхом зіставлення розподілу напружень в системі у трьох випадках: $G = 0.01$ МПа – відповідає практичній відсутності зсувної жорсткості, $G = 1$ МПа – орієнтовна зсувна жорсткість “живого” періодонту та $G = 100$ МПа – зсуву немає.

Напружено-деформований стан системи в умовах вертикального навантаження на оклюзивну область емалі зображено на рис 2 розподілом головних нормальних напружень у поперечному (до зубного ряду) осьовому січенні зуба. Світлішим відтінком зображено більші за величиною напруження, темним – слабо напружений стан. Розташування зон стискальних і розтягувальних зусиль зрозумілі з контексту зображення.

Фізично логічними виглядають очікування, що відсутність (малість) зсувної компоненти жорсткості ($G = 0.01$ МПа) періодонту має змістити основні напруження в апекс кореня зуба. Результати обчислень не тільки підтверджують ці очікування, а свідчать, про те, що навіть значна повздовжня жорсткість фіброволокон не стає на заваді концентрації напружень в околі апекса. Цей факт нерідко можна знайти в наукових публікаціях. Виявляється, що саме наявність у періодонту зсувної

жорсткості ($G = 1$ МПа) призводить до утримування основних зусиль у серединній ділянці дентину кореня без їхнього значного проникнення в район апекса. Подальше збільшення зсувної жорсткості ($G = 100$ МПа) тільки підтверджує домінування її впливу над нормальними компонентами анізотропії. Це дає змогу припустити, що саме внаслідок специфіки будови періодонтальної зв'язки серед констант матриці пружності закону Гука (2) найбільш значуще впливають на якісну картину напружено-деформованого стану зубо-щелепної системи саме зсувні компоненти.

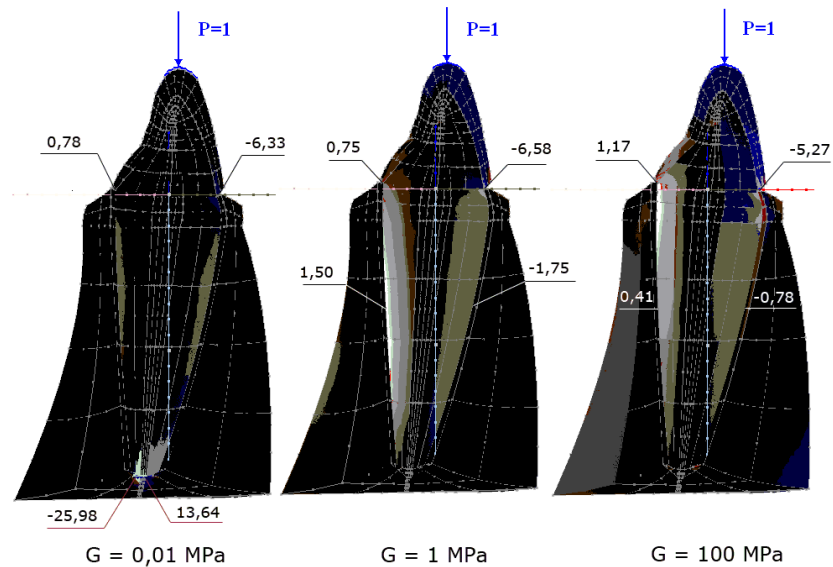


Рис. 2. Розподіл головних нормальних напружень у системі зуб-щелепа при вертикальному навантаженні за різних значень модуля зсуву періодонту

4. ВИСНОВКИ

Розглянутий вище числовий експеримент разом з багатьма іншими став підставою для низки практично важливих висновків:

- якісна картина напружено-деформованого стану зубо-щелепного апарату є критично чутливою до врахування анізотропії пародонту живого зуба;
- без надійних методик визначення зсувних пружних констант періодонту врахування анізотропних властивостей періодонту сенсу не має;
- шар періодонту є джерелом структурної нестійкості зубо-щелепного апарату, а отже, й будь-яких його математичних моделей;
- використання лінійних моделей теорії пружності є лише екстенсивним шляхом врахування впливу періодонтальної зв'язки на поведінку системи в цілому.

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Мандзюк Т. Огляд проблем комп'ютерного моделювання біомеханічних систем у стоматології / Т. Мандзюк, В. Вовк // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. прикл. матем. та інформ. – Вип. 14. – 2008. – С. 105-122
2. Мандзюк Т. До моделювання біомеханічних конструкцій з м'якими прошарками / Т. Мандзюк, В. Вовк // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. прикл. матем. та інформ. – Вип. 17. – 2011. – С. 85-93

Стаття: надійшла до редколегії 02.09.2015

доопрацьована 14.10.2015

прийнята до друку 28.10.2015

TO MODELING OF BIOMECHANICAL BODIES WITH SOFT ISSUES

V. Vovk¹, S. Leshtchuk², T. Mandzyuk¹

¹*Ivan Franko National University of Lviv,
Universytetska Str., 1, Lviv, 79000, e-mail: kis@franko.lviv.ua*

²*Danylo Halytsky Lviv State Medical University,
Pekarska Str., 69, Lviv, 79010*

Trying to take into modeling researches as many as possible features not always give the expect results. Qualitative modeling of complex systems needs prior estimation of its main parameters. In particular in dentistry biomechanics there is a problem of taking into consideration the interaction of bodies of different rigidity. Typical object of such problems is a human tooth with periodontal ligament (PDL). The thinness of this layer provokes to simplify its modeling beginning with complete ignoring and finishing its compensating by some contacts ratios. On the other hand too complex models need too large expenses of computing resources.

In this paper the influence of PDL rigidity level on qualitative picture of “tooth-jaw” system stress/strain stage under loading is investigated using accurate finite elements models of 3D elasticity theory. Impossibility of live tooth modeling without using some important geometrical and physical PDL parameters is confirmed. In addition to this the optimality of nature defined rigidity values as to amortizing features of periodontal issues is stated.

Key words: FEM modeling, periodontal ligament, anisotropy, tooth movement, biomechanics in dentistry.