ISSN 2078–5097. Вісн. Львів. ун-ту. Сер. прикл. матем. та інф. 2015. Вип. 23. С. 37–48
Visnyk of the Lviv University. Series Appl. Math. and Informatics. Issue 23. P. 37–48

УДК 517:519.642

ГРАДІЄНТНИЙ МЕТОД РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЛІНІЙНОЇ БАГАТОПАРАМЕТРИЧНОЇ ЗАДАЧІ НА ВЛАСНІ ЗНАЧЕННЯ

О. Ярошко[1], Б. Подлевський[2], В. Хлобистов[3]

*[1]Львівський національний університет імені Івана Франка,
вул. Університетська, 1, Львів, 79000, e-mail: oksyanya@gmail.com
[2]Інститут прикладних проблем механіки та математики
НАН України імені Я.С. Підстригача,
вул. Наукова, 3б, Львів, 79060, e-mail: podlev@iapmm.lviv.ua
[3]Інститут математики НАН України,
вул. Терещенківська, 3, Київ, 01601, e-mail: olga.mail@bk.ru*

Застосовано варіаційний підхід для розв'язання багатопараметричної задачі на власні значення. Доведено еквівалентність спектральної задачі та відповідної варіаційної задачі. Побудовано чисельний метод для відшукання розв'язку варіаційної задачі, доведено локальну збіжність цього методу. Крім того, проведено та проаналізовано числові експерименти, які ілюструють роботу методу.

Ключові слова: багатопараметрична задача на власні значення, спектральна задача, варіаційна задача, чисельний метод, ітераційний процес.

1. ВСТУП

Дослідження існування розв'язку операторних рівнянь вигляду

$$T(\lambda)x = f$$

з операторною функцією $T(\lambda): E^m \to X(H)$ ($X(H)$ – множина лінійних операторів у гільбертовому просторі, зокрема в дійсному евклідовому просторі E^n), яка лінійно або нелінійно залежить від кількох спектральних параметрів $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$, призводить до дослідження задачі знаходження таких значень параметрів λ_i, $i = 1, 2, \dots, m$, за яких існує нетривіальний розв'язок відповідного однорідного рівняння $T(\lambda)x = 0$. Такі задачі виникають у багатьох сферах аналізу та математичної фізики.

Різноманітні формулювання задач такого типу, відповідна спектральна теорія, практичне застосування та ряд чисельних методів для відшукання розв'язку цих задач широко досліджено у літературі (див. [1] – [13]).

Розглянемо таку багатопараметричну задачу на власні значення:

$$T(\lambda)x \equiv Ax - \sum_{i=1}^{m} \lambda_i B_i x = 0, \tag{1}$$

у дійсному евклідовому просторі E^n, де всі скалярні параметри $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m \in E^m$ – спектральні.

Для розв'язання цієї задачі пропонуємо підхід, який полягає у заміні багатопараметричної задачі (1) на еквівалентну варіаційну задачу мінімізації деякого функціонала. Зауважимо, що такий підхід відрізнятиметься від уже запропонованих у [3], [4], [6], [8].

За основу чисельного методу мінімізації функціонала використовуватимемо градієнтну процедуру у розширеному просторі, що є сумою евклідових просторів E^n та E^m. У підсумку отримаємо алгоритм одночасного обчислення власного вектора та множини власних значень. На завершення проілюструємо практичну застосовність алгоритму кількома прикладами.

2. ВЛАСНІ ВЕКТОРИ ТА ВЛАСНІ ЗНАЧЕННЯ ЯК ТОЧКИ МІНІМУМУ

Нехай E^n – дійсний евклідовий простір з визначеними скалярним добутком $(\cdot,\cdot)_{E^n}$ і нормою $\|\cdot\|_{E^n}$. Нехай також $A,\ B_i : E^n \to E^n$, $i = 1, 2, \ldots, m$ – квадратні матриці розміру $n \times n$.

Багатопараметрична задача на власні значення полягає у відшуканні такого набору спектральних параметрів $\lambda = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_m\} \in E^m$, за якого існує нетривіальний розв'язок $x \neq 0$ рівняння (1). Набір спектральних параметрів $\lambda = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_m\}$ називатимемо узагальненим власним значенням, відповідний вектор x – узагальненим власним вектором задачі (1). Усі можливі набори $\lambda = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_m\}$ m-вимірного векторного простору E^m утворюють так звану поверхню власних значень, а у випадку $m = 2$ – криву власних значень. Для $m = 1$ отримуємо класичну задачу на власні значення вигляду

$$Ax = \lambda B_1 x .$$

Разом із задачею (1) розглянемо задачу відшукання такого набору параметрів $\lambda = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_m\}$ і такого вектора x, за яких функціонал

$$F(u) = \frac{1}{2}\left\| T(\lambda)x \right\|^2, \quad \forall u = \{x, \lambda\} \in H = E^n \oplus E^m,\ x \neq 0 \tag{2}$$

досягає свого мінімального значення, тобто

$$F(u) \to \min_u, \quad u \in U \subset H, \quad \left(u \neq 0\right), \tag{3}$$

де U – множина, що містить точки $u^* = \{x^*, \lambda^*\}$, які задовольняють рівняння (1); H – Гільбертів простір, у якому скалярний добуток та норма визначаються так:

$$(u,v)_H = (u_1,u_2)_{E^n} + (v_1,v_2)_{E^m}, \quad \|u\|_H = \sqrt{\|u_1\|^2_{E^n} + \|v_1\|^2_{E^m}},$$

$$u = \{u_1, v_1\}, \quad v = \{u_2, v_2\}, \quad u_1, u_2 \in E^n, \quad v_1, v_2 \in E^m .$$

Підмножину точок мінімуму функціонала $F(u)$ в U позначимо як

$$U_* = \left\{u : u \in U, \quad F(u) = 0\right\}.$$

Тепер доведемо еквівалентність задач (1) та (3).

Теорема 1. Кожний власний вектор x^*, що відповідає набору власних значень $\lambda^* = (\lambda_1^*, \ldots, \lambda_m^*)$ задачі (1) є стаціонарною точкою $u^* = \{x^*, \lambda^*\}$ функціонала (2), і навпаки – кожна стаціонарна точка $u^* = \{x^*, \lambda^*\}$ функціонала (2) відповідає власній парі x^*, $\lambda^* = (\lambda_1^*, \ldots, \lambda_m^*)$ задачі (1).

Доведення. Розглянемо приріст функціонала

$$F(u + \Delta u) - F(u) = F(x + h, \lambda + q) - F(x, \lambda)$$

для довільних $u,\ u+\Delta u\in U$, де $\Delta u=\{h,q\}\in U$. Після певних перетворень отримуємо

$$F(u+\Delta u)-F(u)=F(x+h,\lambda+q)-F(x,\lambda)=(\,T(\lambda)x,\,T(\lambda)h)_{E^n}-(T(\lambda)x,\sum_{i=1}^{m}B_i xq_i)_{E^n}+$$
$$+\frac{1}{2}\Big\{(T(\lambda)h,T(\lambda)h)_{E^n}-2(T(\lambda)h,\sum_{i=1}^{m}B_i xq_i)_{E^n}-2(T(\lambda)x,\sum_{i=1}^{m}B_i hq_i)_{E^n}+$$
$$+2(\sum_{i=1}^{m}B_i xq_i,\sum_{i=1}^{m}B_i xq_i)_{E^n}\Big\}+o(\|\Delta u\|_H^2)\,.$$

Отож, перший диференціал від $F(u)$ запишемо у вигляді

$$d\{F(x,\lambda);(h,q)\}=(\,T(\lambda)x,\,T(\lambda)h)_{E^n}-\sum_{i=1}^{m}(T(\lambda)x,\,B_i x)_{E^n}q_i=$$
$$=(T^*(\lambda)T(\lambda)x,\,h)_{E^n}+(f(\lambda,x),\,q)_{E^m}=(u_g,\Delta u)_H\,,$$

де

$$f(\lambda,x)=(f_1(\lambda,x),f_2(\lambda,x),...,f_m(\lambda,x))\,,\quad f_i(\lambda,x)=-(T(\lambda)x,B_i x)_{E^n}\,,\ i=1,2,...,m\,.$$

Звідси одержуємо також формулу градієнта функціонала (2)

$$\nabla F(u)\equiv u_g=\{(T^*(\lambda)T(\lambda)x,e_1),\,...\,(T^*(\lambda)T(\lambda)x,e_n),\,f_1(\lambda,x),\,f_2(\lambda,x),...,f_m(\lambda,x)\}\,. \quad (4)$$

Тут $e_i\in E^n$ – вектор, i-та координата якого дорівнює 1, решта – дорівнює нулю.

Нехай $T(\lambda)x=0,\ x\neq 0$. Тоді зі співвідношення (4) випливає, що $\nabla F(u)=0$. Нехай $\nabla F(u)=0$. Тоді з (4) отримуємо також

$$T^*(\lambda)T(\lambda)x=0\Rightarrow(T^*(\lambda)T(\lambda)x,x)_{E^n}=0\Rightarrow(T(\lambda)x,T(\lambda)x)_{E^n}=0\Rightarrow T(\lambda)x=0\,,$$

що доводить твердження теореми.

Зауваження. З огляду на те, що $F(u)\geq 0$, $F(u^*)=0$, $u,u^*\in U$, кожна стаціонарна точка u^* функціонала $F(u)$ є точкою його локального (і глобального) мінімуму.

Отже, ми довели, що спектральна задача (1) і задача (3) відшукання стаціонарних точок функціонала $F(u)$ – еквівалентні.

3. ЧИСЕЛЬНИЙ АЛГОРИТМ І ЙОГО ЗБІЖНІСТЬ

Результат, який отримали у попередньому параграфі, дає змогу побудувати градієнтну процедуру для відшукання чисельного розв'язку задачі (3), а отже, задачі (1). Градієнтна процедура описується такою формулою

$$u_{k+1}=u_k-\gamma(u_k)\nabla F(u_k)\,,\quad k=0,1,2,...\,. \quad (5)$$

Для співвідношень типу (5) визначено цілий клас методів, які відрізняються лише вибором кроку $\gamma(u_k)$. У цій статті ми пропонуємо обчислювати величину $\gamma_k=\gamma(u_k)$ на кожному кроці, використовуючи таке співвідношення (див. [14]):

$$\gamma_k=\frac{F(u_k)}{\|\nabla F(u_k)\|_H^2}\,. \quad (6)$$

Зауважимо, що надалі упускатимемо індекс H у позначеннях скалярного добутку та норми для спрощення запису.

Отож, ітераційний процес запишемо так:

$$u_{k+1} = u_k - \frac{F(u_k)}{\left\|\nabla F(u_k)\right\|^2}\nabla F(u_k), \quad k = 0,1,2,... \tag{7}$$

Вибираючи початкове наближення, яке є у певному сенсі близьке до власного вектора та набору власних значень, ітераційний процес (7) збігається до стаціонарної точки функціонала (2) $u^* = \{x^*, \lambda^*\}$, в якій досягається його мінімум, і у підсумку до власного вектора x^* та множини власних значень $\lambda^* = (\lambda_1^*, ... , \lambda_m^*)$ задачі (1).

Отже, для наведеного ітераційного процесу виконується така теорема локальної збіжності.

Теорема 2. Нехай матриця Т(λ) спектральної задачі (1) така, що градієнт функціонала (2) задовольняє умову Ліпшиця

$$\left\|\nabla F(u) - \nabla F(z)\right\| \le L\left\|u - z\right\|, \quad \forall u, z \in U, \ L > 0, \tag{8}$$

де U – деяка замкнута опукла множина, що містить розв'язок u*. Якщо для деякого початкового наближення $u_0 = (x_0, \lambda^{(0)}) \in U$ виконується умова

$$0 < \gamma_0 \equiv \gamma(u_0) \le 1/2L, \tag{9}$$

тоді ітераційний процес (7) збігається до точки мінімуму функціонала (2) $u^* = \{x^*, \lambda^*\}$, а отже, і до власного вектора x* та набору власних значень $\lambda^* = (\lambda_1^*, ... , \lambda_m^*)$ задачі (1). Іншими словами, виконуються такі рівності:

$$\lim_{k\to\infty} \rho(u_k, U_*) = \lim_{k\to\infty} \rho(u_k, u^*) = 0, \lim_{k\to\infty} F(u_k) = F(u^*) = 0, \tag{10}$$

Крім того, справджується оцінка

$$F(u_k) \le 2^{-2k} F(u_0), \quad k = 1, 2, ... \tag{11}$$

Доведення. За умовою теореми градієнт функціонала задовольняє умову Ліпшиця (8), отже, виконується така нерівність:

$$\| F(u) - F(z) - (\nabla F(z), u - z) \| \le L\left\|u - z\right\|^2 / 2. \tag{12}$$

Далі, якщо для деякого $k \ge 0$ справджується $\nabla F(x_k) = 0$, тоді з (7) формально отримуємо, що

$$u_k = u_{k+1} = ...,$$

і твердження теореми виконуються. Тому припустимо, що $\nabla F(u_k) \ne 0$ для $k = 0, 1, ...$, використаємо метод математичної індукції для доведення теореми.

Вважатимемо, що для $k = 0$ виконується

$$F(u_0) - F(u_1) = F(u_0) - F(u_0 - \gamma_0 \nabla F(u_0)). \tag{13}$$

Врахувавши нерівність (12) для $z = u_0$, $u = u_1 = u_0 - \gamma_0 \nabla F(u_0)$, отримаємо таку нерівність:

$$F(u_0) - F(u_1) \ge \gamma_0 (1 - L\gamma_0 / 2)\left\|\nabla F(u_0)\right\|^2.$$

У підсумку, за умови (9) отримуємо

$$F(u_0) - F(u_1) \ge \frac{3}{4}\gamma_0 \| \nabla F(u_0) \|^2 = \frac{3}{4}\frac{F(u_0)}{\| \nabla F(u_0) \|^2} \| \nabla F(u_0) \|^2.$$

Звідси

$$\frac{1}{4}F(u_0) \ge F(u_1), \tag{14}$$

або

$$F(u_1) < F(u_0)\,. \tag{15}$$

Тепер доведемо, що $\gamma_1 < \gamma_0$. Для цього поділимо обидві частини нерівності (14) на величину $\|\nabla F(u_1)\|^2 \geq 0$. Отримаємо

$$\frac{F(u_1)}{\|\nabla F(u_1)\|^2} \leq \frac{1}{4}\frac{F(u_0)}{\|\nabla F(u_1)\|^2} = \frac{1}{4}\frac{F(u_0)}{\|\nabla F(u_1)\|^2}\cdot\frac{\|\nabla F(u_0)\|^2}{\|\nabla F(u_0)\|^2}\,,$$

тобто

$$\gamma_1 \leq \frac{1}{4}\gamma_0 \cdot \frac{\|\nabla F(u_0)\|^2}{\|\nabla F(u_1)\|^2}\,. \tag{16}$$

Далі з умови Ліпшиця (8) матимемо

$$\nabla F(u_0) - \nabla F(u_1) \leq L(u_0 - u_1)\,.$$

Використовуючи співвідношення (7), можемо отримати

$$\nabla F(u_0) - \nabla F(u_1) \leq L\gamma_0 \nabla F(u_0)\,.$$

Тепер, враховуючи (9), можемо записати, що

$$\nabla F(u_0) - \nabla F(u_1) \leq \frac{1}{2}\nabla F(u_0)\,,$$

або

$$\frac{1}{2}\nabla F(u_0) \leq \nabla F(u_1)\,,$$

тобто

$$\frac{1}{2}\frac{\nabla F(u_0)}{\nabla F(u_1)} \leq 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{\nabla F(u_0)}{\nabla F(u_1)} \leq 2\,.$$

Нарешті, враховуючи останню нерівність, зі співвідношення (16) одержуємо потрібне

$$\gamma_1 < \gamma_0\,.$$

Нехай тепер (15) виконується для $k = m$, тобто $F(u_m) < F(u_{m-1})$ і $\gamma_m < \gamma_{m-1}$. Доведемо, що (15) виконується також і для $k = m+1$, тобто, що справджуються такі співвідношення:

$$F(u_{m+1}) < F(u_m),\;\; \gamma_{m+1} < \gamma_m\,. \tag{17}$$

Аналогічно, як і для довільного $k = m$, співвідношення (13) можна переписати у вигляді

$$F(u_m) - F(u_{m+1}) = F(u_m) - F(u_m - \gamma_m \nabla F(u_m))\,.$$

Звідси знаходимо

$$F(u_m) - F(u_{m+1}) \geq \gamma_m (1 - L\gamma_m / 2)\|\nabla F(u_m)\|^2\,.$$

Якщо

$$0 < \gamma_m < \gamma_{m-1} < \ldots < \gamma_0 \leq 1/2L\,, \tag{18}$$

тоді

$$F(u_m) - F(u_{m+1}) \geq \frac{3}{4}\gamma_m \|\nabla F(u_m)\|^2 > 0\,. \tag{19}$$

Звідси випливає, що

$$\frac{1}{4}F(u_m) \ge F(u_{m+1}), \tag{20}$$

тобто

$$F(u_m) \ge F(u_{m+1})$$

і першу нерівність з (17) доведено.

Так само, як було доведено раніше, отримаємо, що нерівність $\gamma_{m+1} < \gamma_m$ виконується, тобто друга нерівність з (17) зберігається. Крім того, враховуючи (18), отримуємо

$$0 < \gamma_{m+1} < \gamma_m < \gamma_{m-1} < \ldots < \gamma_0 \le 1/2L. \tag{21}$$

Отже, послідовність $F(u_k)$ монотонно спадна й обмежена знизу, тому існує границя

$$\lim_{k\to\infty} F(u_k) \ge 0.$$

Отож,

$$\lim_{k\to\infty}\big(F(u_k) - F(u_{k+1})\big) = 0$$

і з (19) випливає

$$\lim_{k\to\infty} \| \nabla F(u_k) \| = 0. \tag{22}$$

Тепер, використовуючи формулу ітераційного процесу (7), отримуємо

$$\| u_{k+1} - u_k \| = \gamma_m \cdot \| \nabla F(u_k) \|.$$

Далі врахувавши оцінки (21), матимемо

$$\| u_{k+1} - u_k \| \le \gamma_0 \cdot \| \nabla F(u_k) \| \le \frac{1}{2L} \| \nabla F(u_k) \|.$$

Якщо врахувати границю (22), то бачимо, що виконується

$$\| u_{k+1} - u_k \| \underset{k\to\infty}{\to} 0. \tag{23}$$

Зауважимо, що для довільного додатного цілого p можна записати

$$\left\|u_{k+p} - u_k\right\| = \left\|u_{k+p} - u_{k+p-1} + u_{k+p-1} - u_{k+p-2} + u_{k+p-2} - u_{k+p-3} + \ldots + u_{k+1} - u_k\right\| \le$$

$$\le \left\|u_{k+p} - u_{k+p-1}\right\| + \left\|u_{k+p-1} - u_{k+p-2}\right\| + \ldots + \left\|u_{k+1} - u_k\right\|.$$

Якщо виконується співвідношення (23), тоді

$$\| u_{k+p} - u_k \| \underset{k\to\infty}{\to} 0.$$

Це означає, що послідовність $\{u_k\}$ – фундаментальна послідовність. Оскільки евклідовий простір є також і банаховим простором, то послідовність $\{u_k\}$ прямує до своєї границі, наприклад, до y. Але з (22) нам відомо, що

$$\lim_{k\to\infty}\left\|\nabla F(u_k)\right\| = \left\|\lim_{k\to\infty}\nabla F(u_k)\right\| = \left\|\nabla F(y)\right\| = 0.$$

Це означає, що $y = u^*$ є стаціонарною точкою функціонала $F(u)$, тобто

$$\lim_{k\to\infty} u_k = u^* \in U_*. \tag{24}$$

Оскільки функціонал неперервний, то

$$\lim_{k\to\infty} F(u_k) = F(u^*) = 0.$$

Оцінка (11) напряму випливає з нерівності (20). Теорему доведено.

Зауважимо таке: якщо функціонал сильно опуклий, тобто існує така константа δ, за якої справджується нерівність

$$F(u) - F(v) \geq (\nabla F(v), u - v) + \delta \|u - v\|^2, \quad u, v \in U, \tag{25}$$

то в такому випадку правильним є таке припущення.

Теорема 3. Нехай матриця T(λ) спектральної задачі (1) така, що функціонал *(*2) строго опуклий і його градієнт задовольняє умову Ліпшиця

$$\|\nabla F(u) - \nabla F(z)\| \leq L\|u - z\|, \quad \forall u, z \in U, \ L > 0,$$

де U – деяка замкнута опукла множина, що містить розв'язок *u**. Якщо для деякого початкового наближення $u_0 = (x_0, \lambda^{(0)}) \in U$ виконується умова

$$0 < \gamma_0 \equiv \gamma(u_0) \leq 1/2L,$$

то ітераційний процес (7) збігається до точки мінімуму функціонала (2) $u^* = \{x^*, \lambda^*\}$, і отже, до власного вектора x* та набору власних значень $\lambda^* = (\lambda_1^*, \ldots, \lambda_m^*)$ задачі (1), що означає, що справджуються співвідношення (10), (11) та оцінка

$$\|u_k - u^*\|^2 \leq F(u_0) \cdot 2^{-2k} / \delta, \quad k = 0, 1, \ldots, \tag{26}$$

де δ – константа з нерівності (25).

Доведення. Співвідношенн (10) і (11) випливають з Теореми 2. Доведемо оцінку (26).

З нерівності (25) для $u = u_k$, $v = u^*$ одержимо

$$F(u_k) \geq (\nabla F(u^*), u_k - v^*) + \delta \|u_k - u^*\|^2 = \delta \|u_k - u^*\|^2, \quad k = 0, 1, \ldots$$

Отже, зважаючи на (27), отримуємо оцінку (26). Теорему доведено.

4. ЧИСЛОВІ РЕЗУЛЬТАТИ

Перевіримо роботу запропонованого алгоритму на кількох прикладах двопараметричної задачі на власні значення. Зауважимо, що задача (1) в дійсному евклідовому просторі E^n є частковим випадком задачі

$$Ax = \lambda Bx \tag{27}$$

з комплексними матрицями *A* та *B*, яка широко досліджена в літературі.

Щоб виконувати обчислення в дійсному просторі, переформулюємо задачу (27).

Нехай $A = A_R + iA_I$, $B = B_R + iB_I$, $\lambda = \lambda_1 + i\lambda_2$, $x = x_R + ix_I$, $i^2 = -1$. Легко бачити, що задача (27) еквівалентна до дійсної двопараметричної задачі на власні значення

$$\mathbf{Ax} = \lambda_1 \mathbf{B_1 x} + \lambda_2 \mathbf{B_2 x}, \quad \mathbf{x} = (x_R, x_I) \in \mathbf{E} = E^n \oplus E^n,$$

де

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} A_R & -A_I \\ A_I & A_R \end{pmatrix}, \ \mathbf{B_1} = \begin{pmatrix} B_R & -B_I \\ B_I & B_R \end{pmatrix}, \ \mathbf{B_2} = \begin{pmatrix} -B_I & -B_R \\ B_R & -B_I \end{pmatrix}.$$

Якщо *A, B* дійсні, $A = A_R$, $B = B_R$, тоді

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} A_R & 0 \\ 0 & A_R \end{pmatrix}, \ \mathbf{B_1} = \begin{pmatrix} B_R & 0 \\ 0 & B_R \end{pmatrix}, \ \mathbf{B_2} = \begin{pmatrix} 0 & -B_R \\ B_R & 0 \end{pmatrix}.$$

Наведені нижче результати обчислень дають уявлення про кількість ітерацій і збіжність алгоритму.

Приклад 1. Нехай A – матриця з комплексними коефіцієнтами, B – одинична матриця

$$A = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 3+i & 3-i \\ -3+i & 3+i \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Власні вектори та власні значення відомі і дорівнюють:

а) $\lambda = 1+i, \quad x = (x^1, x^2) = (1, i)$;

б) $\lambda = 0.5(1-i), \quad x = (x^1, x^2) = (1, -i)$.

Результати наведені у табл. 1, 2. Умовою зупинки ітераційного процесу є нерівність

$$\| u_{k+1} - u_k \| \le \varepsilon ,$$

де $\varepsilon = 10^{-6}$. Зауважимо, що вектор u має таку структуру:

$$u = (\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}) = ((x_R, x_I), (\lambda_1, \lambda_2)) = (x_R^1, x_R^2, x_I^1, x_I^2, \lambda_1, \lambda_2) .$$

Таблиця 1

Числові результати для прикладу 1, *а*

	Поч. наближ. u_0	Наближ. розв. $u*$	Точн. розв. u
	1.5	1.0000000	1
	0.5	0.0000000	0
	0.5	0.0000000	0
	1.5	1.0000000	1
	1.2	1.0000003	1
	1.2	0.9999999	1
F(u)	0.5625	6.17139333e-013	0
К-ть ітерацій	–	20	–

Таблиця 2

Числові результати для прикладу 1, *б*

	Поч. наближ. u_0	Наближ. розв. $u*$	Точн. розв. u
	1.7	1.00000000	1
	0.2	0.00000000	0
	-0.2	0.00000000	0
	-1.5	-1.0000000	-1
	0.9	0.5000004	0.5
	-0.7	-0.5000001	-0.5
F(u)	0.1226	3.00133411e-013	0
К-ть ітерацій	–	22	–

Приклад 2. Нехай A – несиметрична матриця з дійсними коефіцієнтами, B – одинична матриця

$$A=\begin{pmatrix} 8 & -1 & -5 \\ -4 & 4 & -2 \\ 18 & -5 & -7 \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Власні значення та власні вектори відомі і дорівнюють:

а) $\lambda = 2+4i, \quad x=(x^1,x^2,x^3)=(1-i,2,-2i)$;

б) $\lambda = 2-4i, \quad x=(x^1,x^2,x^3)=(1+i,2,2i)$;

в) $\lambda = 1, \quad x=(x^1,x^2,x^3)=(1,2,1)$.

Результати наведені у табл. 3, 4, 5. Умова зупинки ітераційного процесу та структура вектора u такі самі, як і в попередньому прикладі.

Таблиця 3

Числові результати для прикладу 2, *а*

	Поч. наближ. u_0	Наближ. розв. $u*$	Точн. розв. u
	1	1.0000000	1
	2	2.0000000	2
	3	0.0000000	0
	2	-1.0000000	-1
	1	0.0000000	0
	2	-1.9999999	-2
	-0.695	2.0000000	2
	3.739	3.9999999	4
F(u)	1.496522e+002	5.112161e-15	0
К-ть ітерацій	–	972	–

Таблиця 4

Числові результати для прикладу 2, *б*

	Поч. наближ. u_0	Наближ. розв. $u*$	Точн. розв. u
	0	0.9999999	1
	0	2.0000000	2
	1	0.0000000	0
	-1	1.0000000	1
	0	0.0000000	0
	-1	2.0000000	2
	2.334	2.0000000	2
	-7.667	-4.0000000	-4
F(u)	25.67	5.112161e-15	0
К-ть ітерацій	–	527	–

Таблиця 5

Числові результати для прикладу 2, *в*

	Поч. наближ. u_0	Наближ. розв. $u*$	Точн. розв. u
	1 1 1 -1 -1 -1 2 0	0.9999999 2 0.9999999 0 0 0 1.0000000 0	1 2 1 0 0 0 1 0
F(u)	32	3.69045e-015	0
К-ть ітерацій	–	889	–

5. ВИСНОВКИ

У [10] ми запропонували подібний підхід до побудови чисельного методу, де величина γ_k визначається зі співвідношення

$$\gamma_k = F(u_k)/\|\nabla F(u_0)\|^2 .$$

Проте вибір γ_k за формулою (6) так, як це запропоновано у цій статті, значно поліпшує збіжність градієнтного методу (7).

Зауважимо також, що відмінність між цим методом і подібними алгоритмами, розглянутими у [3], [4], [6], [8], полягає не лише у способі обчислення γ_k, а й у тому, що градієнтна процедура застосовується до розширеної задачі в просторі, що є прямою сумою евклідових просторів. Це дає змогу одночасно знайти власний вектор і набір власних значень, а не окремо, як це зроблено у [3], [4], [6], [8]. Проте такий алгоритм потребує вибору початкового наближення і власного вектора, і набору власних значень тоді, як для інших згаданих методів достатньо задати лише початкове наближення власного вектора. Таку незручність легко обійти, якщо на першому кроці для заданого наближення x_0 розв'язати систему лінійних рівнянь з формули (4) стосовно невідомих $\lambda = \{\lambda_1, \dots, \lambda_m\}$

$$f_i(\lambda, x_0) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, m .$$

Знайдені $\lambda = \{\lambda_1, \dots, \lambda_m\}$ слугують початковим наближенням $\lambda^0 = \{\lambda_1^0, \dots, \lambda_m^0\}$ для набору власних значень.

Практичну застосовність запропонованого алгоритму було досліджено на багатьох тестових прикладах, зокрема на тих, що подані у цій праці.

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. *Abramov A.A.* A method for solving the multipara-meter eigenvalue problem for certain systems of differential equations / A.A. Abramov, V.I. Ul'yanova, L. F. Yukhno // Coput. Math. Meth. Phys. – 2000. – Vol. 40, No. 1. – P. 18-26.
2. *Atkinson F.V.* Multiparameter Eigenvalue Problems. Matrices and Compact Operators. Vol. 1. / F. V. Atkinson. – Academic Press New-York; London, 1972.

3. *Blum E.K.* A Convergent Gradient Method for Matrix Eigenvector-Eigentuple Problems / E.K. Blum, A.R. Curtis // Numer. Math. – 1978. – Vol. 31. – P. 247-263.
4. *Browne P.J.* A numerical technique for multiparameter eigenvalue problems / P.J. Browne, B.D. Sleeman // IMA J. Numer Anal. – 1982. – Vol. 2, No. 4. – P. 451-457.
5. *Khlobystov V.V.* Numerical method of finding bifurcation points of linear two-parameter eigenvalue problems / V.V. Khlobystov, B.M. Podlevskyi // Comput. Meth. Appl. Math. – 2009. – Vol. 9, No. 4. – P. 332-338.
6. *Khlobystov V.V.* Variation-gradient method of the solution of one class of nonlinear multiparameter eigenvalue problems / V.V. Khlobystov, B.M. Podlevskyi // J. Numer. Appl. Math. – 2009. – Vol. 1. – No. 97. – P. 70-78.
7. *Müller R.E.* Numerical Solution of Multiparameter Eigenvalue Problems / R.E. Müller // ZAMM. – 1982. – Vol. 62. – P. 681-686.
8. *Podlevskyi B.M.* A variational approach for solving the linear multiparameter eigenvalue problems / B.M. Podlevskyi // Ukrainian Math. Journal. – 2009. – Vol. 61. – P. 1247-1256. (in Ukraine).
9. *Podlevskyi B.M.* On some nonlinear two-parameter spectral problems of mathematical physics / B.M. Podlevskyi // Mathematical modeling. – 2010. – Vol. 22, No. 5. – P. 131-145.
10. *Podlevskyi B.M.* A gradient method for solving the nonlinear multiparameter spectral problems / B.M. Podlevskyi, V.V. Khlobystov // Reports NAS of Ukraine. – 2012. – Vol. 8. – P. 22-27. (in Ukraine).
11. *Podlevskyi B.M.* On one approach to finding eigenvalue curves of linear two-parameter spectral problems / B.M. Podlevskyi, V.V. Khlobystov // J. Mathematical Sciences. – 2010. – Vol. 167, No. 1. – P. 96-106.
12. *Sleeman B.D.* Multiparameter spectral theory in Hilbert space / B.D. Sleeman. – Pitnam Press, London, San Francisco, Melbourne, 1978.
13. *Volkmer H.* Multiparameter eigenvalue problems and expansion theorem / H. Volkmer. – Lect. Notes Math., 1988.
14. *Berezin I.S.* Calculation methods V. 1 3-th edition / I. S. Berezin, N. P. Zydkov. – M.: Nauka, 1966.

Стаття: надійшла до редколегії 02.09.2015
доопрацьована 14.10.2015
прийнята до друку 28.10.2015

GRADIENT METHOD OF SOLVING LINEAR MULTIPARAMETER EIGENVALUE PROBLEM

O. Yaroshko[1], B. Podlevskyi[2], V. Khlobystov[3]

Ivan Franko National University of Lviv,
Universytetska Str., 1, Lviv, 79000, e-mail: oksyanya@gmail.com
[2]Pidstryhach Institute for Applied Problems of Mechanics and Mathematics,
National Academy of Sciences of Ukraine,
Naukova Str., 3b, Lviv, 79060, e-mail: podlev@iapmm.lviv.ua
[3]Institute of Mathematics, National Academy of Sciences of Ukraine,
Tereschenkivska Str., 3, Kyiv, 01601, e-mail: olga.mail@bk.ru

The multiparameter eigenvalue problem is solved by using the variation approach. The equivalence between the spectral problem and the correspondent variation problem is proved. The numerical method for solving this variation problem is proposed and its local convergence is proved. Finally, the numerical experiments for the proposed method are examined.

Key words: multiparameter eigenvalue problem, spectral problem, variation problem, numerical method, iterative procedure.